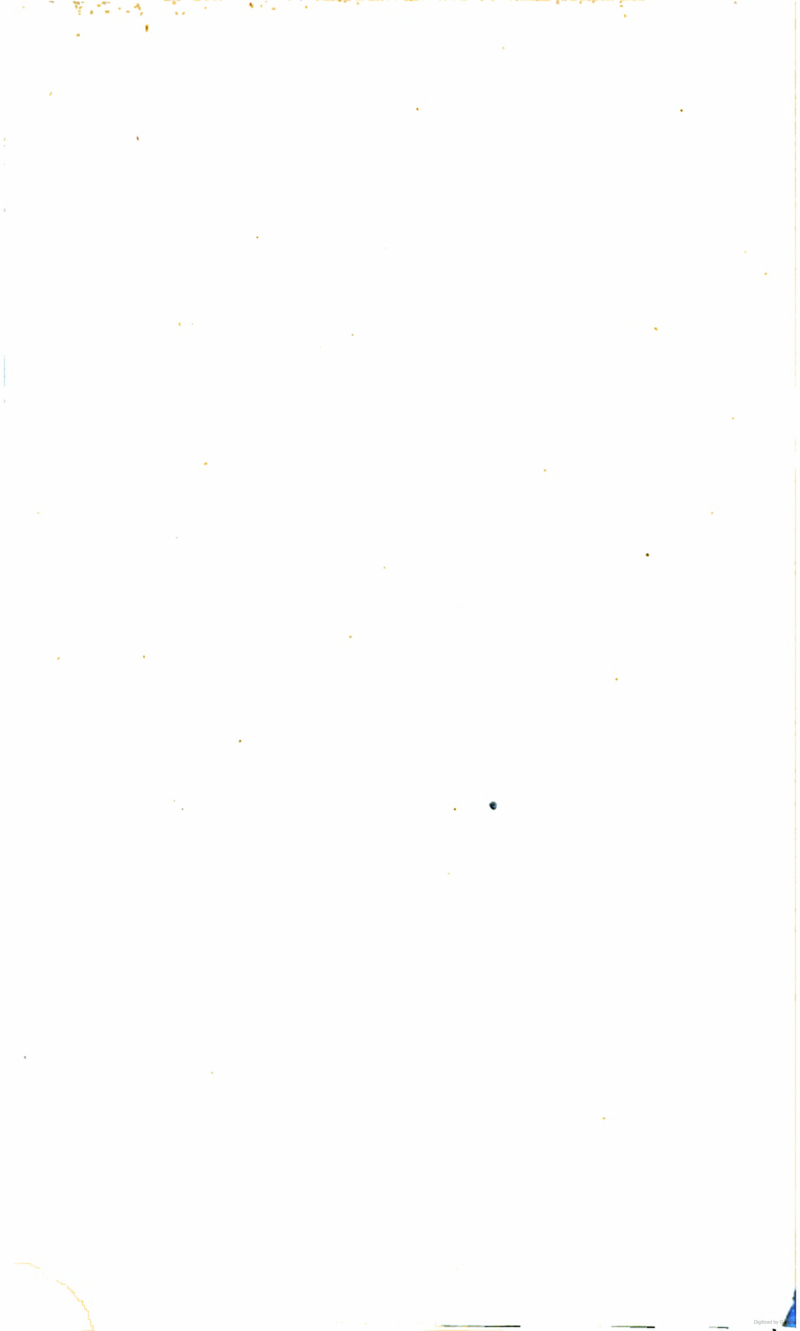
Wissenschaftliche Abhandlungen

Hermann von Helmholtz

Library
of the
University of Wisconsin



HELMHOLTZ

WISSENSCHAFTLICHE ABHANDLUNGEN.

WISSENSCHAFTLICHE

ABHANDLUNGEN

VON

HERMANN HELMHOLTZ

ORD. PROFESSOR A. D. UNIVERSITÄT, MITGLIED D. AKADEMIE D. WISSENSCHAFTEN
ZU BERLIN.

ERSTER BAND.

MIT PORTRAIT UND DREI LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.

LEIPZIG
JOHANN AMBROSIUS BARTH.
1882.

Alle Rechte vorbehalten.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Digitized by Google

19739
H36
1

Vorrede zum ersten Bande.

Der Aufforderung des Herrn Verlegers, meine in verschiedenen Zeitschriften zerstreuten kleineren wissenschaftlichen Aufsätze zu sammeln und wieder abdrucken zu lassen, habe ich nachgeben zu müssen geglaubt, da mir schon oft Beschwerden meiner Freunde und Schüler darüber zu Ohren gekommen waren, dass sie es schwer gefunden hätten, manche meiner älteren Abhandlungen sich zu verschaffen. Ich verhehle mir nicht, dass manche dieser älteren Aufsätze, die zum Theil vierzig Jahre zurückliegen, den gegenwärtigen Anforderungen wissenschaftlicher Methodik nicht mehr ganz entsprechen, und ich muss für sie die Nachsicht des Lesers in Anspruch nehmen. Geändert sind ohne Bemerkung im Texte nur Druckfehler und Mängel der Stilisirung; wo solche in den mathematischen Formeln oder in den Zahlen vorkamen, sind sie in Anmerkungen, die durch die Jahreszahl (1881) als neu charakterisirt sind, bezeichnet. Ebenso sind alle, den Sinn des Textes verändernden Bemerkungen und Zusätze in Anmerkungen oder Anhänge zu den Aufsätzen verwiesen und mit derselben Jahreszahl versehen.

Da der Herr Verleger wünschte, die für die Raumersparniss sehr förderliche Bezeichnung der Brüche a/b, wie sie unter andern auch in Wiedemann's Annalen der Physik schon eingeführt ist, und in vielen neueren englischen Büchern gebraucht wird, z. B. von Herrn G. G. Stokes in dem Wiederabdruck seiner „Mathematical and Physical Papers“: so habe ich dabei folgende Regeln beachtet:

1) Factoren, die hinter dem Zeichen / folgen, sind als Factoren des Nenners zu betrachten, wenn nicht der ganze Bruch

in eine Parenthese eingeschlossen ist. Also a/bc ist a/(bc), dagegen (a/b)c ist gleich (ac)/b.

2) Das Summenzeichen dagegen fügt den neuen Summanden zum Werthe des Bruchs nicht zum Nenner des Bruchs, wenn nicht der dem Nenner entsprechende Ausdruck eingeklammert ist. Also a/b + c ist gleich c + (a/b); dagegen in a/(b + c) ist (b + c) der Nenner und in (c + a)/b ist (c + a) der Zähler des Bruchs.

Herr Stokes bemerkt mit Recht, dass in Exponentialfunctionen mit gebrochenem Exponenten das Zeichen sehr zweckmässig anzuwenden sei; das ist in dem vorliegenden Bande noch wenig geschehen.

Dieser erste Band enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Dynamik, Hydrodynamik, Lehre vom Schall, von der Elektricität und dem Magnetismus. Die optischen und physiologischen sollen einen zweiten Band bilden. Ausgeschlossen bleiben die beiden grösseren Werke, das Handbuch der Physiologischen Optik und die Lehre von den Tonempfindungen, sowie die Populären wissenschaftlichen Vorträge und die Akademischen Reden.

Einige Berichte aus den von der Berliner Physikalischen Gesellschaft herausgegebenen Fortschritten der Physik und einige von mir verfasste Berichte über Arbeiten meiner Schüler im hiesigen Laboratorium sind aufgenommen, insofern sie eigene Meinungsäusserungen oder Auseinandersetzungen über wissenschaftliche Fragen enthalten. Auch habe ich vorläufige Berichte später erschienener längerer Abhandlungen wieder abdrucken lassen, weil sie dem Leser die Orientirung über den Inhalt der letztern erleichtern können.

Um die auf die Originalaufsätze bezüglichen Citate in diesem Abdruck auffinden zu können, sind am Rande der Seiten desselben die Seitenzahlen der Originalarbeit angegeben. Wo mehrere Abdrücke vorliegen, sind dazu die Seitenzahlen des ersten in der Ueberschrift citirten benutzt.

Berlin, Weihnachten 1881.

H. Helmholtz.

Inhaltsübersicht

des ersten Bandes.

Zur Lehre von der Energie.

Seite

I. Bericht über die Theorie der physiologischen Wärmeerscheinungen für 1845. 3
II. Ueber die Erhaltung der Kraft. Eine physikalische Abhandlung. 1847 12
III. Erwiderung auf die Bemerkungen von Hrn. Clausius. 1854 76
IV. Ueber Eigenschaften des Eises. 1865 94

Hydrodynamik.

V. Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. 1858 101
VI. Sur le mouvement le plus général d'un fluide. Reponse à une communication précédente de M. S. Bertrand. 1868 . 135
VII. Sur le mouvement des fluides. Deuxième réponse à M. S. Bertrand. 1868 140
VIII. Réponse à la Note de M. S. Bertrand du 19. Octobre 1868. 145
IX. Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen. 1868 . . 146
X. Ueber ein Theorem, geometrisch ähnliche Bewegungen flüssiger Körper betreffend, nebst Anwendung auf das Problem, Luftballons zu lenken. 1873 158
XI. Ueber Reibung tropfbarer Flüssigkeiten. 1860. Mit Herrn G. v. Piotrowski 172
XII. Zur Theorie der stationären Ströme in reibenden Flüssigkeiten. 1869 223

Schallbewegung.

XIII. Bericht über die theoretische Akustik betreffenden Arbeiten vom Jahre 1848 und 1849 233
XIV. Ueber Combinationstöne. 1856 256
XV. Ueber Combinationstöne 263
XVI. Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. 1859 303
XVII. Ueber den Einfluss der Reibung in der Luft auf die Schallbewegung. 1863 383
XVIII. Zur Theorie der Zungenpfeifen. 1861 388
XIX. Ueber die Vocale. 1857 395
XX. Ueber die Klangfarbe der Vocale. 1859 397
XXI. Ueber Klangfarben. 1860 408
XXII. Ueber die Bewegung der Violinsaiten. 1860. 410
XXIII. Ueber musikalische Temperatur. 1860 420
XXIV. Ueber die persisch-arabische Tonleiter 1862 424

Elektrodynamik.

Seite

XXV. Ueber die Dauer und den Verlauf der durch Stromesschwankungen inducirten elektrischen Ströme. 1851 . 429

XXVI. Telephon und Klangfarbe. 1878 463

XXVII. Ueber einige Gesetze der Vertheilung elektrischer Ströme in körperlichen Leitern mit Anwendung auf die thierisch-elektrischen Versuche. 1853 475

XXVIII. Ueber eine allgemeine Transformationsmethode der Probleme über elektrische Vertheilung. 1862 520

XXIX. Ueber die physiologische Wirkung kurzdauernder elektrischer Schläge im Innern von ausgedehnten leitenden Massen. 1869 526

XXX. Ueber elektrische Oscillationen. 1869 531

XXXI Ueber die Gesetze der inconstanten elektrischen Ströme in körperlich ausgedehnten Leitern. 1870 537

XXXII. Ueber die Theorie der Elektrodynamik. Erste Abhandlung: Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper. 1870 545

XXXIII. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrodynamischen Wirkungen. 1871 629

XXXIV. Ueber die Theorie der Elektrodynamik. Vorläufiger Bericht. 1872 636

XXXV. Ueber die Theorie der Elektrodynamik. Zweite Abhandlung. Kritisches. 1873 647

XXXVI. Vergleich des Ampère'schen und Neumann'schen Gesetzes für die elektrodynamischen Kräfte. 1873 688

XXXVII. Ueber die Theorie der Elektrodynamik. Dritte Abhandlung: Die elektrodynamischen Kräfte in bewegten Leitern. 1874 702

XXXVIII. Kritisches zur Elektrodynamik. 1874 763

XXXIX. Versuche über die im ungeschlossenen Kreise durch Bewegung inducirten elektromotorischen Kräfte. 1875 . . 774

XL. Bericht betreffend Versuche über die elektromagnetische Wirkung elektrischer Convection, ausgeführt von Hrn. Henry A. Rowland. 1876 791

XLI. Ueber die auf das Innere magnetisch oder diëlektrisch polarisirter Körper wirkenden Kräfte. 1881 798

Galvanismus.

XLII. Ueber galvanische Polarisation in gasfreien Flüssigkeiten 1873 823

XLIII. Bericht über Versuche des Hrn. Dr. E. Root aus Boston, die Durchdringung des Platins mit elektrolytischen Gasen betreffend. 1876 835

XLIV. Ueber galvanische Ströme, verursacht durch Concentrationsunterschiede; Folgerungen aus der mechanischen Wärmetheorie. 1877 840

XLV. Studien über elektrische Grenzschichten. 1879 . . . 855

XLVI. Ueber Bewegungsströme am polarisirten Platina. 1880 899

XLVII. Eine elektrodynamische Wage. 1881 922

XLVIII. Ueber galvanische Polarisation des Quecksilbers und darauf bezügliche Versuche des Hrn. Arthur König. 1881 925

Zur Lehre von der Energie.

Digitized by Google

I.

Bericht über die Theorie der physiologischen Wärmeerscheinungen für 1845.

(Aus: „Die Fortschritte der Physik im Jahre 1845". Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. I. Jahrgang; erschienen 1847. S. 346—355.

Ueber die Wärmeverhältnisse der Thiere sind in diesem Jahre zwei Arbeiten erschienen. Die eine von Hrn. J. Davy[1]), eine achtmonatliche Reihe von Beobachtungen der Temperatur 347
seiner Zunge enthaltend, angestellt, um die täglichen und monatlichen Schwankungen derselben und den Einfluss körperlicher und geistiger Anstrengung zu ermitteln, ist mehr von physiologischen als physikalischen Interesse. Hrn. Davy's Hauptresultate sind, dass die Zungentemperatur während des Schlafes am niedrigsten ist (36°,4 C.), im Laufe des Vormittags steigt bis gegen 4 Uhr (auf 37°,17 C.), nach dem Mittagessen, was erst um 6 Uhr stattfand und wonach Schläfrigkeit eintrat, fällt (bis 36°,5 C.) und nach dem Thee um $7^1/_2$ Uhr zum zweiten Male etwas steigt, um endlich zur Nacht wieder auf ihr Minimum zu sinken. Zwei deutsche Beobachter, Gierse und Hallmann, hatten schon früher entsprechende Resultate gefunden, nur fielen ihre Maxima auf andere Tageszeiten, 11 Uhr früh und 6 Uhr Abends, weil sie gegen 2 Uhr zu Mittag speisten; auch ist bei ihnen die zweite Erhebung bedeutender als bei Hrn. Davy. Die jährlichen Schwankungen sind sehr gering, wenn man die Tem-

---

1) J. Davy, on the temperatur of man. Phil. Trans. f. 1845; Ann. chim. ph. XIII. 174.

peratur der Zunge unter Umständen misst, wo der Körper vor einer unangenehmen Einwirkung der Temperaturextreme geschützt ist. Die grösste Differenz der Mittel aus den Beobachtungen der einzelnen Monate beträgt 0°,18 C. auf einen Unterschied der mittleren Zimmertemperatur von 8°,4 C. Dagegen erniedrigt sich die Zungenwärme auffallend (bis 35° C.), sobald durch äussere Kälte das Gefühl von Frieren und von Schläfrigkeit erregt wird. Körperliche und geistige Anstrengung erhöhen dieselbe um etwa 0°,4 C. Hrn. Davy's Arbeit ist in so fern wichtig, als er zuerst die Methode der Beobachtungsreihen in grösserem Massstabe angewendet hat, um bei Bestimmung der Veränderungen, welche die menschliche Temperatur unter verschiedenen Bedingungen erleidet, die störenden Variationen anderer Art zu eliminiren, und so zu sichereren Resultaten zu kommen, als es bisher durch vereinzelte Beobachtungen möglich war.

Die zweite Arbeit von Hrn. Liebig[1]) bezieht sich auf die Frage nach dem Ursprung der thierischen Wärme, und bietet mehr von physikalischem Interesse dar, insofern es sich darum handelt zu entscheiden, ob die thierische Wärme aus den bekannten Erwärmungsquellen der unorganischen Natur herrühre,
348 oder ob sie in dem lebenden Körper auf eine besondere und abweichende Art erzeugt werde. Der gegenwärtige Stand dieser Frage ist folgender: Man ist ursprünglich, ausgehend von der materiellen Ansicht der Wärmeerscheinungen, für die Erklärung der organischen Wärme genöthigt gewesen zu der Annahme, dieselbe rühre von dem mit den Ingestis, den Nahrungsmitteln und dem eingeathmeten Sauerstoffe, frei und latent eingebrachten Wärmestoffe her, weil man nicht annehmen konnte, dass dieser Stoff im Organismus erzeugt werde; man hat deshalb von Lavoisier an dieselbe aus der Verbrennung des Kohlenstoffs und Wasserstoffs des Bluts in den Lungen erklären wollen. Dagegen zeigte Brodie experimentell, dass bei geköpften oder durch Gifte und Kopfverletzungen betäubten Thieren, bei welchen man durch Lufteinblasen noch längere Zeit die Blut-

---

1) J. Liebig, Ueber die thierische Wärme. Ann. d. Ch. u. Ph. L., Quesnev. rev. sc. XX. 392.

bewegung, die chemischen Veränderungen der Ausathmungsluft, die Reizbarkeit der Muskeln erhalten kann, die Wärme schnell verloren gehe. Er schloss daraus, dass nicht die Respiration, sondern die Nerventhätigkeit unter Leitung des Gehirns die Wärme erzeuge. Das angegebene Resultat ist von allen bestätigt worden, welche diese Versuche wiederholt haben; nur in Betreff der Geschwindigkeit der Abkühlung sind die Stimmen nicht einig. Brodie hatte nämlich gefunden, dass die Thiere bei künstlicher Respiration schneller abgekühlt werden als ohne dieselbe und schloss daraus, dass die Respiration ein Abkühlungsmittel sei; Chaussat fand keinen Unterschied, Hales und Legallois dagegen eine Verzögerung des Erkaltens durch die künstliche Respiration; endlich zeigten Wilson Philip und William, dass die Abkühlung bei langsamem Einblasen langsamer sei, bei geschwindem schneller als ohne dasselbe, und dass durch starkes Lufteinblasen die Temperatur auch eines unverletzten Thieres vermindert werden könne. Jedenfalls folgt aus diesen Versuchen so viel mit Sicherheit, dass die Respiration unmittelbar, d. h. durch die sogleich im Blute eintretenden Verbindungen des Sauerstoffs und die Ausscheidung der Kohlensäure, nicht die einzige Quelle der thierischen Wärme sei; ein Theil der Physiologen aber liess sich dadurch verleiten, weiter zu schliessen, dass die Wärme ganz oder theilweise nicht von aussen her, d. h. aus den Ingestis, ihren Ursprung nehme, son- 319
dern von der unbekannten, alles regelnden Thätigkeit der Nerven erzeugt werde. Hierzu kamen nun noch die Versuche von Dulong[1]) und Despretz[2]), welche die von verschiedenen warmblütigen Thieren während einer gewissen Zeit abgegebene Wärme mit dem Wassercalorimeter quantitativ bestimmten. Die Thiere befanden sich dabei in einem kupfernen, mit Weidengeflechten ausgelegten Kasten, durch welchen Luft aus einem Gasometer in gleichmässigem Strome hindurchgeleitet und in einem zweiten Apparat so aufgefangen wurde, dass ihre Menge und Zusammensetzung genau bestimmt werden konnten. Es wurde dann berechnet, wieviel Kohlenstoff und Wasserstoff während der Dauer

1) Ann. de chim. et de ph. I.
2) Ebend. XXVI.

des Versuchs sich mit dem verzehrten Sauerstoff verbunden habe, und wieviel Wärme dabei erzeugt worden sei. Sie fanden beide in einer grossen Reihe von Versuchen, dass die berechnete Verbrennungswärme nur 0,75—0,90 von der in den Thieren erzeugten betrug.

Liebig hat in seiner Thierchemie die Herleitung der ganzen thierischen Wärme aus dem Verbrennungsprocess der Blutbestandtheile mit dem eingeathmeten Sauerstoff entschieden vertheidigt. Er widerlegt die Schlüsse, die man aus den Versuchen von Brodie an geköpften und betäubten Thieren gezogen hat, und stellt die theoretische Forderung auf, dass der Ursprung der Wärme, als eines Princips, welches einem gewissen Kraftäquivalent entspreche, nicht aus nichts, sondern nur aus andern Kräften hergeleitet werden dürfe. Daraus aber schliesst er weiter, dass die Wärme nur von der Verbrennung des Kohlenstoffs und Wasserstoffs mit Sauerstoff herrühre, und sucht die Quantität derselben hiernach für den menschlichen Körper zu berechnen.

Wir befinden uns hier mit der Frage über die thierische Wärme auf einem eigenen Felde. Das Princip von der Constanz des Kraftäquivalents bei Erregung einer Naturkraft durch eine andere, obschon logisch vollkommen gerechtfertigt, und
350 auch schon benutzt als Grundlage mathematischer Theorien (z. B. von Carnot und Clapeyron zur Bestimmung der Arbeit, welche eine gewisse Wärmequantität leisten kann, von Neumann in der Theorie der Inductionsströme durch Bewegung von Magneten oder Strömen) ist weder theoretisch bisher vollständig ausgesprochen und anerkannt, noch empirisch durchgeführt, wenn ihm auch die bisher gemachten Versuche vollständig entsprechen. So lange ein Wärmestoff als Ursache der Erscheinungen festgehalten wurde, war es undenkbar, dass dieser Stoff im Körper erschaffen würde.

Nun ist aber gegenwärtig die materielle Theorie der Wärme nicht mehr zu halten, sondern dafür eine Bewegungstheorie zu substituiren, weil wir Wärme aus mechanischen Kräften ihren Ursprung nehmen sehen, sowohl unmittelbar, z. B. bei der Reibung, sowohl fester gegen feste Körper wie flüssiger gegen feste, als auch mittelbar durch elektrische Ströme bei der Be-

wegung von Magneten und durch die Reibungselektricität, wo an ein Freiwerden latenten Wärmestoffs nicht zu denken ist. Fassen wir die Wärme als Bewegung, so ist zuvörderst vorauszusetzen, dass mechanische, elektrische und chemische Kräfte nur immer ein bestimmtes Aequivalent derselben erzeugen können, wie complicirt auch die Art des Ueberganges der einen Kraft in die andere sein mag. Was darüber empirisch bekannt ist, reicht nicht weit. Für die mechanischen Kräfte bestehen noch keine Versuche, die in Betracht kommen könnten; die Arbeiten von Carnot, Clapeyron und Holtzmann beziehen sich nicht auf die Erzeugung, sondern nur auf die Ausbreitung der Wärme. In Bezug auf die chemischen Kräfte sind die Wärmeäquivalente (die latente Wärme) einer Reihe von chemischen Processen bestimmt worden, und das Gesetz von der Constanz der Wärmeerzeugung, in welchen Zwischenstufen auch die Verbindung erfolge, hat sich in den untersuchten Fällen bewährt. Für die constanten hydroelektrischen Ströme folgt aus den Gesetzen von Ohm und Lenz, wenn wir das letztere auch, wie es von Becquerel[1]) empirisch geschehen ist, auf die Flüssigkeiten ausdehnen, dass die entwickelte Wärme bei jeder Ein- 351
richtung der Kette der Grösse der elektro-chemischen Umsetzung proportional sei. Es ist nach Lenz in einem bestimmten Theile der Kette, dessen Widerstand $= w$, bei der Intensität des Stromes J für die Zeit t die entwickelte Wärme $\vartheta = J^2 wt$, also die Wärmemenge in der ganzen Kette $\Theta = J^2 Wt$, wenn W den Widerstand der ganzen Kette bezeichnet. Nun ist aber $J = nA / W$, wo A die elektrische Differenz der wirkenden Metalle und n die Zahl der Zellen bezeichnet, also $\Theta = nJAt$. Die Menge der Atome C, welche in der Zeit t von dem einen Metall oxydirt, von dem andern reducirt sind, ist nach Faraday's elektrolytischem Gesetze in einer Zelle $= Jt$, in n Zellen $= nJt$, also $\Theta = AC$, also gleich der Quantität der verbrauchten Metalle, multiplicirt mit ihrem elektrischen (chemischen?) Gegensatz, gänzlich unabhängig von der Form, Länge etc. der Kette. Für die statische Elektricität folgt, wenn wir die Gesetze von Riess als allgemein gültig voraussetzen dürfen, $\Theta = QD$, wo Q

1) Comptes rendus, T. XVI. 1843.

die Quantität und *D* die Dichtigkeit der angehäuften Elektricität ist.[1])

Bezeichnen wir nach wie vor mit latenter Wärme der chemischen Verbindungen das Wärmeäquivalent, was sie bei weiteren Verbindungen erzeugen können, so folgt aus den hingestellten theoretischen Forderungen für die organischen Körper, dass bei constanter Grösse und Zusammensetzung derselben die als frei abgegebene Wärme und die latente der Egesta zusammen gleich sein müssen der latenten der Ingesta, gleichviel in welchen Zwischenstufen auch die Umwandlung der letzteren in erstere vor sich gegangen sein mag. Die Egesta sind nun Kohlensäure, Wasser, kohlensaures Ammoniak, Harnstoff, Reste der Nahrungsmittel und eine verhältnissmässig geringe Menge quaternärer Verbindungen, wie Gallenreste, Schleim, Extraktivstoffe, Harnsäure etc. Lassen wir die letzteren aus dem Spiel, weil bei ihrer Bildung eben nicht viel Wärme frei geworden sein kann, und rechnen wir dafür den Harnstoff mit der entsprechenden Menge von Wasseratomen gleich als kohlensaures
352 Ammoniak an, bei welcher Umsetzung keine bemerkbare Quantität Wärme entsteht: so muss die im Körper erzeugte Menge derselben ungefähr gleich sein derjenigen, welche der entsprechende Theil der Nahrungsmittel, verbrannt mit Sauerstoff zu Kohlensäure, Wasser und Ammoniak geben würde. Es handelt sich also nicht um die Verbrennungswärme von Kohlenstoff und Wasserstoff, sondern um die der Nahrungsmittel. Da nun über die letzteren noch gar keine empirischen Bestimmungen gemacht sind, so ist eine Berechnung von Versuchen, wie sie von Dulong und Despretz angestellt sind, noch gar nicht möglich. Die Ansicht von Lavoisier, wonach in den Lungen ein Kohlenwasserstoff ausgeschieden werden sollte, würde die Berechnungsart, wie sie Dulong, Despretz und Liebig angewendet haben, rechtfertigen, aber sie ist längst als falsch erwiesen worden. Herr Liebig hilft sich durch die Annahme, dass der Kohlenstoff und Wasserstoff der organischen Verbindungen eben so viel Wärme erzeugen müssen, als wenn sie frei verbrennen. Das können wir ihm ungefähr zugeben,

1) Pogg. Ann. XLXIII. 320, und LXIII. 505.

denn wahrscheinlich sind die Hauptbestandtheile des thierischen und pflanzlichen Körpers, die Proteïnverbindungen, die zucker- und mehlartigen Stoffe, die Fette, solche, die den grössten Theil der latenten Wärme ihrer Elemente noch enthalten. Was wird aber aus dem Sauerstoff, der in den Substanzen schon vorhanden ist und der, verbunden mit Wasserstoff und Kohlenstoff, sich unter den Verbrennungsprodukten befindet. Hrn. Liebig's Rechnung ist nur dann gerechtfertigt, wenn wir annehmen, dass dieser Sauerstoff sich nur mit Wasserstoff verbinde, und dabei keine Wärme mehr erzeuge, also gleichsam schon als Wasser in der Substanz vorhanden sei. Dass ist aber eine Annahme, die theoretisch unwahrscheinlich ist, und durch die neueren Untersuchungen auch empirisch widerlegt wird. Nach den Versuchen von Favre und Silbermann ist beim Alkohol die Verbrennungswärme ungefähr gleich, bei den einfachen und zusammengesetzten Aetherarten, dem Holzgeist grösser, bei einigen Säuren von sehr hohem Atomgewichte und geringem Sauerstoffgehalte geringer als sie nach Hrn. Liebig's Rechnungsweise sein müsste. Von den Nahrungsmitteln sind keine untersucht, doch lässt sich aus der Angabe für die Stearinsäure, die ein wenig 353
hinter der Verbrennungswärme der freien Kohlen- und Wasserstoffatome zurückbleibt, wohl annehmen, dass sich die meisten Fette eben so verhalten werden. Dagegen folgt für die sämmtlichen Pflanzenstoffe von der Formel $C_n H_{2n} O_n$, welche in Traubenzucker und dann mit bedeutender Wärmeentwickelung in Alkohol werwandelt werden können, dass ihre latente Wärme viel grösser sei als die der 12 At. Kohlenstoff. Es geben nämlich 12 At. Kohlenstoff = 901,44 grm (wenn $O = 100$ grm) bei der Verbrennung 7283600 Calories. Bei der weinigen Gährung gehen 4 At. als Kohlensäure fort, die übrigen 8 bleiben zurück, verbunden mit $H_{24} O_4$ zu 1150,72 grm Alkohol, welche bei der Verbrennung 8265600 geben. Verbrennen wir Traubenzucker unmittelbar, so kommt noch die bei der weinigen Gährung entwickelte Wärme hinzu. Für die von stickstoffhaltigen Verbindungen erzeugte Wärme haben wir bisher gar keine Anhaltspunkte.

Wenn also die Versuche von Dulong und Despretz keine vollständige Uebereinstimmung zwischen der abgegebenen Wärme

und der nach den Athmungsprodukten berechenbaren ergeben, so wiederspricht dies Resultat der chemischen Theorie der organischen Wärme nicht im mindesten.

Hr. Liebig sucht nun auf zweierlei Weise das Ergebniss dieser Versuche mit seinen theoretischen Ansichten zu vereinigen. Einmal bezweifelt er (Thierchemie S. 34), dass die Thiere in der niedrigen Temperatur des Kastens bei gezwungen ruhiger Stellung ihren eigenen Wärmegrad beibehalten haben. Bei Despretz ist zwar die Temperatur von 7—8° C. nicht so tief, dass die meisten einheimischen Thiere sie nicht ohne Beschwerde in ruhiger Lage ertragen sollten, besonders da sie nicht unmittelbar mit dem Kupfer des Kastens in Berührung, sondern durch Weidengeflechte davon getrennt waren; doch muss Hrn. Liebig's Einwand deshalb als möglich zugegeben werden, weil die Zuleitung der frischen Luft nicht immer schnell genug geschah, so dass die hindurchgetretene bis doppelt so viel Kohlensäure enthielt als die normale Athmungsluft, wodurch erfahrungsmässig die Temperatur der Thiere erniedrigt werden kann. Dagegen kann ein solcher Einwurf die Versuche von Dulong,
354 welche bei mittlerer Zimmertemperatur angestellt sind, und wo das Sauerstoffgas in hinreichender Menge zugeleitet wurde, nicht treffen. Zweitens macht Hr. Liebig in dem hier zu besprechenden Aufsatze darauf aufmerksam, dass die Versuche mit zu niedrigen Zahlen für die Verbrennungswärme des Kohlenstoffs und Wasserstoffs berechnet seien, nämlich von Despretz mit den selbst gefundenen Zahlen für 1 grm *C.* 7912, für 1 grm *H.* 23460, und von Dulong mit denen Lavoisier's *C.* 7226, *H.* 23400, während doch nach den genaueren Bestimmungen von Hess die Verbrennungswärme des Wasserstoffs 34792 sei. Dann stellt er eine theoretische Verbrennungswärme des Kohlenstoffs auf, welche er aus den von Despretz für das Aetheringas, den Alkohol und Aether, und von Hess für den Wasserstoff gefundenen ohne Berücksichtigung der verschiedenen Aggregatzustände nach eben der theoretischen Annahme über die Verbrennung organischer Verbindungen berechnet, welche wir oben widerlegt haben. Er findet im Mittel 8558, und zieht diese den empirischen Bestimmungen vor, weil er die vollständige Verbrennung der angewendeten Kohle und ihre Freiheit

von Wasserstoff bezweifelt. Nun findet er bei der Berechnung der Versuche von Despretz mit C 7912 und H 34792 das Verhältniss der Verbrennungswärme zu der von den Thieren abgegebenen zwischen 82:100 und 102:100, Mittel 95,25:100; mit C 8558 dagegen zwischen 88,5 und 107,5:100, Mittel 96,9:100; mit der letzteren Zahl in Dulong's Versuchen zwischen 83,6 und 104,7:100, Mittel 95,8:100.

Jedenfalls müssen wir die theoretisch gefundene Zahl für den Kohlenstoff zurückweisen, weil sie aus eben der unrichtigen Annahme hergeleitet ist, die damit gestützt werden soll. Ob bei Despretz's Versuchen die neuere Zahl für den Wasserstoff gesetzt werden darf, ist zweifelhaft, da derselbe mit denselben oder ganz ähnlichen Apparaten und Methoden diese bestimmt hat, mit denen er die Versuche an Thieren anstellte; an beiden also dieselben Fehlerquellen haften. Bei Dulong, der fremde Zahlen benutzt hat, wäre diese Rücksicht nicht zu nehmen. Auffallend, und die Genauigkeit der Resultate verbürgend, ist übrigens die nahe Uebereinstimmung der Mittel beider Versuchsreihen bei gleichmässiger Berechnung, und als wahrschein- 355
lichstes Resultat möchte hinzustellen sein, dass die von den Thieren erzeugte und abgegebene Wärme um $^1/_{20}$ bis $^1/_{10}$ grösser sei als die aus den Respirationsprodukten zu berechnende.

Eine ausführlichere Erörterung der hier besprochenen Verhältnisse und namentlich auch des physiologischen Theils ist von mir im Artikel „Wärme“ des „Encyclopädischen Wörterbuchs der medicinischen Wissenschaften“, herausgegeben von Mitgliedern der Berliner medicinischen Facultät, erschienen und wird in Bd. II dieser Sammlung abgedruckt werden.

II.

Ueber die Erhaltung der Kraft.

Eine physikalische Abhandlung.

Vorgetragen in der Sitzung der physikalischen Gesellschaft zu Berlin am 23. Juli 1847; erschien zu Berlin bei G. Reimer 1847.

Einleitung.

1 Vorliegende Abhandlung musste ihrem Hauptinhalte nach hauptsächlich für Physiker bestimmt werden, ich habe es daher vorgezogen, die Grundlagen derselben unabhängig von einer philosophischen Begründung rein in der Form einer physikalischen Voraussetzung hinzustellen, deren Folgerungen zu entwickeln und dieselben in den verschiedenen Zweigen der Physik mit den erfahrungsmässigen Gesetzen der Naturerscheinungen zu vergleichen. Die Herleitung der aufgestellten Sätze kann von zwei Ausgangspunkten angegriffen werden, entweder von dem Satze, dass es nicht möglich sein könne, durch die Wirkungen irgend einer Combination von Naturkörpern auf einander in das Unbegrenzte Arbeitskraft zu gewinnen, oder von der Annahme, dass alle Wirkungen in der Natur zurückzuführen seien auf anziehende und abstossende Kräfte, deren Intensität nur von der Entfernung der auf einander wirkenden Punkte abhängt. Dass beide Sätze identisch sind, ist im Anfange der Abhandlung selbst gezeigt worden. Indessen haben dieselben noch eine wesentlichere Bedeutung für den letzten
2 und eigentlichen Zweck der physikalischen Naturwissenschaften überhaupt, welchen ich in dieser abgesonderten Einleitung darzulegen versuchen werde.

Aufgabe der genannten Wissenschaften ist es einmal die Gesetze zu suchen, durch welche die einzelnen Vorgänge in der Natur auf allgemeine Regeln zurückgeleitet und aus den letzteren wieder bestimmt werden können. Diese Regeln, z. B. das Gesetz der Brechung oder Zurückwerfung des Lichts, das von Mariotte und Gay Lussac für das Volum der Gasarten, sind offenbar nichts als allgemeine Gattungsbegriffe, durch welche sämmtliche dahin gehörige Erscheinungen umfasst werden. Die Aufsuchung derselben ist das Geschäft des experimentellen Theils unserer Wissenschaften. Der theoretische Theil derselben sucht dagegen, die unbekannten Ursachen der Vorgänge aus ihren sichtbaren Wirkungen zu finden; er sucht dieselben zu begreifen nach dem Gesetze der Causalität.[1] Wir werden genöthigt und berechtigt zu diesem Geschäfte durch den Grundsatz, dass jede Veränderung in der Natur eine zureichende Ursache haben müsse. Die nächsten Ursachen, welche wir den Naturerscheinungen unterlegen, können selbst unveränderlich sein oder veränderlich; im letzteren Falle nöthigt uns derselbe Grundsatz nach anderen Ursachen wiederum dieser Veränderung zu suchen, und so fort, bis wir zuletzt zu letzten Ursachen gekommen sind, welche nach einem unveränderlichen Gesetz wirken, welche folglich zu jeder Zeit unter denselben äusseren Verhältnissen dieselbe Wirkung hervorbringen. Das endliche Ziel der theoretischen Naturwissenschaften ist also, die letzten unveränderlichen Ursachen der Vorgänge in der Natur aufzufinden. Ob nun wirklich alle Vorgänge auf solche
zurückzuführen seien, ob also die Natur vollständig begreiflich 3
sein müsse, oder ob es Veränderungen in ihr gebe, die sich dem Gesetze einer nothwendigen Causalität entziehen, die also in das Gebiet einer Spontaneität, Freiheit, fallen, ist hier nicht der Ort zu entscheiden; jedenfalls ist es klar, dass die Wissenschaft, deren Zweck es ist, die Natur zu begreifen, von der Voraussetzung ihrer Begreiflichkeit ausgehen müsse, und dieser Voraussetzung gemäss schliessen und untersuchen, bis sie vielleicht durch unwiderlegliche Facta zur Anerkenntniss ihrer Schranken genöthigt sein sollte.

---

1) Siehe Zusatz 1.

Die Wissenschaft betrachtet die Gegenstände der Aussenwelt nach zweierlei Abstractionen: einmal ihrem blossen Dasein nach, abgesehen von ihren Wirkungen auf andere Gegenstände oder unsere Sinnesorgane; als solche bezeichnet sie dieselben als *Materie*. Das Dasein der Materie an sich ist uns also ein ruhiges, wirkungsloses; wir unterscheiden an ihr die räumliche Vertheilung und die Quantität (Masse), welche als ewig unveränderlich gesetzt wird. Qualitative Unterschiede dürfen wir der Materie an sich nicht zuschreiben, denn wenn wir von verschiedenartigen Materien sprechen, so setzen wir ihre Verschiedenheit immer nur in die Verschiedenheit ihrer Wirkungen d. h. in ihre Kräfte. Die Materie an sich kann deshalb auch keine andere Veränderung eingehen, als eine räumliche, d. h. Bewegung. Die Gegenstände der Natur sind aber nicht wirkungslos, ja wir kommen überhaupt zu ihrer Kenntniss nur durch die Wirkungen, welche von ihnen aus auf unsere Sinnesorgane erfolgen, indem wir aus diesen Wirkungen auf ein Wirkendes schliessen. Wenn wir also den Begriff der Materie in der Wirklichkeit anwenden wollen, so dürfen wir dies nur, indem wir durch eine zweite Abstraction demselben wiederum
4 hinzufügen, wovon wir vorher abstrahiren wollten, nämlich das Vermögen Wirkungen auszuüben, d. h. indem wir derselben Kräfte zuertheilen. Es ist einleuchtend, dass die Begriffe von Materie und Kraft in der Anwendung auf die Natur nie getrennt werden dürfen. Eine reine Materie wäre für die übrige Natur gleichgültig, weil sie nie eine Veränderung in dieser oder in unseren Sinnesorganen bedingen könnte; eine reine Kraft wäre etwas, was dasein sollte und doch wieder nicht dasein, weil wir das Daseiende Materie nennen. Ebenso fehlerhaft ist es, die Materie für etwas Wirkliches, die Kraft für einen blossen Begriff erklären zu wollen, dem nichts Wirkliches entspräche; beides sind vielmehr Abstractionen von dem Wirklichen, in ganz gleicher Art gebildet; wir können ja die Materie eben nur durch ihre Kräfte, nie an sich selbst, wahrnehmen.

Wir haben oben gesehen, dass die Naturerscheinungen auf unveränderliche letzte Ursachen zurückgeführt werden sollen; diese Forderung gestaltet sich nun so, dass als letzte Ursachen der Zeit nach unveränderliche Kräfte gefunden werden sollen.

Materien mit unveränderlichen Kräften (unvertilgbaren Qualitäten) haben wir in der Wissenschaft (chemische) Elemente genannt. Denken wir uns aber das Weltall zerlegt in Elemente mit unveränderlichen Qualitäten, so sind die einzigen noch möglichen Aenderungen in einem solchen System räumliche, d. h. Bewegungen, und die äusseren Verhältnisse, durch welche die Wirkung der Kräfte modificirt wird, können nur noch räumliche sein, also die Kräfte nur Bewegungskräfte, abhängig in ihrer Wirkung nur von den räumlichen Verhältnissen.

Also näher bestimmt: Die Naturerscheinungen sollen zurückgeführt werden auf Bewegungen von Materien mit unver- 5
änderlichen Bewegungskräften, welche nur von den räumlichen Verhältnissen abhängig sind.

Bewegung ist Aenderung der räumlichen Verhältnisse. Räumliche Verhältnisse sind nur möglich gegen abgegrenzte Raumgrössen, nicht gegen den unterschiedslosen leeren Raum. Bewegung kann deshalb in der Erfahrung nur vorkommen als Aenderung der räumlichen Verhältnisse wenigstens zweier materieller Körper gegen einander; Bewegungskraft, als ihre Ursache, also auch immer nur erschlossen werden für das Verhältniss mindestens zweier Körper gegen einander, sie ist also zu definiren als das Bestreben zweier Massen, ihre gegenseitige Lage zu wechseln. Die Kraft aber, welche zwei ganze Massen gegen einander ausüben, muss aufgelöst werden in die Kräfte aller ihrer Theile gegen einander; die Mechanik geht deshalb zurück auf die Kräfte der materiellen Punkte, d. h. der Punkte des mit Materie gefüllten Raumes.[1]) Punkte haben aber keine räumliche Beziehung gegen einander als ihre Entfernung, denn die Richtung ihrer Verbindungslinie kann nur im Verhältniss gegen mindestens noch zwei andere Punkte bestimmt werden. Eine Bewegungskraft, welche sie gegen einander ausüben, kann deshalb auch nur Ursache zur Aenderung ihrer Entfernung sein, d. h. eine anziehende oder abstossende. Dies folgt auch sogleich aus dem Satze vom zureichenden Grunde. Die Kräfte, welche zwei Massen auf einander ausüben, müssen nothwendig ihrer Grösse und Richtung nach bestimmt sein,

1) Siehe Zusatz 2.

sobald die Lage der Massen vollständig gegeben ist. Durch zwei Punkte ist aber nur eine einzige Richtung vollständig gegeben, nämlich die ihrer Verbindungslinie; folglich müssen die Kräfte, welche sie gegen einander ausüben, nach dieser Linie gerichtet sein, und ihre Intensität kann nur von der Entfernung abhängen.

6 Es bestimmt sich also endlich die Aufgabe der physikalischen Naturwissenschaften dahin, die Naturerscheinungen zurückzuführen auf unveränderliche, anziehende und abstossende Kräfte, deren Intensität von der Entfernung abhängt. Die Lösbarkeit dieser Aufgabe ist zugleich die Bedingung der vollständigen Begreiflichkeit der Natur. Die rechnende Mechanik hat bis jetzt diese Beschränkung für den Begriff der Bewegungskraft nicht angenommen, einmal weil sie sich über den Ursprung ihrer Grundsätze nicht klar war, und dann, weil es ihr darauf ankommt, auch den Erfolg zusammengesetzter Bewegungskräfte berechnen zu können in solchen Fällen, wo die Auflösung derselben in einfache noch nicht gelungen ist. Doch gilt ein grosser Theil ihrer allgemeinen Principien der Bewegung zusammengesetzter Systeme von Massen nur für den Fall[1]), dass dieselben durch unveränderliche anziehende oder abstossende Kräfte auf einander wirken; nämlich das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, das von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes, von der Erhaltung der Hauptrotationsebene und des Moments der Rotation freier Systeme, das von der Erhaltung der lebendigen Kraft. Für irdische Verhältnisse finden von diesen Principien hauptsächlich nur das erste und letzte Anwendung, weil sich die anderen nur auf vollkommen freie Systeme beziehen, das erste ist wieder, wie wir zeigen werden, ein specieller Fall des letzteren, welches deshalb als die allgemeinste und wichtigste Folgerung der gegemachten Herleitung erscheint.

Die theoretische Naturwissenschaft wird daher, wenn sie nicht auf halbem Wege des Begreifens stehen bleiben will, ihre Ansichten mit der aufgestellten Forderung über die Natur
7 der einfachen Kräfte und deren Folgerungen in Einklang setzen

---

1) Besser: „ist zu beweisen nur für den Fall" (1881).

müssen. Ihr Geschäft wird vollendet sein, wenn einmal die Zurückleitung der Erscheinungen auf einfache Kräfte vollendet ist, und zugleich nachgewiesen werden kann, dass die gegebene die einzig mögliche Zurückleitung sei, welche die Erscheinungen zulassen. Dann wäre dieselbe als die nothwendige Begriffsform der Naturauffassung erwiesen; es würde derselben alsdann also auch objective Wahrheit zuzuschreiben sein.

I. Das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft.

Wir gehen aus von der Annahme, dass es unmöglich sei durch irgend eine Combination von Naturkörpern bewegende Kraft fortdauernd aus nichts zu erschaffen. Aus diesem Satze haben schon Carnot und Clapeyron[1]) eine Reihe theils bekannter, theils noch nicht experimentell nachgewiesener Gesetze über die specifische und latente Wärme der verschiedensten Naturkörper theoretisch hergeleitet. Zweck der vorliegenden Abhandlung ist es ganz in derselben Weise das genannte Princip in allen Zweigen der Physik durchzuführen, theils um die Anwendbarkeit desselben nachzuweisen in allen denjenigen Fällen, wo die Gesetze der Erscheinungen schon hinreichend erforscht sind, theils um mit seiner Hülfe, unterstützt durch die vielfältige Analogie der bekannteren Fälle auf die Gesetze der bisher nicht vollständig untersuchten weiterzuschliessen, und da- 8
durch dem Experiment einen Leitfaden an die Hand zu geben.

Das erwähnte Princip kann folgendermassen dargestellt werden: Denken wir uns ein System von Naturkörpern, welche in gewissen räumlichen Verhältnissen zu einander stehen, und unter dem Einflusse ihrer gegenseitigen Kräfte in Bewegung gerathen, bis sie in bestimmte andere Lagen gekommen sind: so können wir ihre gewonnenen Geschwindigkeiten als eine gewisse mechanische Arbeit betrachten und in solche verwandeln. Wollen wir nun dieselben Kräfte zum zweiten Male wirksam werden lassen, um dieselbe Arbeit noch einmal zu gewinnen, so müssen wir die Körper auf irgend eine Weise in die an-

1) Poggendorff's Annalen LIX 446. 566.

fänglichen Bedingungen durch Anwendung anderer uns zu Gebote stehender Kräfte zurückversetzen; wir werden dazu also eine gewisse Arbeitsgrösse der letzteren wieder verbrauchen. In diesem Falle fordert nun unser Princip, dass die Arbeitsgrösse, welche gewonnen wird, wenn die Körper des Systems aus der Anfangslage in die zweite, und verloren wird, wenn sie aus der zweiten in die erste übergehen, stets dieselbe sei, welches auch die Art, der Weg oder die Geschwindigkeit dieses Uebergangs sein mögen. Denn wäre dieselbe auf irgend einem Wege grösser als auf dem anderen, so würden wir den ersteren zur Gewinnung der Arbeit benutzen können, den zweiten zur Zurückführung, zu welcher wir einen Theil der so eben gewonnenen Arbeit anwenden könnten, und würden so ins Unbestimmte mechanische Kraft gewinnen, ein perpetuum mobile gebaut haben, welches nicht nur sich selbst in Bewegung erhielte, sondern auch noch im Stande wäre nach aussen Kraft abzugeben.

Suchen wir nach dem mathematischen Ausdrucke dieses
9 Princips, so finden wir ihn in dem bekannten Gesetze von der Erhaltung der lebendigen Kraft. Die Arbeitsgrösse, welche gewonnen und verbraucht wird, kann bekanntlich ausgedrückt werden als ein auf eine bestimmte Höhe h gehobenes Gewicht m; sie ist dann mgh, wo g die Intensität der Schwerkraft. Um senkrecht frei in die Höhe h emporzusteigen braucht der Körper m die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$; und erlangt dieselbe wieder beim Herabfallen. Es ist also $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$; folglich kann die Hälfte des Produktes mv^2, welches in der Mechanik bekanntlich „die Quantität der lebendigen Kraft des Körpers m“ genannt wird, auch an die Stelle des Maasses der Arbeitsgrösse gesetzt werden. Der besseren Uebereinstimmung wegen mit der jetzt gebräuchlichen Art die Intensität der Kräfte zu messen, schlage ich vor, gleich die Grösse $\frac{1}{2}mv^2$ als Quantität der lebendigen Kraft zu bezeichnen, wodurch sie identisch wird mit dem Maasse der Arbeitsgrösse. Für die bisherige Anwendung des Begriffes der lebendigen Kraft, der nur auf das besprochene Princip beschränkt war, ist diese Abänderung ohne Bedeutung, während sie uns im Folgenden wesentliche Vortheile gewähren wird. Das Princip von der Erhaltung der

lebendigen Kraft sagt nun bekanntlich aus: Wenn sich eine beliebige Zahl beweglicher Massenpunkte nur unter dem Einflusse solcher Kräfte bewegt, welche sie selbst gegen einander ausüben, oder welche gegen feste Centren gerichtet sind: so ist die Summe der lebendigen Kräfte aller zusammen genommen zu allen Zeitpunkten dieselbe, in welchen alle Punkte dieselben relativen Lagen gegen einander und gegen die etwa vorhandenen festen Centren einnehmen, wie auch ihre Bahnen und Geschwindigkeiten in der Zwischenzeit gewesen sein mögen. Denken wir die lebendigen Kräfte angewendet, um die Theile des Systems oder ihnen äquivalente Massen auf gewisse Höhen zu heben, so folgt aus dem, was wir eben gezeigt haben, dass auch die so dargestellten Arbeitsgrössen unter den genannten Bedingungen gleich sein müssen. Dieses Princip gilt aber nicht für alle möglichen Arten von Kräften; es wird in der Mechanik gewöhnlich angeknüpft an das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, und dies kann nur für materielle Punkte mit anziehenden und abstossenden Kräften bewiesen werden. Wir wollen hier zunächst zeigen, dass das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte ganz allein da gilt, wo die wirkenden Kräfte[1]) sich auflösen lassen in Kräfte materieller Punkte, welche in der Richtung der Verbindungslinie wirken, und deren Intensität nur von der Entfernung abhängt; in der Mechanik sind solche Kräfte gewöhnlich Centralkräfte genannt worden. Es folgt daraus wiederum auch rückwärts, dass bei allen Wirkungen von Naturkörpern aufeinander, wo das besprochene Princip ganz allgemein auch auf alle kleinsten Theilchen dieser Körper angewendet werden kann, als einfachste Grundkräfte solche Centralkräfte anzunehmen seien.

Betrachten wir zunächst einen materiellen Punkt von der Masse m, der sich bewegt unter dem Einfluss der Kräfte von mehreren zu einem festen System A verbundenen Körpern, so zeigt uns die Mechanik die Mittel an für jeden einzelnen Zeitpunkt die Lage und Geschwindigkeit dieses Punktes bestimmen zu können. Wir würden also die Zeit t als die Urvariable betrachten, und von ihr abhängen lassen die Ordinaten x, y, z

1) D. h. „ihre Auflösbarkeit in Punktkräfte vorausgesetzt" (1881).

von m in Beziehung auf ein gegen das System A festbestimmtes Coordinatensystem, seine Tangentialgeschwindigkeit q, die den
11 Axen parallelen Componenten derselben $u = dx/dt$, $v = dy/dt$, $w = dz/dt$, und endlich die Componenten der wirkenden Kräfte:

$$X = m\frac{du}{dt}, \qquad Y = m\frac{dv}{dt}, \qquad Z = m\frac{dw}{dt}.$$

Unser Princip fordert nun, dass $\frac{1}{2}mq^2$, also auch q^2, stets dasselbe sei, wenn m dieselbe Lage gegen A hat, also nicht allein als Function der Urvariablen t, sondern auch als blosse Function der Coordinaten x, y, z hingestellt werden könne, d. h. dass:

$$d(q^2) = \frac{d(q^2)}{dx}dx + \frac{d(q^2)}{dy}dy + \frac{d(q^2)}{dz}dz. \tag{1}$$

Da $q^2 = u^2 + v^2 + w^2$, so ist $d(q^2) = 2u\,du + 2v\,dv + 2w\,dw$. Wird statt u hier dx/dt, statt du aber Xdt/m aus den oben hingestellten Werthen gesetzt, eben so für v und w die analogen Werthe, so erhalten wir:

$$d(q^2) = \frac{2X}{m}dx + \frac{2Y}{m}dy + \frac{2Z}{m}dz. \tag{2}$$

Da die Gleichungen 1 und 2 für jedes beliebige dx, dy, dz zusammen stattfinden müssen, so folgt, dass auch einzeln:

$$\frac{d(q^2)}{dx} = \frac{2X}{m}, \qquad \frac{dq^2}{dy} = \frac{2Y}{m} \text{ und } \frac{dq^2}{dz} = \frac{2Z}{m}.$$ [1])

Ist aber q^2 blosse Function von x, y, z, so folgt hieraus, dass auch X, Y und Z, d. h. Richtung und Grösse der wirkenden Kraft nur Functionen der Lage von m gegen A seien.

Denken wir uns nun auch statt des Systems A einen ein-
12 zelnen materiellen Punkt a, so folgt aus dem oben bewiesenen, dass die Richtung und Grösse der Kraft, welche von a auf m einwirke, nur bestimmt werde durch die relative Lage von m gegen a. Da nun die Lage von m durch seine Beziehung zu dem einzelnen Punkt a nur noch der Entfernung ma nach bestimmt ist, so würde in diesem Falle das Gesetz dahin zu modificiren sein, dass Richtung und Grösse der Kraft Functionen dieser Entfernung r sein müssen. Denken wir uns die Coor-

1) Dieser Schluss erfordert eine Beschränkung (1881). S. Zusatz 3.

dinaten auf irgend ein beliebiges Axensystem bezogen, dessen Anfangspunkt in a liegt, so muss hiernach:

$$md(q^2) = 2Xdx + 2Ydy + 2Zdz = 0 \qquad (3)$$

sein, so oft:

$$d(r^2) = 2xdx + 2ydy + 2zdz = 0$$

ist, d. h. so oft:

$$dz = -\frac{xdx + ydy}{z}.$$

Dieser Werth in Gleichung 3 gesetzt, giebt:

$$\left(X - \frac{x}{z}Z\right)dx + \left(Y - \frac{y}{z}Z\right)dy = 0$$

für jedes beliebige dx und dy, also auch einzeln:

$$X = \frac{x}{z}Z \text{ und } Y = \frac{y}{z}Z,$$

d. h. die Resultante muss nach dem Anfangspunkte der Coordinaten, nach dem wirkenden Punkte a, gerichtet sein.

Es müssen folglich in Systemen, welche ganz allgemein dem Gesetz von der Erhaltung der lebendigen Kraft[1]) Folge leisten, die einfachen Kräfte der materiellen Punkte Centralkräfte sein.

II. Das Princip von der Erhaltung der Kraft. 13

Wir wollen dem besprochenen Gesetze für die Fälle, wo Centralkräfte wirken, nun noch einen allgemeineren Ausdruck geben.

Ist φ die Intensität der Kraft, welche in der Richtung von r wirkt, wenn sie anzieht, als positiv, wenn sie abstösst, als negativ gesetzt, also:

$$X = -\frac{x}{r}\varphi; \quad Y = -\frac{y}{r}\varphi; \quad Z = -\frac{z}{r}\varphi \qquad (1)$$

so ist gemäss der Gleichung 2 des vorigen Abschnittes:

$$md(q^2) = -2\frac{\varphi}{r}(xdx + ydy + zdz); \qquad \text{also:}$$

$$\tfrac{1}{2}md(q^2) = -\varphi\, dr.$$

1) Und der Gleichheit der Action und Reaction (1881).

Oder wenn Q und R, q und r zusammengehörige Tangentialgeschwindigkeiten und Entfernungen vorstellen:

$$\tfrac{1}{2} mQ^2 - \tfrac{1}{2} mq^2 = -\int_r^R \varphi\, dr. \tag{2}$$

Betrachten wir diese Gleichung näher, so finden wir auf der linken Seite den Unterschied der lebendigen Kräfte, welche m bei zwei verschiedenen Entfernungen hat. Um die Bedeutung der Grösse $\int_r^R \varphi\, dr$ zu finden, denken wir uns die Intensitäten von φ, welche zu verschiedenen Punkten der Verbindungslinie von m und a gehören, durch rechtwinkelig aufgesetzte Ordinaten dargestellt: so würde die genannte Grösse den Flächeninhalt
14 bezeichnen, den die Curve zwischen den zu R und r gehörigen Ordinaten mit der Abscissenaxe einschliesst. Wie man sich nun diesen Flächenraum als die Summe aller der unendlich vielen in ihm liegenden Abscissen vorstellen kann, so ist jene Grösse der Inbegriff aller Kraftintensitäten, welche in den zwischen R und r liegenden Entfernungen wirken. Nennen wir nun die Kräfte, welche den Punkt m zu bewegen streben, so lange sie eben noch nicht Bewegung bewirkt haben, Spannkräfte, im Gegensatz zu dem, was die Mechanik lebendige Kraft nennt, so würden wir die Grösse $\int_r^R \varphi\, dr$ als die Summe der Spannkräfte zwischen den Entfernungen R und r bezeichnen können, und das obige Gesetz würde auszusprechen sein: Die Zunahme der lebendigen Kraft eines Massenpunktes bei seiner Bewegung unter dem Einfluss einer Centralkraft ist gleich der Summe der zu der betreffenden Aenderung seiner Entfernung gehörigen Spannkräfte.

Denken wir uns zwei Punkte unter der Wirkung einer anziehenden Kraft stehend in einer bestimmten Entfernung R, so werden sie durch Wirkung der Kraft selbst nach den kleineren Entfernungen r hingetrieben, und dabei wird ihre Geschwindigkeit, ihre lebendige Kraft, zunehmen; sollen sie aber nach grösseren Entfernungen r gelangen, so muss ihre lebendige Kraft abnehmen und endlich ganz verbraucht wer-

den; wir können deshalb bei anziehenden Kräften die Summe der Spannkräfte für die Entfernungen zwischen $r = 0$ und $r = R$ $\int_0^R \varphi\, dr$, als die noch vorhandenen, die aber zwischen $r = R$, und $r = \infty$ als die verbrauchten bezeichnen; die ersteren können unmittelbar, die letzteren erst nach einem 15
äquivalenten Verlust an lebendiger Kraft in Wirsamkeit treten. Umgekehrt ist es bei abstossenden Kräften. Befinden sich die Punkte in der Entfernung R, so werden sie bei ihrer Entfernung lebendige Kraft gewinnen, und als die vorhandenen Spannkräfte werden die zu bezeichnen sein zwischen $r = R$ und $r = \infty$, als die verlorenen, die zwischen $r = 0$ und $r = R$.

Um nun unser Gesetz ganz allgemein durchzuführen, denken wir uns eine beliebige Anzahl materieller Punkte von den Massen m_1, m_2, m_3 u. s. w. allgemein bezeichnet mit $m_\mathfrak{a}$, deren Coordinaten $x_\mathfrak{a}$, $y_\mathfrak{a}$, $z_\mathfrak{a}$; die den Axen parallelen Componenten der darauf wirkenden Kräfte seien $X_\mathfrak{a}$, $Y_\mathfrak{a}$, $Z_\mathfrak{a}$, die nach den Axen zerlegten Geschwindigkeiten $u_\mathfrak{a}$, $v_\mathfrak{a}$, $w_\mathfrak{a}$, die Tangentialgeschwindigkeiten $q_\mathfrak{a}$; die Entfernung zwischen $m_\mathfrak{a}$ und $m_\mathfrak{b}$ sei $r_{\mathfrak{ab}}$, die Centralkraft zwischen beiden $\varphi_{\mathfrak{ab}}$. Es ist nun für einen einzelnen Punkt m_n analog der Gleichung 1.

$$X_n = \Sigma \left[(x_\mathfrak{a} - x_n) \frac{\varphi_{\mathfrak{a}n}}{r_{\mathfrak{a}n}} \right] = m_n \frac{du_n}{dt}$$

$$Y_n = \Sigma \left[(y_\mathfrak{a} - y_n) \frac{\varphi_{\mathfrak{a}n}}{r_{\mathfrak{a}n}} \right] = m_n \frac{dv_n}{dt}$$

$$Z_n = \Sigma \left[(z_\mathfrak{a} - z_n) \frac{\varphi_{\mathfrak{a}n}}{r_{\mathfrak{a}n}} \right] = m_n \frac{dw_n}{dt}$$

wo das Summationszeichen Σ sich auf alle die Glieder bezieht, welche entstehen, wenn man nach einander für den Index $\mathfrak{a}$ alle einzelnen Indices 1, 2, 3 etc. mit Ausnahme von n setzt.

Multipliciren wir die erste Gleichung mit $dx_n = u_n dt$, die zweite mit $dy_n = v_n dt$, die dritte mit $dz_n = w_n dt$, und denken wir uns die drei dann entstehenden Gleichungen für alle ein- 16
zelnen Punkte $m_\mathfrak{b}$ aufgestellt, wie es hier für m_n geschehen ist, und alle addirt, so erhalten wir:

$$\Sigma\left[(x_\mathfrak{a} - x_\mathfrak{b})\, dx_\mathfrak{b}\, \frac{\varphi_{\mathfrak{ab}}}{r_{\mathfrak{ab}}}\right] = \Sigma\left[\tfrac{1}{2} m_\mathfrak{a}\, d\,(u_\mathfrak{a}^2)\right]$$

$$\Sigma\left[(y_\mathfrak{a} - y_\mathfrak{b})\, dy_\mathfrak{b}\, \frac{\varphi_{\mathfrak{ab}}}{r_{\mathfrak{ab}}}\right] = \Sigma\left[\tfrac{1}{2} m_\mathfrak{a}\, d\,(v_\mathfrak{a}^2)\right]$$

$$\Sigma\left[(z_\mathfrak{a} - z_\mathfrak{b})\, dz_\mathfrak{b}\, \frac{\varphi_{\mathfrak{ab}}}{r_{\mathfrak{ab}}}\right] = \Sigma\left[\tfrac{1}{2} m_\mathfrak{a}\, d\,(w_\mathfrak{a}^2)\right].$$

Die Glieder der Reihe links werden erhalten, wenn man erst statt $\mathfrak{a}$ alle einzelnen Indices 1, 2, 3 u. s. w. setzt, und bei jedem einzelnen auch für $\mathfrak{b}$ alle grösseren und alle kleineren Werthe, als $\mathfrak{a}$ schon hat. Die Summen zerfallen also in zwei Theile, in deren einem $\mathfrak{a}$ stets grösser ist als $\mathfrak{b}$, im andern stets kleiner, und es ist klar, dass für jedes Glied des einen Theils:

$$(x_p - x_q)\, dx_q\, \frac{\varphi_{pq}}{r_{pq}}$$

in dem anderen eines vorkommen muss:

$$(x_q - x_p)\, dx_p\, \frac{\varphi_{pq}}{r_{pq}}$$

beide addirt geben:

$$-(x_p - x_q)(dx_p - dx_q)\, \frac{\varphi_{pq}}{r_{pq}}.$$

Machen wir diese Zusammenziehung in den Summen, addiren sie alle drei und setzen:

$$\tfrac{1}{2} d\left[(x_\mathfrak{a} - x_\mathfrak{b})^2 + (y_\mathfrak{a} - y_\mathfrak{b})^2 + (z_\mathfrak{a} - z_\mathfrak{b})^2\right] = r_{\mathfrak{ab}}\, dr_{\mathfrak{ab}},$$

so erhalten wir:

$$-\Sigma\left[\varphi_{\mathfrak{ab}}\, dr_{\mathfrak{ab}}\right] = \Sigma\left[\tfrac{1}{2} m_\mathfrak{a}\, d\,(q_\mathfrak{a}^2)\right] \qquad (3)$$

oder:

17 $$-\Sigma\left[\int_{r_{\mathfrak{ab}}}^{R_{\mathfrak{ab}}} \varphi_{\mathfrak{ab}}\, dr_{\mathfrak{ab}}\right] = \Sigma\left[\tfrac{1}{2} m_\mathfrak{a}\, Q_\mathfrak{a}^2\right] - \Sigma\left[\tfrac{1}{2} m_\mathfrak{a}\, q_\mathfrak{a}^2\right] \qquad (4)$$

wenn R und Q sowie r und q zusammengehörige Werthe bezeichnen.

Wir haben hier links wieder die Summe der verbrauchten Spannkräfte, rechts die der lebendigen Kräfte des ganzen Systems, und wir können das Gesetz jetzt so aussprechen: In

allen Fällen der Bewegung freier materieller Punkte unter dem Einfluss ihrer anziehenden und abstossenden Kräfte, deren Intensitäten nur von der Entfernung abhängig sind, ist der Verlust an Quantität der Spannkraft stets gleich dem Gewinn an lebendiger Kraft, und der Gewinn der ersteren dem Verlust der letzteren. Es ist also stets die Summe der vorhandenen lebendigen und Spannkräfte constant. In dieser allgemeinsten Form können wir unser Gesetz als das Princip von der Erhaltung der Kraft bezeichnen.

In der gegebenen Ableitung des Gesetzes ändert sich nichts, wenn ein Theil der Punkte, welche wir mit dem durchlaufenden Buchstaben $\mathfrak{b}$ bezeichnen wollen, fest gedacht wird, so dass $q_{\mathfrak{b}}$ constant $= 0$; es ist dann die Form des Gesetzes:

$$\Sigma[\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\, dr_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}] + \Sigma[\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\, dr_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}] = -\Sigma[\tfrac{1}{2} m_{\mathfrak{b}} d(q_{\mathfrak{b}}^2)]. \qquad (5)$$

Es bleibt noch übrig zu bemerken, in welchem Verhältniss das Princip von der Erhaltung der Kraft zu dem allgemeinsten Gesetze der Statik, dem sogenannten Princip der virtuellen Geschwindigkeiten steht. Dieses folgt nämlich unmittelbar aus unseren Gleichungen 3 und 5. Soll Gleichgewicht stattfinden bei einer bestimmten Lagerung der Punkte $m_{\mathfrak{a}}$, d. h. soll für den Fall, dass diese Punkte ruhen, also 18
$q_{\mathfrak{a}} = 0$, dieser Zustand der Ruhe auch bestehen bleiben, also alle $dq_{\mathfrak{a}} = 0$, so folgt aus der Gleichung 3:

$$\Sigma[\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\, dr_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}] = 0, \qquad (6)$$

oder wenn auch Kräfte von Punkten $m_{\mathfrak{b}}$ ausserhalb des Systems einwirken, aus Gleichung 5:

$$\Sigma[\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\, dr_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}] + \Sigma[\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\, dr_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}] = 0. \qquad (7)$$

In diesen Gleichungen sind unter dr Aenderungen der Entfernung zu verstehen, welche bei beliebigen, durch die anderweitigen Bedingungen des Systems zugelassenen, kleinen Verschiebungen der Punkte $m_{\mathfrak{a}}$ eintreten. Wir haben in den früheren Deduktionen gesehen, dass eine Vermehrung der lebendigen Kraft, also auch ein Uebergang aus Ruhe in Bewegung, nur durch einen Verbrauch von Spannkraft erzeugt werden kann; die letzten Gleichungen sagen dem entsprechend aus, dass unter solchen Bedingungen, wo durch keine einzige

der möglichen Bewegungsrichtungen in dem ersten Augenblicke Spannkraft verbraucht wird, das System, wenn es einmal in Ruhe ist, auch in Ruhe bleiben muss.

Dass aus den hingestellten Gleichungen sämmtliche Gesetze der Statik hergeleitet werden können, ist bekannt. Die für die Natur der wirkenden Kräfte wichtigste Folgerung ist diese: Denken wir uns statt der beliebigen kleinen Verschiebungen der Punkte m solche gesetzt, wie sie stattfinden könnten, wenn das System in sich fest verbunden wäre, so dass in Gleichung 7 alle $dr_{ab} = 0$, so folgt einzeln:

$$\Sigma[\varphi_{ab}\, dr_{ab}] = 0 \qquad \text{und}$$
$$\Sigma[\varphi_{ab}\, dr_{ab}] = 0.$$

Dann müssen also sowohl die äusseren, wie die inneren Kräfte für sich der Gleichgewichtsbedingung genügen. Wird demnach
19 ein beliebiges System von Naturkörpern durch äussere Kräfte in eine bestimmte Gleichgewichtslage gebracht, so wird das Gleichgewicht nicht aufgehoben, 1) wenn wir die einzelnen Punkte des Systems in ihrer jetzigen Lage unter sich fest verbunden denken, und 2) wenn wir dann die Kräfte wegnehmen, welche dieselben gegen einander ausüben. Daraus folgt nun aber weiter: Werden die Kräfte, welche zwei Massenpunkte aufeinander ausüben, durch zwei an dieselben angebrachte äussere Kräfte in Gleichgewicht gesetzt, so müssen sich diese auch das Gleichgewicht halten, wenn statt der Kräfte der Punkte gegeneinander eine feste Verbindung derselben substituirt wird. Kräfte, welche zwei Punkte einer festen geraden Linie angreifen, halten sich aber nur im Gleichgewicht, wenn sie in dieser Linie selbst liegen, gleich und entgegengesetzt gerichtet sind. Es folgt also auch für die Kräfte der Punkte selbst, welche den äusseren gleich und entgegengesetzt sind, dass dieselben in der Richtung der verbindenden Linie liegen, also anziehende oder abstossende sein müssen.

Wir können die aufgestellten Sätze folgendermaassen zusammenfassen:

1) So oft Naturkörper vermöge anziehender oder abstossender Kräfte, welche von der Zeit und Geschwindigkeit

unabhängig sind, auf einander einwirken, muss die Summe ihrer lebendigen und Spannkräfte eine constante sein; das Maximum der zu gewinnenden Arbeitsgrösse also ein bestimmtes, endliches.

2) Kommen dagegen in den Naturkörpern auch Kräfte vor, welche von der Zeit und Geschwindigkeit abhängen, oder nach anderen Richtungen wirken als der Verbindungslinie je zweier wirksamer materieller Punkte, also z. B. rotirende, so würden Zusammenstellungen solcher Körper möglich sein, in 20
denen entweder in das Unendliche Kraft verloren geht, oder gewonnen wird.[1])

3) Beim Gleichgewicht eines Körpersystems unter der Wirkung von Centralkräften müssen sich die inneren und die äusseren Kräfte für sich im Gleichgewicht halten, sobald wir die Körper des Systems unter sich unverrückbar verbunden denken, und nur das ganze System gegen ausser ihm liegende Körper beweglich. Ein festes System solcher Körper wird deshalb nie durch die Wirkung seiner inneren Kräfte in Bewegung gesetzt werden können, sondern nur durch Einwirkung äusserer Kräfte. Gäbe es dagegen andere als Centralkräfte, so würden sich feste Verbindungen von Naturkörpern herstellen lassen, welche sich von selbst bewegten, ohne einer Beziehung zu anderen Körpern zu bedürfen.

III. Die Anwendung des Princips in den mechanischen Theoremen.

Wir gehen jetzt zu den speciellen Anwendungen des Gesetzes von der Constanz der Kraft über. Zuerst haben wir diejenigen Fälle kurz zu erwähnen, in denen das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft bisher schon benutzt und anerkannt ist.

1) Alle Bewegungen, welche unter dem Einflusse der allgemeinen Gravitationskraft vor sich gehen, also die der himmlischen und der schweren irdischen Körper. Bei jenen spricht sich das Gesetz aus in der Zunahme ihrer

---

1) S. Zusatz 4.

Geschwindigkeit, sobald sie sich in ihrer Bahn dem Central-
21 körper nähern, in der Unveränderlichkeit ihrer grossen Bahnaxen, ihrer Umlaufs- und Rotationszeit; bei diesen in dem bekannten Gesetze, dass die Endgeschwindigkeit des Falles nur von der Fallhöhe, nicht von der Richtung und Form der durchlaufenen Bahn abhängt, und das diese Geschwindigkeit, wenn sie nicht durch Reibung oder unelastischen Stoss vernichtet wird, gerade hinreicht, die gefallenen Körper wieder zu derselben Höhe emporzutreiben, aus der sie herabgefallen sind. Dass die Fallhöhe eines bestimmten Gewichtes als Maass der Arbeitsgrössen unserer Maschinen benutzt wird, ist schon erwähnt worden.

2) Die Uebertragung der Bewegungen durch die incompressibeln festen und flüssigen Körper, sobald nicht Reibung oder Stoss unelastischer Stoffe stattfindet. Unser allgemeines Princip wird für diese Fälle gewöhnlich als die Regel ausgesprochen, dass eine durch mechanische Potenzen fortgepflanzte und abgeänderte Bewegung stets in demselben Verhältniss an Kraftintensität abnimmt, als sie an Geschwindigkeit zunimmt. Denken wir uns also durch eine Maschine, in welcher durch irgend einen Vorgang gleichmässig Arbeitskraft erzeugt wird, das Gewicht m mit der Geschwindigkeit c gehoben, so wird durch eine andere mechanische Einrichtung das Gewicht nm gehoben werden können, aber nur mit der Geschwindigkeit c/n, so dass in beiden Fällen die Quantität der von der Maschine in der Zeiteinheit erzeugten Spannkraft durch mgc darzustellen ist, wo g die Intensität der Schwerkraft darstellt.

3) Die Bewegungen vollkommen elastischer fester und flüssiger Körper. Als Bedingung der voll-
22 kommenen Elasticität müssen wir nur der gewöhnlich hingestellten, dass der in seiner Form oder seinem Volumen veränderte Körper dieselben vollständig wiedererlange, auch noch hinzufügen, dass in seinem Innern keine Reibung der Theilchen stattfinde. Bei den Gesetzen dieser Bewegungen ist unser Princip am frühesten erkannt, und am häufigsten benutzt worden. Als die gewöhnlichsten Fälle der Anwendung bei den festen Körpern sind zu erwähnen der elastische Stoss, dessen

Gesetze sich leicht aus unserem Princip und dem von der Erhaltung des Schwerpunktes herleiten lassen, und die mannigfaltigen elastischen Vibrationen, welche fortdauern auch ohne neuen Anstoss, bis sie durch die Reibung im Innern und die Abgabe der Bewegung an äussere Medien vernichtet sind. Bei den flüssigen Körpern, sowohl tropfbaren (offenbar auch elastisch, nur mit sehr hohem Elasticitätsmodulus und mit einer Gleichgewichtslage der Theilchen versehen) als auch gasigen (mit niedrigem Elasticitätsmodulus und ohne Gleichgewichtslage) setzen sich im Allgemeinen alle Bewegungen bei ihrer Ausbreitung in Wellenform um. Dazu gehören die Wellen der Oberfläche tropfbarer Flüssigkeiten, die Bewegung des Schalls, und wahrscheinlich die des Lichts und der strahlenden Wärme.

Die lebendige Kraft eines einzelnen Theilchens Δm in einem von einem Wellenzuge durchzogenen Medium ist offenbar zu bestimmen durch die Geschwindigkeit, welche dasselbe in der Gleichgewichtslage hat. Die allgemeine Wellengleichung bestimmt die Geschwindigkeit u bekanntlich, wenn a^2 die Intensität, λ die Wellenlänge, α die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, x die Abscisse und t die Zeit ist, folgendermaassen:

$$u = a \,.\, cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - \alpha t)\right].$$

Für die Gleichgewichtslage ist $u = a$, folglich die lebendige 23
Kraft des Theilchens Δm während der Wellenbewegung $\frac{1}{2}\Delta m a^2$, proportional der Intensität. Breiten sich Wellen von einem Centrum kugelförmig aus, so setzen sie immer grössere Massen in Bewegung, folglich muss die Intensität abnehmen, wenn die lebendige Kraft dieselbe bleiben soll. Da nun die von der Welle umfassten Massen zunehmen wie die Quadrate der Entfernung, so folgt das bekannte Gesetz, dass die Intensitäten im umgekehrten Verhältnisse abnehmen[1]).

---

1) Hier wäre zu erwähnen, dass bei fortschreitenden ebenen Wellen die Quantität der Spannkraft des comprimirten oder verschobenen elastischen Medium einen zweiten, eben so grossen Theil der Energie bildet, wie die lebendige Kraft (1881).

Die Gesetze der Zurückwerfung, Brechung und Polarisation des Lichtes an der Grenze zweier Medien von verschiedener Wellengeschwindigkeit sind bekanntlish schon von Fresnel hergeleitet worden aus der Annahme, dass die Bewegung der Grenztheilchen in beiden Mitteln dieselbe sei, und aus der Erhaltung der lebendigen Kraft. Bei der Interferenz zweier Wellenzüge findet keine Vernichtung der lebendigen Kraft statt, sondern nur eine andere Vertheilung. Zwei Wellenzüge von den Intensitäten a^2 und b^2, welche nicht interferiren, geben allen getroffenen Punkten die Intensität $a^2 + b^2$; interferiren sie, so haben die Maxima $(a + b)^2$, um $2ab$ grösser, die Minima $(a - b)^2$, um eben so viel kleiner als $a^2 + b^2$.

Vernichtet wird die lebendige Kraft der elastischen Wellen erst bei denjenigen Vorgängen, welche wir als Absorption derselben bezeichnen. Die Absorption der Schallwellen finden wir hauptsächlich durch das Gegenstossen gegen nachgiebige unelastische Körper, z. B. Vorhänge, Decken befördert, dürfen sie also wohl hauptsächlich für einen Uebergang der Bewegung an die getroffenen Körper und Vernichtung in diesen durch Reibung halten; ob die Bewegung auch durch Reibung der
24 Lufttheilchen gegen einander vernichtet werden könne, möchte noch nicht zu entscheiden sein.[1]) Die Absorption der Wärmestrahlen wird von einer proportionalen Wärmeentwickelung begleitet; in wiefern die letztere einem gewissen Kraftäquivalente entspreche, werden wir im nächsten Abschnitt behandeln. Die Erhaltung der Kraft würde stattfinden, wenn so viel Wärme, als in dem ausstrahlenden Körper verschwindet, in dem bestrahlten wiedererscheint, vorausgesetzt, dass keine Ableitung stattfinde, und kein Theil der Strahlung anderswohin gelangt. Das Theorem ist bei den Versuchen über Wärmestrahlung bisher wohl vorausgesetzt worden, doch sind mir keine Versuche zu seiner Begründung bekannt. Bei der Absorption der Lichtstrahlen durch die unvollkommen oder gar nicht durchsichtigen Körper kennen wir dreierlei Vorgänge. Zuerst nehmen die phosphorescirenden Körper das Licht in solcher Weise in sich auf, dass sie es nachher wieder als Licht ent-

---

1) Ist jetzt freilich nachgewiesen (1881).

lassen können. Zweitens scheinen die meisten, vielleicht alle Lichtstrahlen Wärme zu erregen. Der Annahme von der Identität der wärmenden, leuchtenden und chemischen Strahlen des Spectrum sind in der neueren Zeit die scheinbaren Hindernisse immer mehr aus dem Wege geräumt[1]), nur scheint das Wärmeäquivalent der chemischen und leuchtenden Strahlen ein höchst geringes zu sein im Vergleich zu ihrer intensiven Wirkung auf das Auge. Sollte sich die Gleichartigkeit dieser verschieden wirkenden Strahlungen aber nicht bestätigen, so würden wir allerdings das Ende der Lichtbewegung für ein unbekanntes erkären müssen. In vielen Fällen drittens erzeugt das absorbirte Licht chemische Wirkungen. In Bezug auf die Kraftverhältnisse werden hier zweierlei Arten solcher Wirkungen unterschieden werden müssen, einmal diejenigen, wo es nur den Anstoss zur Thätigkeit der chemischen Verwandtschaft giebt, ähnlich den katalytisch wirkenden Körpern, z. B. die Wirkung auf ein Gemenge von Chlor und Wasserstoff; und zweitens diejenigen, wo es den chemischen Verwandtschaften entgegenwirkt, z. B. bei der Zersetzung der Silbersalze, bei der Einwirkung auf grüne Pflanzentheile. Bei den meisten dieser Vorgänge sind aber die Resultate der Lichteinwirkung noch so wenig gekannt, dass wir über die Grösse der dabei auftretenden Kräfte noch gar nicht urtheilen können; bedeutend durch ihre Quantität und Intensität scheinen dieselben nur bei der Einwirkung auf die grünen Pflanzentheile zu sein.

IV. Das Kraftäquivalent der Wärme.

Diejenigen mechanischen Vorgänge, bei welchen man bisher einen absoluten Verlust von Kraft angenommen hat, sind:

1) Der Stoss unelastischer Körper. Derselbe ist meist mit einer Formveränderung und Verdichtung der gestossenen Körper verbunden, also mit Vermehrung der Spannkräfte; dann finden wir bei oft wiederholten Stössen der Art eine beträchtliche Wärmeentwickelung, z. B. beim Hämmern eines Metall-

1) S. Melloni in Pogg. Ann. Bd. LVII. S. 300. Brücke in Ann. Bd. LXV. 593.

stückes; endlich wird ein Theil der Bewegung als Schall an die anstossenden festen und luftförmigen Körper abgegeben.

26 2) Die Reibung, sowohl an den Oberflächen zweier sich über einander hinbewegender Körper, als im Innern derselben bei Formveränderungen, durch die Verschiebung der kleineren Theilchen aneinander hervorgebracht. Auch bei der Reibung finden meistens geringe Veränderungen in der moleculären Constitution der Körper, namentlich im Anfang ihres Aneinanderreibens, statt; späterhin pflegen sich die Oberflächen einander so zu accomodiren, dass diese Veränderungen bei fernerer Bewegung als verschwindend klein zu setzen sein möchten. In manchen Fällen fehlen dieselben wohl ganz, z. B. wenn Flüssigkeiten sich an festen Körpern oder unter einander reiben. Ausserdem finden aber stets auch thermische und electrische Aenderungen statt.

Man pflegt in der Mechanik die Reibung als eine Kraft darzustellen, welche der vorhandenen Bewegung entgegenwirkt, und deren Intensität eine Function der Geschwindigkeit ist. Offenbar ist diese Auffassung nur ein zum Behuf der Rechnungen gemachter, höchst unvollständiger Ausdruck des complicirten Vorganges, bei welchem die verschiedensten Molecularkräfte in Wechselwirkung treten. Aus jener Auffassung folgte, dass bei der Reibung lebendige Kraft absolut verloren ginge, ebenso nahm man es beim elastischen Stosse an. Dabei ist aber nicht berücksichtigt worden, dass abgesehen von der Vermehrung der Spannkräfte durch die Compression der reibenden oder gestossenen Körper, uns sowohl die gewonnene Wärme eine Kraft repräsentirt, durch welche wir mechanische Wirkungen erzeugen können, als auch die meistentheils erzeugte Electricität entweder direct durch ihre anziehenden und abstossenden Kräfte, oder indirect dadurch, dass sie Wärme ent-
27 wickelt. Es bliebe also zu fragen übrig, ob die Summe dieser Kräfte immer der verlorenen mechanischen Kraft entspricht. In den Fällen, wo die molecularen Aenderungen und die Electricitätsentwickelung möglichst vermieden sind, würde sich diese Frage so stellen, ob für einen gewissen Verlust an mechanischer Kraft jedesmal eine bestimmte Quantität Wärme entsteht, und inwiefern eine Wärmequantität einem Aequivalent mechanischer

Kraft entsprechen kann. Zur Lösung der ersteren Frage sind erst wenige Versuche angestellt. Joule[1]) hat die Wärmemengen untersucht, welche bei der Reibung des Wassers in engen Röhren und in einem Gefässe entwickelt werden, wo es durch ein nach Art einer Turbine construirtes Rad in Bewegung gesetzt wurde; er hat im ersteren Falle gefunden, dass die Wärme, welche 1 kgr Wasser um 1° C. erwärmt, 452 kgr um ein Meter hebt, im zweiten 521 kgr. Indessen entsprechen seine Messungsmethoden zu wenig der Schwierigkeit der Untersuchung, als dass diese Resultate irgendwie auf Genauigkeit Anspruch machen könnten[2]); wahrscheinlich sind diese Zahlen zu hoch, weil bei seinem Verfahren wohl leicht Wärme für die Beobachtung verloren werden konnte, dagegen der nothwendige Verlust der mechanischen Kraft in den übrigen Maschinentheilen von dieser nicht in Abrechnung gebracht ist.

Wenden wir uns nun zu der ferneren Frage, in wie weit Wärme einem Kraftäquivalent entsprechen könne. Die materielle Theorie der Wärme muss nothwendig die Quantität
des Wärmestoffs als constant ansehen; mechanische Kraft kann 28
er nach ihr nur durch sein Streben sich auszudehnen erzeugen. Für sie kann das Kraftäquivalent der Wärme also auch nur in der Arbeit bestehen, welche dieselbe bei ihrem Uebergang aus einer höheren in eine niedere Temperatur leistet; in diesem Sinne haben Carnot und Clapeyron die Aufgabe bearbeitet, und alle Folgerungen aus der Annahme eines solchen Aequivalents wenigstens für Gase und Dämpfe bestätigt gefunden.

Um die Reibungswärme zu erklären, muss die materielle Theorie entweder annehmen, dass dieselbe von aussen zugeleitet sei, nach W. Henry,[3]) oder dass dieselbe nach Berthollet[4]) durch Compression der Oberflächen und der abgeriebenen

---

1) J. P. Joule. On the existence of an equivalent relation between heat and the ordinary forms of mechanical power. Phil. mag. XXVII. 205.

2) Dieses Urtheil bezieht sich nur auf die allerersten damals bekannt gewordenen Versuche Joule's. Die späteren mit vollendeter Sachkenntniss und eiserner Energie durchgeführten Versuche desselben Forschers verdienen die höchste Bewunderung; diese ergeben 425 kgr (1881).

3) Mem. of the Society of Manchester. T. V. p. 2. London 1802.

4) Statique chimique. T. I. p. 247.

Theile entstehe. Der ersteren Annahme fehlt bisher noch jede Erfahrung, dass in der Umgegend geriebener Theile eine der oft gewaltigen Wärmemenge entsprechende Kälte entwickelt werde; die zweite, abgesehen davon, dass sie eine ganz unwahrscheinlich grosse Wirkung der durch die hydrostatische Wage meist nicht wahrnehmbaren Verdichtung annehmen muss, scheitert ganz bei der Reibung von Flüssigkeiten und bei den Versuchen, wo Eisenkeile durch Hämmern glühend und weich gemacht, Eisstücke durch Reibung geschmolzen werden,[1]) da doch das weichgewordene Eisen und das durch Schmelzung entstandene Wasser nicht in dem comprimirten Zustande geblieben sein können. Ausserdem beweist uns aber auch die Erzeugung von Wärme durch electrische Bewegungen, dass
29 die Quantität der Wärme in der That absolut vermehrt werden könne. Wenn wir auch die Reibungselectricität und die voltaische übergehen, weil man annehmen könnte, durch irgend eine Verbindung und Beziehung der Electricitäten zum Wärmestoff, werde in diesen Fällen derselbe nur von der Ursprungsstelle fortgeführt und in dem erwärmten Leitungsdraht abgesetzt: so bleiben uns noch zwei Wege übrig electrische Spannungen auf rein mechanischem Wege hervorzubringen, wobei nirgends Wärme vorhanden ist, welche fortgeführt werden könnte, nämlich durch Vertheilung und durch Bewegung von Magneten. Haben wir einen positiv electrischen vollkommen isolirten Körper, der seine Electricität nicht verlieren kann, so wird ein angenäherter isolirter Leiter $+E$ zeigen, wir werden diese auf die Innenseite einer Batterie entladen können, den Leiter entfernen, worauf er freie $-E$ enthält, welche in die Aussenseite der ersten oder in eine zweite Batterie entladen wird. Wir werden durch Wiederholung dieses Verfahrens offenbar eine beliebig grosse Batterie beliebig oft laden und durch ihre Entladung Wärme erzeugen können, ohne dass dieselbe irgendwo verschwindet. Dagegen werden wir eine gewisse mechanische Kraftgrösse verbraucht haben, weil bei jeder Entfernung des negativ geladenen Leiters von dem positiven ver-

1) Humphrey Davy, Essay on heat, light and the combinations of light.

theilenden Körper die Anziehung zwischen beiden überwunden werden muss. Im Wesentlichen wird dieses Verfahren offenbar ausgeführt bei dem Gebrauche des Electrophors zur Ladung einer Leydner Flasche. Derselbe Fall findet bei den magnetelectrischen Maschinen statt; so lange Magnet und Anker gegeneinander bewegt werden, entstehen electrische Ströme, welche im Schliessungsdraht Wärme erzeugen, und indem sie der Bewegung des Ankers gegen den Magneten fortdauernd entgegen- 30
wirken, dafür einen gewissen Theil der mechanischen Kraft zerstören. Es kann hier offenbar aus den die Maschine constituirenden Körpern in das Unendliche Wärme entwickelt werden, ohne dass dieselbe irgendwo verschwände. Dass der magnetelectrische Strom auch in dem direct unter dem Einfluss des Magneten stehenden Theil der Spirale Wärme, und nicht Kälte, erzeugt, hat direct durch das Experiment Joule[1]) zu beweisen gesucht. Aus diesen Thatsachen folgt nun, dass die Quantität der Wärme absolut vermehrt werden könne durch mechanische Kräfte, dass deshalb die Wärmeerscheinungen nicht hergeleitet werden können von einem Stoffe, welcher durch sein blosses Vorhandensein dieselben bedinge, sondern dass sie abzuleiten seien von Veränderungen, von Bewegungen, sei es eines eigenthümlichen Stoffes, sei es der schon sonst bekannten ponderablen und imponderablen Körper, z. B. der Electricitäten oder des Lichtäthers. Das, was bisher Quantität der Wärme genannt worden ist, würde hiernach der Ausdruck sein erstens für die Quantität der lebendigen Kraft der Wärmebewegung, und zweitens für die Quantität derjenigen Spannkräfte in den Atomen, welche bei einer Veränderung ihrer Anordnung eine solche Bewegung hervorbringen können; der erstere Theil würde dem entsprechen, was bisher freie, der zweite dem, was latente Wärme genannt ist. Wenn es erlaubt ist einen Versuch zu machen den Begriff dieser Bewegung noch bestimmter zu fassen, so scheint im Allgemeinen eine der Ansicht von Ampère sich anschliessende Hypothese dem jetzigen Zustand der Wissenschaft am besten zu entsprechen. Denken wir uns die Körper 31
aus Atomen gebildet, welche selbst aus differenten Theilchen

1) Philos. Magazine. 1844.

bestehen (chemischen Elementen, Electricitäten etc.), so können an einem solchen Atom dreierlei Arten von Bewegungen unterschieden werden, nämlich 1) Verschiebung des Schwerpunktes, 2) Drehung um den Schwerpunkt, 3) Verschiebungen der Theilchen des Atoms gegeneinander. Die beiden ersteren würden durch die Kräfte der Nachbaratome ausgeglichen werden und sich deshalb auf diese in Wellenform fortpflanzen, eine Fortpflanzungsart, welche wohl der Strahlung, nicht aber der Leitung der Wärme entspricht. Bewegungen der einzelnen Theile des Atoms gegeneinander würden sich durch die innerhalb des Atoms befindlichen Kräfte ausgleichen und die Nachbaratome nur langsam in Mitbewegung setzen können, wie eine schwingende Saite die andere, dafür aber selbst eine gleiche Quantität Bewegung verlieren; diese Art der Fortpflanzung scheint der der geleiteten Wärme ähnlich zu sein. Auch ist im Allgemeinen klar, dass solche Bewegungen in den Atomen Aenderungen in den Molekularkräften, also Ausdehnung und Aenderung des Aggregatzustandes, hervorbringen können; welcher Art aber diese Bewegungen seien, zu bestimmen, dazu fehlen uns alle Anhaltspunkte; auch ist für unseren Zweck die Einsicht der Möglichkeit hinreichend, dass die Wärmeerscheinungen als Bewegungen gefasst werden können. Die Erhaltung der Kraft würde bei dieser Bewegung so weit stattfinden, als bisher die Erhaltung der Quantität des Wärmestoffes erkannt ist, nämlich bei allen Erscheinungen der Leitung und Strahlung aus einem Körper zu dem andern, bei der Bindung und Entbindung von Wärme durch Aenderung des Aggregatzustandes.

32 Von den verschiedenen Entstehungsweisen der Wärme haben wir die durch Einstrahlung und durch mechanische Kräfte besprochen, die durch Electricität werden wir unten durchgehen. Es bleibt die Wärmeentwickelung durch chemische Processe. Man hat dieselbe bisher für ein Freiwerden von Wärmestoff erklärt, welcher in den sich verbindenden Körpern latent vorhanden sei. Da man hiernach jedem einfachen Körper und jeder chemischen Verbindung, die noch weitere Verbindungen höherer Ordnung eingehen kann, eine bestimmte Quantität latenter Wärme beilegen musste, welche nothwendig mit zu ihrer chemischen Constitution gehörte: so folgte hieraus das Gesetz,

welches man auch theilweise in der Erfahrung bewahrheitet hat, dass nämlich bei der chemischen Verbindung mehrerer Stoffe zu gleichen Producten stets gleich viel Wärme hervorgebracht werde, in welcher Ordnung und in welchen Zwischenstufen auch die Verbindung vor sich gehen möge.[1] Nach unserer Vorstellungsweise würde die bei chemischen Processen entstehende Wärme die Quantität der lebendigen Kraft sein, welche durch die bestimmte Quantität der chemischen Anziehungskräfte hervorgebracht werden kann, und das obige Gesetz würde der Ausdruck für das Princip von der Erhaltung der Kraft in diesem Falle werden.

Ebensowenig, als man die Bedingungen und Gesetze der Erzeugung von Wärme untersucht hat, obgleich eine solche unzweifelhaft stattfindet, ist dies für das Verschwinden derselben geschehen. Bisher kennt man nur die Fälle, wo chemische Verbindungen aufgehoben wurden, oder dünnere Aggregatzu-
stände eintraten und dadurch Wärme latent wurde. Ob bei 33
der Erzeugung mechanischer Kraft Wärme verschwinde, was ein nothwendiges Postulat der Erhaltung der Kraft sein würde, ist noch niemals gefragt worden. Ich kann dafür nur einen Versuch von Joule[2] anführen, der ziemlich zuverlässig zu sein scheint. Derselbe fand nämlich, dass die Luft bei dem Ausströmen aus einem Behälter von 136,5 Cubikzollen, in welchem sie unter 22 Atmosphären Druck stand, das umgebende Wasser um 4°,085 *F.* erkältete, sobald sie in die Atmosphäre ausströmte, also deren Widerstand zu überwinden hatte. Dagegen trat keine Temperaturveränderung ein, wenn dieselbe in ein luftleeres, ebenso grosses Gefäss überströmte, welches in demselben Wassergefäss stand, wo sie also keinen Widerstand zu überwinden hatte und keine mechanische Kraft ausübte.

Wir haben jetzt noch zu untersuchen, in welchem Verhältniss die Versuche von Clapeyron[3] und Holtzmann[4], das Kraftäquivalent der Wärme herzuleiten, zu dem unsrigen

1) Hess in Pogg. Ann. L 392. LVI 598.

2) Philos. Magaz. XXVI 369.

3) Pogg. Ann. Bd. LIX 446. 566. (1843).

4) Ueber die Wärme und Elasticität der Gase und Dämpfe. Mannheim, 1845. Ein Auszug davon in Pogg. Ann. Ergänzungsbd. II.

stehen. Clapeyron geht aus von der Betrachtung, dass die Wärme nur durch ihre Verbreitung aus einem wärmeren Körper in einen anderen kälteren als Mittel zur Erzeugung mechanischer Kraft benutzt werden könne, und dass das Maximum der letzteren gewonnen werden müsse, wenn die Ueberleitung der Wärme nur zwischen Körpern gleicher Temperatur stattfinde, die Temperaturänderungen aber durch Compression und Dilatation der erwärmten Körper bewirkt würden. Dieses
34 Maximum müsse aber für alle Naturkörper, welche durch Erwärmung und Erkältung eine mechanische Arbeit leisten könnten, dasselbe sein; denn wäre es verschieden, so würde man den einen Körper, in welchem ein gewisses Wärmequantum die grössere Wirkung giebt, zur Gewinnung von mechanischer Arbeit benutzen können und einen Theil dieser letzteren dann, um mit dem anderen Körper rückwärts die Wärme wieder aus der kälteren in die wärmere Quelle zurückzubringen, und man würde so in das Unendliche mechanische Kraft gewinnen, wobei aber stillschweigend vorausgesetzt wird, dass die Quantität der Wärme dadurch nicht verändert werde. Analytisch stellt er dies Gesetz in folgendem allgemeinen Ausdrucke dar:

$$\frac{dq}{dv} \cdot \frac{dt}{dp} - \frac{dq}{dp} \cdot \frac{dt}{dv} = C,$$

worin q die Quantität der Wärme, welche ein Körper enthält, t seine Temperatur, beide ausgedrückt als Functionen von v dem Volumen und p dem Druck. $1/C$ ist die mechanische Arbeit, welche die Einheit der Wärme (die 1 kgr Wasser um 1° C. erwärmt) leistet, wenn sie in eine um 1° niedrigere Temperatur übergeht. Dieselbe soll für alle Naturkörper identisch sein, aber nach der Temperatur veränderlich. Für Gase wird diese Formel:

$$C = v\frac{dq}{dv} - p\frac{dq}{dp}.$$

Clapeyron's Folgerungen aus der Allgemeingültigkeit dieser Formel haben wenigstens für Gase eine grosse Zahl von erfahrungsmässigen Analogien für sich. Seine Ableitung des Gesetzes kann nur zugegeben werden, wenn die absolute Quan-

tität der Wärme als unveränderlich betrachtet wird;[1]) übrigens 35 folgt seine speciellere Formel für Gase, welche allein durch Vergleichung mit der Erfahrung unterstützt ist, auch aus der Formel von Holtzmann, wie wir sogleich zeigen werden. Von der allgemeinen Formel hat er nur zu zeigen gesucht, dass das daraus folgende Gesetz der Erfahrung wenigstens nicht widerspricht. Dieses Gesetz ist, dass wenn der Druck auf verschiedene Körper, genommen bei gleicher Temperatur, um eine kleine Grösse erhöht wird, Wärmemengen entwickelt werden, die proportional sind ihrer Ausdehnbarkeit durch die Wärme. Nur auf eine mindestens sehr unwahrscheinliche Folgerung dieses Gesetzes will ich aufmerksam machen. Compression des Wassers bei dem Wendepunkte seiner Dichtigkeit würde nämlich keine Wärme, zwischen diesem und dem Gefrierpunkt aber Kälte erzeugen.

Holtzmann geht aus von der Betrachtung, dass eine gewisse Wärmemenge, welche in ein Gas eintritt, darin entweder eine Temperaturerhöhung oder eine Ausdehnung ohne Temperaturerhöhung erzeugen kann. Die durch diese Ausdehnung zu leistende Arbeit nahm er als das mechanische Aequivalent der Wärme und berechnete aus den Schallversuchen von Dulong über das Verhältniss der beiden specifischen Wärmen der Gase für die Wärme, welche 1 kgr Wasser um 1^{0} C. erwärmt, 374 kgr gehoben um 1 m. Diese Art der Berechnung ist von unseren Betrachtungen aus nur zulässig, wenn die ganze lebendige Kraft der hinzugetretenen Wärme wirklich als Arbeitskraft abgegeben ist, also die Summe der lebendigen und Spannkräfte, d. h. die Quantität der freien und latenten Wärme in dem stärker ausgedehnten Gase ganz dieselbe ist, wie in dem dichteren von derselben Temperatur. Danach müsste ein Gas, welches ohne Leistung einer Arbeit 36 sich ausdehnt, seine Temperatur nicht ändern, wie es aus dem oben erwähnten Experiment von Joule wirklich hervorzugehen scheint, und die Temperaturerhöhung und Erniedrigung bei der Compression und Dilatation unter den gewöhnlichen Umständen

1) Bekanntlich hat Hr. Clausius später (1850) diesen Punkt der Carnot'schen Theorie verbessert (1881).

würde von einer Erzeugung von Wärme durch mechanische Kraft und umgekehrt herrühren. Für die Richtigkeit des Gesetzes von Holtzmann spricht die grosse Menge der mit der Erfahrung übereinstimmend gezogenen Folgerungen, namentlich die Herleitung der Formel für die Elasticität des Wasserdampfes bei verschiedenen Temperaturen.

Joule bestimmt aus seinen eigenen Versuchen das Kraftäquivalent, welches Holtzmann aus fremden zu 374 berechnet hat, zu 481, 464, 479, während er durch Reibung für das Kraftäquivalent der Wärmeeinheit 452 und 521 gefunden hatte.

Die Formel von Holtzmann ist übereinstimmend mit der von Clapeyron für Gase, nur ist darin auch die unbestimmte Function der Temperatur C gefunden, und dadurch wird die vollständige Bestimmung des Integrals möglich. Die erstere lautet nämlich:

$$\frac{pv}{a} = v\frac{dq}{dv} - p\frac{dq}{dp},$$

wo a das Kraftäquivalent der Wärmeeinheit; die von Clapeyron:

$$C = v\frac{dq}{dv} - p\frac{dq}{dp}.$$

Beide sind also übereinstimmend, wenn $C = pv/a$ oder da
37 $p = k/v(1 + \alpha t)$, wo α der Ausdehnungscoëfficient, k eine Constante ist, wenn:

$$\frac{1}{C} = \frac{a}{k \cdot (1 + \alpha t)}.$$

Die von Clapeyron berechneten Werthe von $1/C$ stimmen nun wirklich ziemlich mit dieser Formel, wie aus der nachstehenden Zusammenstellung hervorgeht.

Temperatur	Von Clapeyron berechnet			Nach der Formel
	a	*b*	*c*	
0°	1,410		1,586	1,544
35,5		1,365	1,292	1,366
78,8		1,208	1,142	1,198
100		1,115	1,102	1,129
156,8		1,076	1,072	0,904

Die Zahl unter a ist aus der Schallgeschwindigkeit in der Luft berechnet, die Reihe b aus den latenten Wärmen des Dampfes

von Aether, Alkohol, Wasser, Terpentinöl, c aus der Expansivkraft des Wasserdunstes für verschiedene Temperaturen. Clapeyron's Formel für Gase ist hiernach identisch mit der von Holtzmann; ihre Anwendbarkeit auf feste und tropfbar flüssige Körper bleibt vorläufig zweifelhaft.[1])

V. Das Kraftäquivalent der electrischen Vorgänge.

Statische Electricität. Die Maschinenelectricität kann uns auf zweierlei Weise Ursache von Krafterzeugung werden, einmal indem sie sich mit ihren Trägern bewegt, durch ihre anziehende und abstossende Kraft, dann indem sie sich in den 38
Trägern bewegt, durch Wärmeentwickelung. Die ersteren mechanischen Erscheinungen hat man bekanntlich aus den im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung wirkenden, anziehenden und abstossenden Kräften zweier electrischer Fluida hergeleitet, und die Erfahrungen, soweit dieselben mit der Theorie verglichen werden konnten, mit der Rechnung übereinstimmend gefunden. Gemäss unserer anfänglichen Herleitung, muss die Erhaltung der Kraft für solche Kräfte stattfinden. Wir wollen deshalb auf die specielleren Gesetze der mechanischen Wirkungen der Electricität nur so weit eingehen, als es uns für die Ableitung des Gesetzes der electrischen Wärmeentwickelung nöthig ist.

Sind $e_{,}$ und $e_{,,}$ zwei electrische Massenelemente, deren Einheit diejenige ist, welche eine ihr gleiche in der Entfernung $= 1$ mit der Kraft $= 1$ abstösst, werden die entgegengesetzten Electricitäten durch entgegengesetzte Vorzeichen der Massen bezeichnet, und ist r die Entfernung zwischen $e_{,}$ und $e_{,,}$, so ist die Intensität ihrer Centralkraft:

$$\varphi = -\frac{e_{,}e_{,,}}{r^2}.$$

Der Gewinn an lebendiger Kraft, indem sie aus der Entfernung R in die r übergehen, ist:

$$-\int_R^r \varphi\, dr = \frac{e_{,}e_{,,}}{R} - \frac{e_{,}e_{,,}}{r}.$$

1) S. Zusatz 5 betreffs der Arbeiten von R. Mayer.

Wenn sie aus der Entfernung ∞ in die r übergehen, ist derselbe $-e_{,}e_{,,}/r$. Bezeichnen wir diese letztere Grösse, die Summe der bei der Bewegung von ∞ bis r verbrauchten Spannkräfte
39 und gewonnenen lebendigen Kräfte, gemäss der Bezeichnung, welche Gauss bei den Magnetismen angewendet hat, mit dem Namen Potential der beiden elektrischen Elemente für die Entfernung r, so ist die Zunahme an lebendiger Kraft bei irgend einer Bewegung gleich zu setzen dem Ueberschuss des Potentials am Ende des Weges über das am Anfange.

Bezeichnen wir ebenso die Summe der Potentiale eines electrischen Elementes gegen sämmtliche Elemente eines electrisirten Körpers als das Potential des Elementes gegen den Körper, und die Summe der Potentiale aller Elemente eines electrischen Körpers gegen alle eines andern als das Potential der beiden Körper: so wird uns wieder der Gewinn an lebendiger Kraft durch den Unterschied der Potentiale gegeben, vorausgesetzt, dass die Vertheilung der Electricität in den Körpern nicht geändert werde, dass dieselben also idioelectrische sind. Aendert sich die Vertheilung, so ändert sich auch die Quantität der electrischen Spannkräfte in den Körpern selbst, die gewonnene lebendige Kraft muss also dann eine andere sein.

Durch alle Methoden des Electrisirens werden gleiche Quantitäten positiver und negativer Electricität erzeugt; bei der Ausgleichung der Electricitäten zwischen zwei Körpern, deren einer A eben so viel positive Electricität enthält, als der andere B negative, geht die Hälfte positiver Electricität von A nach B, dagegen die Hälfte negativer von B nach A. Nennen wir die Potentiale der Körper auf sich selbst W_a und W_b, das Potential derselben gegen einander V, so finden wir[1]) die ganze gewonnene lebendige Kraft, wenn wir das Potential der übergehenden electrischen Massen vor der Bewegung gegen jede der anderen Massen und auf sich selbst abziehen von
40 denselben Potentialen nach der Bewegung. Dabei ist zu bemerken, dass das Potential zweier Massen sein Zeichen wech-

1) Nämlich: „unter den hier gemachten Annahmen". S. Zusatz 6. (1881).

selt, wenn eine der Massen dasselbe wechselt. Es kommen also in Betracht folgende Potentiale:

1) des bewegten $+\frac{1}{2}E$ aus A	
gegen sich selbst	$\frac{1}{2}(W_b - W_a)$
gegen das bewegte $-\frac{1}{2}E$	$\frac{1}{2}(V - V)$
gegen das ruhende $+\frac{1}{2}E$	$\frac{1}{2}(-V - W_a)$
gegen das ruhende $-\frac{1}{2}E$	$\frac{1}{2}(-W_b - V)$
2) des bewegten $-\frac{1}{2}E$ aus B	
gegen sich selbst	$\frac{1}{2}(W_a - W_b)$
gegen das bewegte $+\frac{1}{2}E$	$\frac{1}{2}(V - V)$
gegen das ruhende $-\frac{1}{2}E$	$\frac{1}{2}(-V - W_b)$
gegen das ruhende $+\frac{1}{2}E$	$\frac{1}{2}(-W_a - V)$

$$\text{Summe} - \left(V + \frac{W_a + W_b}{2}\right).$$

Diese Grösse giebt uns also das Maximum der zu erzeugenden lebendigen Kraft und die Quantität der Spannkraft an, welche durch das Electrisiren gewonnen wird.

Um nun statt dieser Potentiale geläufigere Begriffe in die Rechnung einzuführen, brauchen wir folgende Betrachtung. Denken wir uns Flächen construirt, für welche das Potential eines in ihnen liegenden electrischen Elementes in Bezug auf einen oder mehrere vorhandene electrische Körper gleiche Werthe hat, und nennen diese Gleichgewichtsoberflächen, so muss die Bewegung eines electrischen Theilchens von irgend einem Punkte der einen zu irgend einem Punkte einer bestimmten anderen stets die lebendige Kraft um eine gleiche Grösse vermehren, dagegen wird eine Bewegung in der Fläche selbst die Geschwindigkeit des Theilchens nicht verändern. Es wird also die Resultante sämmtlicher electrischer Anziehungs- 41
kräfte für jeden einzelnen Punkt des Raumes auf der durch ihn gehenden Gleichgewichtsoberfläche senkrecht stehen müssen, und jede Fläche, auf der diese Resultanten senkrecht stehen, wird eine Gleichgewichtsoberfläche sein müssen.

Das electrische Gleichgewicht in einem Leiter wird nun nicht eher bestehen, als bis die Resultanten sämmtlicher Anziehungskräfte seiner eigenen Electricitäten und etwa noch

vorhandener anderer electrisirter Körper senkrecht auf seiner Oberfläche stehen, weil durch dieselben sonst die electrischen Theilchen längs der Oberfläche verschoben werden müssten. Folglich wird die Oberfläche eines electrisirten Leiters selbst eine Gleichgewichtsoberfläche sein, und die lebendige Kraft, welche ein verschwindend kleines electrisches Theilchen bei seinem Uebergange von der Oberfläche eines Leiters zu der eines andern gewinnt, eine Constante. Bezeichnet C_a die lebendige Kraft, welche die Einheit der positiven Electricität gewinnt bei ihrem Uebergange von der Oberfläche des Leiters A in unendliche Entfernung, so dass C_a für positiv electrische Ladungen positiv ist, A_a das Potential derselben Electricitätsmenge, wenn sie sich in einem bestimmten Punkte der Oberfläche von A befindet gegen A, A_b dasselbe gegen B, W_a das Potential von A auf sich selbst, W_b dasselbe von B, V das von A auf B, und Q_a die Quantität der Electricität in A, Q_b in B: so ist die lebendige Kraft, welche das electrische Theilchen e bei seinem Uebergange aus unendlicher Entfernung auf die Oberfläche von A gewinnt:

$$-eC_a = e(A_a + A_b).$$

Setzt man statt e nach einander alle electrischen Theilchen der
42 Oberfläche von A, und für A_a und A_b die zugehörigen Potentiale, und addirt alle, so erhält man:

$$-Q_a C_a = V + W_a.$$

Ebenso für den Leiter B:

$$-Q_b C_b = V + W_b.$$

Die Constante C muss nun nicht nur für die ganze Oberfläche eines und desselben Leiters gleich sein, sondern auch für getrennte Leiter, wenn dieselben bei Herstellung einer Verbindung, durch welche die Vertheilung ihrer Electricitäten nicht merklich geändert wird, keine Electricität mit einander austauschen, d. h. sie muss gleich sein für alle Leiter von gleicher freier Spannung. Wir können als Maass der freien Spannung eines electrischen Körpers diejenige Quantität von Electricität gebrauchen, welche ausserhalb der Vertheilungsweite in einer Kugel vom Radius = 1 angehäuft, mit jenem Körper im electrischen Gleichgewicht steht. Ist die Electricität gleichmässig

über die Kugel verbreitet, so wirkt sie bekanntlich nach aussen, als wäre sie ganz im Mittelpunkt derselben zusammengedrängt. Bezeichnen wir die Masse der Electricität mit E, den Radius der Kugel mit $R = 1$, so ist für diese Kugel die Constante:

$$C = \frac{R}{E} = E.$$

Also die Constante C ist unmittelbar gleich der freien Spannung.

Danach findet sich die Quantität von Spannkräften zweier Leiter, welche gleiche Quantitäten Q von positiver und negativer Electricität enthalten:

$$-\left(V + \frac{W_a + W_b}{2}\right) = Q\left(\frac{C_a - C_b}{2}\right).$$

Da C_b negativ ist, so ist die algebraische Differenz $C_a - C_b$ gleich ihrer absoluten Summe. Ist die Ableitungsgrösse des 43
Leiters B sehr gross, also nahehin $C_b = 0$, so ist die Quantität der Spannkräfte $\frac{1}{2} Q C_a = \frac{1}{2}(- V + W_a)$; ist auch die Entfernung beider Leiter sehr gross, so ist dieselbe $- \frac{1}{2} W_a$.

Die lebendige Kraft, welche bei der Bewegung zweier electrischer Massen entsteht, haben wir gefunden gleich der Abnahme der Summe $\frac{1}{2}(Q_a C_a + Q_b C_b)$. Diese lebendige Kraft gewinnen wir als mechanische, wenn die Geschwindigkeit, womit sich die Elektricität in den Körpern bewegt, verschwindend klein ist gegen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der electrischen Bewegung; wir müssen sie als Wärme empfangen, wenn dies nicht der Fall ist. Die bei der Entladung gleicher Quantitäten Q entgegengesetzter Electricität erzeugte Wärme Θ findet sich demnach:

$$\Theta = \frac{1}{2a} Q (C_a - C_b),$$

wo a das mechanische Aequivalent der Wärmeeinheit bezeichnet, oder wenn $C_b = 0$, wie in Batterien, deren äussere Belegung nicht isolirt ist, deren Ableitungsgrösse S ist, so dass $CS = Q$:

$$\Theta = \frac{1}{2a} Q C = \frac{1}{2a} \frac{Q^2}{S}.$$

Riess[1]) hat durch Experimente bewiesen, dass bei verschiedenen Ladungen und verschiedener Anzahl gleich construirter Flaschen die in jedem einzelnen Theile desselben Schliessungsdrahtes entwickelte Wärme proportional sei der
44 Grösse Q^2/S. Nur bezeichnet er mit S die Oberfläche der Belegung der Flaschen. Bei gleich construirten Flaschen muss diese aber der Ableitungsgrösse proportional sein. Aus seinen Versuchen hat ferner Vorsselmann de Heer[2]) gefolgert, so wie Knochenhauer[3]) aus den eigenen, dass die Wärmeentwickelung bei derselben Ladung derselben Batterie dieselbe bleibe, wie auch der Schliessungsdrath abgeändert werden möge. Der Letztere hat dieses Gesetz auch bei Verzweigung der Schliessungsdrähte und bei Nebenströmen durchgeführt. Ueber die Grösse der Constante a liegen bis jetzt noch keine Beobachtungen vor.

Zu erklären ist dieses Gesetz leicht, sobald wir uns die Entladung einer Batterie nicht als eine einfache Bewegung der Electricität in einer Richtung vorstellen, sondern als ein Hin- und Herschwanken derselben zwischen den beiden Belegungen in Oscillationen, welche immer kleiner werden, bis die ganze lebendige Kraft derselben durch die Summe der Widerstände vernichtet ist. Dafür, dass der Entladungsstrom aus abwechselnd entgegengerichteten Strömen besteht, spricht erstens die abwechselnd entgegengesetzte magnetisirende Wirkung desselben, zweitens die Erscheinung, welche Wollaston bei dem Versuch Wasser durch electrische Schläge zu zersetzen, wahrnahm, dass sich nämlich beide Gasarten an beiden Electroden entwickeln. Zugleich erklärt diese Annahme, warum bei diesem Versuch die Electroden möglichst geringe Oberfläche haben müssen.

45 Galvanismus. Wir haben in Beziehung auf die galvanischen Erscheinungen zwei Klassen von Leitern zu unterscheiden: 1) diejenigen, welche nach Art der Metalle leiten, und dem Gesetze der galvanischen Spannungsreihe folgen;

---

1) Pogg. Ann. XLIII 47.

2) Pogg. Ann. XLVIII. 292. Dazu die Bemerkung von Riess ebendas. S. 320.

3) Ann. LXII. 364. LXIV 64.

2) diejenigen, welche diesem Gesetze nicht folgen. Alle diese
letzteren sind zusammengesetzte Flüssigkeiten, und erleiden
durch jede Leitung eine der Quantität der geleiteten Electri-
cität proportionale Zersetzung.

Wir können danach die experimentellen Thatsachen ein-
theilen: 1) in solche, welche nur zwischen Leitern der ersten
Klasse stattfinden, die Ladung verschiedener sich berührender
Metalle mit ungleichen Electricitäten, und 2) in solche zwi-
schen Leitern beider Klassen, die electrischen Spannungs-
unterschiede der offenen und die electrischen Ströme der ge-
schlossenen Ketten. Durch eine beliebige Combination von
Leitern erster Klasse können niemals electrische Ströme her-
vorgebracht werden, sondern nur electrische Spannungen.
Diese Spannungen sind aber nicht äquivalent einer gewissen
Kraftgrösse, wie die bisher betrachteten, welche eine Störung
des electrischen Gleichgewichts bezeichneten; die galvanischen
Spannungen sind vielmehr entstanden durch die Herstellung
des electrischen Gleichgewichts, durch sie kann keine Bewe-
gung der Electricität hervorgerufen werden ausser bei Lagen-
veränderungen der Leiter selbst durch die geänderte Verthei-
lung der gebundenen Electricität. Denken wir uns alle Metalle
der Erde mit einander in Berührung gebracht, und die ent-
sprechende Vertheilung der Electricität erfolgt, so kann durch
keine andere Verbindung derselben irgend eines eine Aenderung
seiner electrischen freien Spannung erleiden, ehe nicht eine Be-
rührung mit einem Leiter zweiter Klasse erfolgt ist. Den Be- 46
griff der Contactkraft, der Kraft, welche an der Berührungs-
stelle zweier verschiedenen Metalle thätig ist, und ihre
verschiedenen electrischen Spannungen erzeugt und unterhält,
hat man bisher nicht näher bestimmt als eben so, weil man
mit demselben auch die Erscheinungen der Berührung von
Leitern erster und zweiter Klasse zu umfassen suchte zu einer
Zeit, wo man den constanten und wesentlichen Unterschied
beider Erscheinungen, den chemischen Process, noch nicht als
solchen kannte. In dieser dadurch nothwendig gemachten Un-
bestimmtheit der Begriffsfassung erscheint nun allerdings die
Contactkraft als eine solche, welche in das Unendliche Quan-
titäten freier Electricität und somit mechanische Kräfte,

image
not
available

d. h. die Spannungsdifferenz muss bei verschiedenen Stücken derselben Metalle constant sein, und bei verschiedenen Metallen dem Gesetze der galvanischen Spannungsreihe folgen.

Bei den galvanischen Strömen haben wir in Bezug auf die Erhaltung der Kraft hauptsächlich folgende Wirkungen zu betrachten: Wärmeentwickelung, chemische Processe und Polarisation. Die electrodynamischen Wirkungen werden wir beim
Magnetismus durchnehmen. Die Wärmeentwickelung ist allen 48
Strömen gemein; nach den beiden anderen Wirkungen können wir sie für unseren Zweck unterscheiden in solche, welche blos chemische Zersetzungen, in solche, welche blos Polarisation, und in solche, welche beides hervorbringen.

Zuerst wollen wir die Bedingungen der Erhaltung der Kraft untersuchen an solchen Ketten, bei welchen die Polarisation aufgehoben ist, weil diese die einzigen sind, für welche wir bis jetzt bestimmte durch Messungen bewährte Gesetze haben. Die Intensität des Stromes J einer Kette von n Elementen wird gegeben durch das Ohm'sche Gesetz:

$$J = \frac{nA}{W},$$

wo die Constante A die electromotorische Kraft des einzelnen Elementes und W der Widerstand der Kette genannt wird; A und W sind in diesen Ketten unabhängig von der Intensität. Da während eines gewissen Zeitraumes der Wirkung einer solchen Kette nichts in ihr geändert wird als die chemischen Verhältnisse und die Wärmemenge, so würde das Gesetz von der Erhaltung der Kraft fordern, dass die durch die vorgegangenen chemischen Processe zu gewinnende Wärme gleich sei der wirklich gewonnenen. In einem einfachen Stück einer metallischen Leitung vom Widerstand w ist nach Lenz[1]) die während der Zeit t entwickelte Wärme:

$$\vartheta = J^2 w t,$$

wenn man als Einheit von w die Drahtlänge nimmt, in welcher
die Einheit des Stromes in der Zeiteinheit die Wärmeeinheit 49
entwickelt. Für verzweigte Schliessungsdrähte, wo die Wider-

1) S. Pogg. Ann. LIX. S. 203 u. 407 aus den Bull. de l'acad. d. scienc. de St. Petersbourg. 1843.

stände der einzelnen Zweige mit w_a bezeichnet werden, ist der Gesammtwiderstand w gegeben durch die Gleichung:

$$\frac{1}{w} = \Sigma \left[\frac{1}{w_a}\right],$$

die Intensität J_n im Zweige w_n durch:

$$J_n = \frac{Jw}{w_n},$$

also die Wärme ϑ^n in demselben Zweige:

$$\vartheta_n = J^2 w^2 . \frac{1}{w_n} t,$$

und die in der ganzen verzweigten Leitung entwickelte Wärme:

$$\vartheta = \Sigma \left[\vartheta_a\right] = J^2 w^2 \Sigma \left[\frac{1}{w_a}\right] t = J^2 w . t.$$

Folglich ist die in einer mit beliebigen Verzweigungen der Leitung versehenen Kette entwickelte Gesammtwärme, wenn das Gesetz von Lenz auch auf flüssige Leiter passt, wie es Joule gefunden hat:

$$\Theta = J^2 W t = n A J t.$$

Wir haben zweierlei Arten von constanten Ketten, die nach dem Schema der Daniell'schen und die nach dem der Grove'schen construirten. Bei den ersteren besteht der chemische Vorgang darin, dass sich das positive Metall in einer Säure auflöst, und aus einer Lösung in derselben Säure das negative sich niederschlägt. Nehmen wir als Einheit der Stromintensität diejenige, welche in der Zeiteinheit ein Aequi-
50 valent Wasser zersetzt (etwa O = 1 gr. genommen), so werden in der Zeit t gelöst nJt Aequivalente des positiven Metalls, und eben so viele des negativen niedergeschlagen. Ist nun die Wärme, welche ein Aequivalent des positiven Metalls bei seiner Oxydation und Lösung des Oxyds in der betreffenden Säure entwickelt, a_z, und die gleiche für das negative a_c, so würde die chemisch zu entwickelnde Wärme sein:

$$= nJt(a_z - a_c).$$

Die chemische würde also der electrischen gleich sein, wenn:

$$A = a_z - a_c,$$

d. h. wenn die electromotorischen Kräfte zweier so combi-

nirten **Metalle** dem Unterschied der bei ihrer Verbrennung und **Verbindung** mit Säuren zu entwickelnden Wärme proportional **wären**.

In den nach Art der Grove'schen Kette gebauten Elementen wird die Polarisation dadurch aufgehoben, dass der auszuscheidende Wasserstoff sogleich zur Reduction der sauerstoffreichen Bestandtheile der Flüssigkeit verbraucht wird, welche das negative Metall umgiebt. Es sind dahin zu rechnen die Grove'schen und die Bunsen'schen Elemente: amalgamirtes Zink, verdünnte Schwefelsäure, rauchende Salpetersäure, Platin oder Kohle; ferner die mit Chromsäure gebauten constanten Ketten, unter denen genaueren Messungen unterworfen sind: amalgamirtes Zink, verdünnte Schwefelsäure, Lösung von saurem chromsaurem Kali mit Schwefelsäure, Kupfer oder Platin. Die chemischen Processe sind in den beiden mit Salpetersäure gebauten Ketten gleich, ebenso die in den beiden genannten mit Chromsäure; daraus würde gemäss der eben gemachten Deduction folgen, dass auch die elektromotorischen Kräfte gleich seien, und das ist in der 51
That nach den Messungen von Poggendorf[1]) sehr genau der Fall. Die mit Kohle gebaute Chromsäure-Kette ist sehr inconstant, und hat eine beträchtlich höhere electromotorische Kraft, wenigstens im Anfang; dieselbe ist deshalb hier nicht herzurechnen, sondern zu den Ketten mit Polarisation. Bei diesen constanten Ketten ist also die electromotorische Kraft unabhängig von dem negativen Metall; wir können sie uns auf den Typus der Daniell'schen Kette zurückbringen, wenn wir als den letzten die Flüssigkeit unmittelbar berührenden Leiter erster Klasse die dem Platin zunächst liegenden Theilchen von salpetriger Säure und Chromoxyd ansehen, so dass wir die Grove'schen und Bunsen'schen Elemente als Ketten zwischen Zink und salpetriger Säure, die mit Chromsäure gebauten als Zink-Chromoxydketten erklären würden.

Unter den Ketten mit Polarisation können wir solche unterscheiden, welche blos Polarisation und keine chemische Zersetzung hervorbringen, und solche welche beides bewirken.

---

1) Pogg. Ann. LIV. 429 und LVII. 104.

Zu den ersteren, welche einen inconstanten meist bald verschwindenden Strom geben, gehören unter den einfachen Ketten die von Faraday[1]) mit Lösung von Aetzkali, Schwefelkalium, salpetriger Säure gebildeten Combinationen, ferner die der stärker negativen Metalle in den gewöhnlichen Säuren, wenn das positivere derselben die Säure nicht mehr zu zersetzen vermag, z. B. Kupfer mit Silber, Gold, Platin, Kohle in Schwefelsäure u. s. w.; von den zusammengesetzten alle mit
52 eingeschalteten Zersetzungszellen, deren Polarisation die electromotorische Kraft der anderen Elemente überwiegt. Scharfe messende Versuche haben über die Intensitäten dieser Ketten bis jetzt wegen der grossen Veränderlichkeit des Stromes nicht gemacht werden können. Im Allgemeinen scheint die Intensität ihrer Ströme von der Natur der eingetauchten Metalle abzuhängen, ihre Dauer wächst mit der Grösse der Oberflächen und mit der Abschwächung der Stromintensität; aufgefrischt können sie werden, auch wenn sie fast ganz verschwunden sind, durch Bewegungen der Platten in der Flüssigkeit und durch Berührung derselben mit der Luft, wodurch die Polarisation der Wasserstoffplatte aufgehoben wird. Von solchen Einwirkungen mag auch wohl der geringe, nicht aufhörende Rest des Stromes herrühren, den feinere galvanometrische Instrumente immer anzugeben pflegen. Der ganze Vorgang ist also eine Herstellung des electrischen Gleichgewichts der Flüssigkeitstheilchen mit den Metallen; dabei scheinen sich einmal die Flüssigkeitstheilchen anders zu ordnen, und dann, wenigstens in vielen Fällen[2]), auch chemische Umänderungen der oberflächlichen Metallschichten zu entstehen. Bei den zusammengesetzten Ketten, wo die Polarisation ursprünglich gleicher Platten die Wirkung des Stromes anderer Elemente ist, können wir die dabei verlorene Kraft des ursprünglichen Stromes als secundären Strom wiedergewinnen, nachdem wir die erregenden Elemente entfernt, und die Metalle der polarisirten Zelle unter sich geschlossen haben. Um das Princip von der Erhaltung der

---

1) Experimentaluntersuchungen über Electricität. 16. Reihe. Philos. Transact. 1840 p. I. und Pogg. Ann. LII. S. 163 u. 547.

2) S. Ohm in Pogg. Ann. LXIII. 389.

Kraft hier näher anzuwenden, fehlen uns bis jetzt noch alle speciellen Thatsachen.

Den verwickeltesten Fall bilden diejenigen Ketten, in 53
welchen Polarisation und chemische Zersetzung neben einander vor sich gehen; dazu gehören die Ketten mit Gasentwickelung. Der Strom derselben ist, wie der der blossen Polarisationsketten, zu Anfang am stärksten und sinkt schneller oder langsamer auf eine ziemlich constant bleibende Grösse. Bei einzelnen Elementen dieser Art, oder Ketten, welche nur aus solchen zusammengesetzt sind, hört der Polarisationsstrom nur äusserst langsam auf; leichter gelingt es dagegen, schnell constante Ströme zu erhalten, bei Combination von constanten Ketten mit einzelnen inconstanten, namentlich, wenn die Platten der letzteren verhältnissmässig klein sind. Bisher sind aber an solchen Zusammenstellungen nur wenige Messungsreihen gemacht worden; aus den wenigen, welche ich aufgefunden habe, von Lenz[1]) und Poggendorf[2]), geht hervor, dass die Intensitäten solcher Ketten bei verschiedenen Drahtwiderständen nicht durch die einfache Ohm'sche Formel gegeben werden können, sondern wenn man die Constanten derselben bei geringen Intensitäten berechnet, werden die Ergebnisse der Rechnung für höhere Intensitäten zu gross. Man muss deshalb den Zähler oder den Nenner derselben, oder beide als Functionen der Intensität betrachten; die bisher bekannten Thatsachen liefern uns keine Entscheidung dafür, welcher von diesen Fällen eigentlich stattfinde.

Suchen wir das Princip von der Erhaltung der Kraft auf diese Ströme anzuwenden, so müssen wir dieselben in zwei
Theile theilen, in den inconstanten oder Polarisationsstrom, 54
über den dasselbe gilt, was wir über die reinen Polarisationsströme gesagt haben, und in den constanten oder Zersetzungsstrom. Auf den letzteren ist dieselbe Betrachtungsweise anwendbar, wie für die constanten Ströme ohne Gasentwickelung. Die durch den Strom erzeugte Wärme muss gleich sein der durch den chemischen Process zu erzeugenden. Ist z. B. in

1) Pogg. Ann. LIX. 229.
2) Ann. LXVII. 531.

einer Combination von Zink und einem negativen Metalle in verdünnter Schwefelsäure die Wärmeentbindung eines Atomes Zink bei seiner Auflösung und der Austreibung des Wasserstoffes $a_z - a_h$, so ist die in der Zeit dt zu erzeugende Wärme:

$$J(a_z - a_h)\,dt.$$

Wäre nun die Wärmeentwickelung in allen Theilen einer solchen Kette proportional dem Quadrate der Intensität, also $J^2 W dt$, so hätten wir wie oben:

$$J = \frac{a_z - a_h}{W},$$

also die einfache Ohm'sche Formel. Da diese aber ihre Anwendung hier nicht findet, so folgt, dass es Querschnitte in der Kette giebt, in denen die Wärmeentwickelung einem anderen Gesetze folgt, deren Widerstand also nicht als constant zu setzen ist. Ist z. B. die Entbindung von Wärme in irgend einem Querschnitte direct proportional der Intensität, wie es unter anderen die durch Aenderung der Aggregatzustände gebundene Wärme sein muss, also $\vartheta = \mu J dt$, so ist:

$$J(a_z - a_h) = J^2 w + J\mu$$

$$J = \frac{a_z - a_h - \mu}{w}.$$

Die Grösse μ würde also mit in dem Zähler der Ohm'schen
55 Formel erscheinen. Der Widerstand eines solchen Querschnittes würde sein $w = \vartheta / J^2 = \mu / J$. Ist nun aber die Wärmeentwickelung desselben nicht genau proportional der Intensität, also die Grösse μ nicht ganz constant, sondern mit der Intensität steigend, so erhalten wir den Fall, welcher den Beobachtungen von Lenz und Poggendorf entspricht.

Als electromotorische Kraft einer solchen Kette würde nach Analogie der constanten Ketten, sobald der Polarisationsstrom aufgehört hat, die zwischen Zink und Wasserstoff zu bezeichnen sein. In der Ausdrucksweise der Contacttheorie wäre es die zwischen Zink und dem negativen Metall, vermindert um die Polarisation des letzteren in Wasserstoff. Wir müssen dann nur dieses Maximum der Polarisation für unabhängig von der Intensität des Stromes ansehen, und für verschiedene Metalle um eben so viel verschieden, als

es die electromotorischen Kräfte dieser Metalle sind. Der Zähler der Ohm'schen Formel, berechnet aus Intensitätsmessungen bei verschiedenen Widerständen, kann aber ausser der electromotorischen Kraft einen Summanden enthalten, welcher von dem Uebergangswiderstande herrührt, und welcher bei verschiedenen Metallen vielleicht verschieden ist. Dass ein Uebergangswiderstand existire, folgt nach dem Princip von der Erhaltung der Kraft aus der Thatsache, dass die Intensitäten, dieser Ketten nicht nach dem Ohm'schen Gesetz zu berechnen sind, da doch die chemischen Processe dieselben bleiben.[1]) Dafür, dass in Ketten, wo die Polarisationsströme aufgehört haben, der Zähler der Ohm'schen Formel von der Natur des negativen Metalls abhänge, habe ich noch keine sicheren Beobachtungen auffinden können. Um die Polarisationsströme 56
schnell zu beseitigen ist es hierbei nöthig, die Dichtigkeit des Stromes an der polarisirten Platte möglichst zu erhöhen, theils durch Einfügung von Zellen mit constanter electromotorischer Kraft, theils durch Verkleinerung der Oberfläche dieser Platte. In den hierher gehörenden Versuchen von Lenz und Saweljew[2]) ist nach ihrer eigenen Angabe die Constanz der Ströme nicht erreicht worden, die von ihnen berechneten electromotonischen Kräfte enthalten demnach noch die der Polarisationsströme. Sie fanden für Zink Kupfer in Schwefelsäure 0,51, für Zink Eisen 0,76, für Zink Quecksilber 0,90.

Schliesslich bemerke ich noch, dass ein Versuch, die Gleichheit der auf chemischem und electrischem Wege entwickelten Wärme experimentell nachzuweisen gemacht ist von Joule[3]). Doch ist gegen seine Messungsmethoden mancherlei einzuwenden. Er setzt z. B. für die Tangentenbussole das Gesetz der Tangenten als richtig voraus bis in die höchsten Grade hinein, hat keine constanten Ströme, sondern berechnet deren Intensität nur nach dem Mittel der Anfangs- und Endablenkung, setzt electromotorische Kraft und Widerstand von Zellen mit

1) Die Occlusion des Wasserstoffes in den Metallen war noch nicht bekannt (1881).

2) Bull. de la classe phys. math. de l'acad. d. scienc. de St. Petersbourg. T. V. p. 1. und Pogg. Ann. LVII. 497.

3) Philos. Magaz. 1841. vol. XIX. S. 275. und 1843. XX. S. 204.

Gasentwickelung als constant voraus. Auf die Abweichung seiner quantitativen Wärmebestimmungen von anderweitig gefundenen Zahlen hat Hess schon aufmerksam gemacht. Dasselbe Gesetz will E. Becquerel empirisch bestätigt gefunden haben nach einer Anzeige desselben in den Comptes rendus (1843. No. 16).

57 Wir haben oben uns genöthigt gesehen den Begriff der Contactkraft zurückzuführen auf einfache Anziehungs- und Abstossungskräfte, um denselben mit unserem Princip in Uebereinstimmung zu bringen. Versuchen wir nun auch, die electrischen Bewegungen zwischen Metallen und Flüssigkeiten darauf zurückführen. Denken wir uns die Theile des zusammengesetzten Atomes einer Flüssigkeit mit verschiedenen Anziehungskräften gegen die Electricitäten begabt, und demgemäss verschieden electrisch. Scheiden diese Atomtheile an den metallischen Elektroden aus, so giebt jedes Atom nach dem electrolytischen Gesetz eine von seinen electromotorischen Kräften unabhängige Menge $\pm E$ an dieselben ab. Wir können uns deshalb vorstellen, dass auch in der chemischen Verbindung schon die Atome mit Aequivalenten $\pm E$ verbunden sind, welche für alle ebenso gleich sind, wie die stöchiometrischen Aequivalente der wägbaren Stoffe in verschiedenen Verbindungen. Tauchen nun zwei verschieden electrische Metalle in eine Flüssigkeit ein, ohne dass ein chemischer Process stattfindet, so werden die positiven Bestandtheile derselben von dem negativen Metall, die negativen vom positiven angezogen. Der Erfolg wird also eine veränderte Richtung und Vertheilung der verschieden electrischen Flüssigkeitstheilchen sein, deren Eintreten wir als Polarisationsstrom wahrnehmen. Die bewegende Kraft dieses Stromes würde die electrische Differenz der Metalle sein, ihr müsste deshalb auch seine anfängliche Intensität proportional sein; seine Dauer muss bei gleicher Intensität der Menge der an den Platten anzulagernden Atome, also ihrer Oberfläche proportional sein. Bei den mit chemischer Zersetzung verbundenen Strömen kommt es dagegen
58 nicht zu einem dauernden Gleichgewicht der Flüssigkeitstheilchen mit den Metallen, weil die positiv geladene Oberfläche des positiven Metalls fortdauernd entfernt wird, dadurch dass

sie selbst zum Bestandtheil der Flüssigkeit wird, also eine stete Erneuerung der Ladung hinter ihr stattfinden muss. Durch jedes Atom des positiven Metalls, welches mit einem Aequivalent positiver Electricität vereinigt in die Lösung eintritt, wofür ein Atom des negativen Bestandtheiles neutral electrisch ausscheidet, wird eine Beschleunigung der einmal begonnenen Bewegung hervorgerufen, sobald die Quantität der Anziehungskraft des ersteren Atomes zur $+E$, bezeichnet durch a_z, grösser ist als die des letzteren a_c. Die Bewegung würde dadurch in das Unbegrenzte an Geschwindigkeit zunehmen, wenn nicht auch zugleich der Verlust an lebendiger Kraft durch Wärmeentwickelung wüchse. Sie wird deshalb nur wachsen bis dieser Verlust, $J^2 W dt$, gleich ist dem Verbrauch an Spannkraft $J(a_z - a_c)dt$ oder bis:

$$J = \frac{a_z - a_c}{W}.$$

Ich glaube, dass in dieser Unterscheidung der galvanischen Ströme in solche, welche Polarisation, und in solche, welche Zersetzung hervorbringen, wie sie durch das Princip von der Erhaltung der Kraft bedingt wird, der einzige Ausweg zu finden sein möchte, um gleichzeitig die Schwierigkeiten der chemischen und der Contacttheorie zu umgehen.

Thermoelectrische Ströme. Bei diesen Strömen müssen wir die Quelle der Kraft in den von Peltier gefundenen Wirkungen auf die Löthstellen suchen, welche einen dem gegebenen Strom entgegengesetzten erzeugen würden.

Denken wir uns einen hydroelectrischen constanten Strom, 59
in dessen Leitungsdraht ein Stück eines anderen Metalls eingelöthet ist, dessen Löthstellen die Temperaturen t' und t'' haben, so wird der electrische Strom während des Zeittheilchens dt in der ganzen Leitung die Wärme $J^2 W dt$ erzeugen, ausserdem in der einen Löthstelle $q_, dt$ entwickeln, in der anderen $q_{,,} dt$ verschlucken. Ist A die electromotorische Kraft der hydroelectrischen Kette, also $AJdt$ die chemisch zu erzeugende Wärme, so folgt aus dem Gesetze von der Erhaltung der Kraft:

$$AJ = J^2 W + q_, - q_{,,}. \quad (1)$$

Ist B_t die electromotorische Kraft der Thermokette, wenn eine der Löthstellen die Temperatur t und die andere irgend eine constante Temperatur z. B. 0° hat, so ist für die ganze Kette:

$$J = \frac{A - B_{t_{,}} + B_{t_{,,}}}{W}.$$

Für $t_{,} = t_{,,}$ wird:

$$J = \frac{A}{W}.$$

Dies in die Gleichung (1) gesetzt giebt:

$$q_{,} = q_{,,},$$

d. h. bei gleicher Temperatur der Löthstellen derselben Metalle und gleicher Intensität des Stromes müssen die entwickelten und verschluckten Wärmemengen gleich sein, unabhängig vom Querschnitte. Dürfen wir annehmen, dass dieser Vorgang in jedem Punkte des Querschnittes derselbe ist, so folgt, dass die in gleichen Flächenräumen verschiedener Querschnitte durch denselben Strom entwickelten Wärmemengen sich wie die
60 Dichtigkeiten des Stromes verhalten, und daraus wieder, dass die durch verschiedene Ströme in den ganzen Querschnitten entwickelten sich direct wie die Intensitäten der Ströme verhalten.

Sind die Löthstellen von verschiedener Temperatur, so folgt aus den Gleichungen (1) und (2):

$$(B_{t_{,}} - B_{t_{,,}})\, J = q_{,} - q_{,,},$$

dass also bei gleichen Stromintensitäten die Wärme entwickelnde und bindende Kraft in demselben Maasse mit der Temperatur steigt, als die electromotorische.

Für beide Folgerungen sind mir bis jetzt noch keine messenden Versuche bekannt.

VI. Kraftäquivalent des Magnetismus und Electromagnetismus.

Magnetismus. Ein Magnet ist vermöge seiner anziehenden und abstossenden Kräfte gegen andere Magnete und unmagnetisches Eisen fähig, eine gewisse lebendige Kraft zu er-

zeugen. Da die Anziehungserscheinungen von Magneten vollständig herzuleiten sind aus der Annahme zweier Fluida, welche sich umgekehrt wie die Quadrate der Entfernung anziehen und abstossen, so folgt hieraus allein schon nach der im Anfang unserer Abhandlung gegebenen Herleitung, dass die Erhaltung der Kraft bei der Bewegung magnetischer Körper gegen einander stattfinden müsse. Der folgenden Theorie der Induction wegen müssen wir auf die Gesetze dieser Bewegungen etwas näher eingehen.[1])

1) Sind $m_{,}$ und $m_{,,}$ zwei magnetische Massenelemente, 61
deren Einheit diejenige ist, welche eine gleiche in der Entfernung = 1 mit der Kraft = 1 abstösst, werden entgegengesetzte Magnetismen mit entgegengesetzten Vorzeichen der Massen bezeichnet, und ist r die Entfernung zwischen $m_{,}$ und $m_{,,}$ so ist die Intensität ihrer Centralkraft:

$$\varphi = -\frac{m_{,} m_{,,}}{r^2}.$$

Der Gewinn an lebendiger Kraft beim Uebergange aus unendlicher Entfernung in die r ist $-\frac{m_{,} m_{,,}}{r}$.

2) Bezeichnen wir diese Grösse als Potential der beiden Elemente, und übertragen wir die Benennung Potential auf magnetische Körper wie bei den Electricitäten, so erhalten wir den Gewinn an lebendiger Kraft bei der Bewegung zweier Körper, deren Magnetismus sich nicht ändert, also von Stahlmagneten, wenn wir von dem Werth des Potentials am Ende der Bewegung den zu Anfang der Bewegung abziehen. Dagegen wird wie bei den Elektricitäten der Gewinn an lebendiger Kraft bei der Bewegung magnetischer Körper, deren Vertheilung sich ändert, gemessen durch die Veränderungen der Summe:

$$V + \tfrac{1}{2}(W_a + W_b),$$

wo V das Potential der Körper gegen einander, W_a und W_b das derselben auf sich selbst ist. Ist der Körper B ein unveränderlicher Stahlmagnet, so erzeugt die Annäherung eines

1) Verbesserungen hierzu im folgenden Aufsatz (1881).

Körpers von veränderlichem Magnetismus eine lebendige Kraft, gleich der Zunahme der Summe $V + \frac{1}{2} W_a$.

3) Es ist bekannt, dass die Wirkungen eines Magneten nach aussen stets durch eine gewisse Vertheilung der magne-
62 tischen Fluida an seiner Oberfläche ersetzt werden können. Wir können also statt der Potentiale der Magneten die Potentiale solcher Oberflächen setzen. Dann finden wir wie bei den leitenden electrischen Oberflächen für ein vollkommen weiches Eisen A, welches durch Vertheilung von einem Magneten B magnetisirt ist, den Gewinn C an lebendiger Kraft für die Einheit der Quantität des als positiv bezeichneten Magnetismus bei dem Uebergange von der Oberfläche des Eisens in unendliche Entfernung gegeben durch die Gleichung:

$$- QC = V + W_a.$$

Da nun jeder Magnet so viel nördlichen wie südlichen Magnetismus enthält, also Q in jedem gleich 0 ist, so folgt für ein solches Eisenstück oder für ein Stahlstück von derselben Form, Lage und Vertheilung des Magnetismus, dessen Magnetismus also vollständig durch den Magneten B gebunden ist, dass:

$$V = - W_a.$$

4) V ist aber die lebendige Kraft, welche der Stahlmagnet bei seiner Annäherung bis zur Bindung seiner Magnetismen erzeugt; sie muss nach dieser Gleichung dieselbe sein, an welchen Magneten er sich auch annähern möge, sobald es nur bis zur vollständigen Bindung kommt, weil W_a immer dasselbe bleibt. Dagegen ist die lebendige Kraft eines gleichen Eisenstückes, welches bis zu derselben Vertheilung des Magnetismus genähert wird, wie oben gezeigt ist:

$$V + \tfrac{1}{2} W = - \tfrac{1}{2} W,$$

also nur halb so gross als die des schon magnetisirten Stückes; zu bedenken ist, dass W an sich negativ ist, also $- \frac{1}{2} W$ stets positiv.

63 Wird ein Stahlstück dem vertheilenden Magneten unmagnetisch genähert, und behält es beim Entfernen den erlangten Magnetismus, so wird dabei $- \frac{1}{2} W$ an mechanischer Arbeit verloren, dafür ist der nunmehrige Magnet auch im

Stande $-\frac{1}{2}W$ Arbeit mehr zu leisten, als es das Stahlstück vorher konnte.

Electromagnetismus. Die electrodynamischen Erscheinungen sind zurückgeführt worden von Ampère auf anziehende und abstossende Kräfte der Stromelemente, deren Intensität von der Geschwindigkeit und Richtung der Ströme abhängt. Seine Herleitung umfasst aber die Inductionserscheinungen nicht. Letztere sind dagegen zugleich mit den electrodynamischen von W. Weber zurückgeführt worden auf anziehende und abstossende Kräfte der electrischen Fluida selbst, deren Intensität abhängt von der Näherungs- oder Entfernungsgeschwindigkeit und der Zunahme derselben. Für jetzt ist noch keine Hypothese aufgefunden worden, vermöge deren man diese Erscheinungen auf constante Centralkräfte zurückführen könnte. Die Gesetze der inducirten Ströme sind von Neumann[1]) entwickelt worden, indem er die experimentell für ganze Ströme gefundenen Gesetze von Lenz auf die kleinsten Theilchen derselben übertrug, und dieselben stimmen bei geschlossenen Strömen mit den Entwickelungen von Weber überein. Ebenso stimmen die Gesetze von Ampère und Weber für die electrodynamischen Wirkungen geschlossener Ströme mit der Herleitung derselben aus Rotationskräften von Grassmann.[2]) Weiter giebt uns auch die Erfahrung keine Aufschlüsse, weil bis jetzt nur mit geschlossenen oder beinahe 64
geschlossenen Strömen experimentirt worden ist. Wir wollen deshalb auch unser Princip nur auf geschlossene Ströme anwenden, und zeigen, dass daraus dieselben Gesetze herfolgen.

Es ist schon von Ampère gezeigt worden, dass die electrodynamischen Wirkungen eines geschlossenen Stromes stets ersetzt werden können durch eine gewisse Vertheilung der magnetischen Fluida an einer beliebigen von dem Strom begrenzten Fläche. Neumann hat daher den Begriff des Potentials auf die geschlossenen Ströme übertragen, indem er dafür das Potential einer solchen Fläche setzt.

Bewegt sich ein Magnet unter dem Einfluss eines Stromes,

---

1) Pogg. Ann. LXVII. 31.
2) Ann. LXIV. 1.

so muss die lebendige Kraft, die er dabei gewinnt, geliefert werden aus den Spannkräften, welche in dem Strome verbraucht werden. Diese sind während des Zeittheilchens dt nach der schon oben gebrauchten Bezeichnungsweise $AJdt$ in Wärmeeinheiten, oder $aAJdt$ in mechanischen, wenn a das mechanische Aequivalent der Wärmeeinheit ist. Die in der Strombahn erzeugte lebendige Kraft ist aJ^2Wdt, die vom Magneten gewonnene JdV/dt, wo V sein Potential gegen den von der Stromeinheit durchlaufenen Leiter ist. Also:

$$aAJdt = aJ^2 Wdt + J\frac{dV}{dt}dt,$$

folglich:

$$J = \frac{A - \frac{1}{a}\frac{dV}{dt}}{W}.$$

Wir können die Grösse $(1/a).(dV/dt)$ als eine neue electromo-
65 torische Kraft bezeichnen, als die des Inductionsstromes. Sie wirkt stets der entgegen, welche den Magneten in der Richtung, die er hat, bewegen oder seine Geschwindigkeit vermehren würde. Da diese Kraft unabhängig ist von der Intensität des Stromes, muss sie auch dieselbe bleiben, wenn vor der Bewegung des Magneten gar kein Strom vorhanden war.

Ist die Intensität wechselnd, so ist der ganze während einer gewissen Zeit inducirte Strom:

$$\int Jdt = -\frac{1}{aW}\int\frac{dV}{dt}dt = \frac{1}{a}\frac{(V_{,} - V_{,,})}{W},$$

wo $V_{,}$ das Potential zu Anfang und $V_{,,}$ zu Ende der Bewegung bedeutet. Kommt der Magnet aus sehr grosser Entfernung, so ist:

$$\int Jdt = -\frac{\frac{1}{a}V_{,,}}{W},$$

unabhängig von dem Wege und der Geschwindigkeit de Magneten.

Wir können das Gesetz so aussprechen: Die gesammt electromotorische Kraft des Inductionsstromes, den eine Lagen änderung eines Magneten gegen einen geschlossenen Strom leiter hervorbringt, ist gleich der Veränderung, die dabei i

dem Potentiale des Magneten gegen den Leiter vor sich geht, wenn letzterer von dem Strome $-1/a$ durchflossen gedacht wird. Einheit der electromotorischen Kraft ist dabei die, durch welche die willkürliche Stromeinheit in der Widerstandseinheit hervorgebracht wird. Letztere aber diejenige, in welcher jene Stromeinheit in der Zeiteinheit die Wärmeeinheit entwickelt. Dasselbe Gesetz bei Neumann l. c. § 9, nur hat 66
er statt $1/a$ eine unbestimmte Constante ε.

6) Bewegt sich ein Magnet unter dem Einflusse eines Leiters, gegen den sein Potential bei der Stromeinheit φ sei, und eines durch diesen Leiter magnetisirten Eisenstückes, gegen welches sein Potential für den durch die Stromeinheit erregten Magnetismus χ sei, so ist wie vorher:

$$aAJ = aJ^2W + J\frac{d\varphi}{dt} + J\frac{d\chi}{dt},$$

also:

$$J = \frac{A - \frac{1}{a}\left(\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\chi}{dt}\right)}{W}.$$

Die electromotorische Kraft des Inductionsstromes, welcher von der Anwesenheit des Eisenstückes herrührt, ist also:

$$-\frac{1}{a}\frac{d\chi}{dt}.$$

Wird in dem Electromagneten durch den Strom n dieselbe Vertheilung des Magnetismus hervorgerufen, wie durch den genäherten Magneten, so muss nach dem in Nr. 4 gesagten das Potential desselben gegen den Magneten, $n\chi$, gleich sein seinem Potential gegen den Leitungsdraht nV, wenn V dasselbe für die Stromeinheit bedeutet. Es ist also $\chi = V$. Wird also ein Inductionsstrom hervorgerufen dadurch, dass das Eisenstück durch Vertheilung von dem Magneten magnetisirt wird, so ist die electromotorische Kraft $-(1/a).(d\chi/dt) = -(1/a).(dV/dt)$, und wie in Nr. 7 der Gesammtstrom:

$$\int J dt = \frac{\frac{1}{a}(V_{\prime} - V_{\prime\prime})}{W}, \qquad 67$$

wo $V_{\prime}$ und $V_{\prime\prime}$ die Potentiale des magnetisirten Eisens gegen den Leitungsdraht vor und nach der Magnetisirung sind. —

Neumann folgert dies Gesetz aus der Analogie mit dem vorigen Falle.

7) Wird ein Elektromagnet unter dem Einflusse eines Stromes magnetisch, so geht durch den Inductionsstrom Wärme verloren; ist das Eisenstück weich, so wird bei der Oeffnung derselbe Inductionsstrom in entgegengesetzter Richtung gehen, und die Wärme wieder gewonnen. Ist es ein Stahlstück, welches seinen Magnetismus behält, so bleibt jene Wärme verloren, und an ihrer Stelle gewinnen wir magnetische Arbeitskraft, gleich dem halben Potential jenes Magneten bei vollständiger Bindung, wie in No. 4 gezeigt ist. Aus der Analogie der vorigen Fälle möchte es indessen nicht unwahrscheinlich sein, dass die electromotorische Kraft seinem ganzen Potential entspricht, wie Neumann den gleichen Schluss macht, und dass ein Theil der Bewegung der magnetischen Fluida wegen der Schnelligkeit derselben als Wärme verloren geht, welche hierbei in dem Magneten gewonnen wird.

8) Werden zwei geschlossene Stromleiter gegen einander bewegt, so kann die Intensität des Stromes in beiden verändert werden. Ist V ihr Potential für die Stromeinheit gegen einander, so muss wie in den vorigen Fällen und aus denselben Gründen sein:

$$A_{,} J_{,} + A_{,,} J_{,,} = J_{,}^2 W_{,} + J_{,,}^2 W_{,,} + \frac{1}{a} J_{,} J_{,,} \frac{dV}{dt}.$$

68 Ist nun die Stromintensität in dem einen Leiter $W_{,,}$ sehr viel geringer als in dem anderen $W_{,}$, so dass die electromotoriscshe Inductionskraft, welche von $W_{,,}$ in $W_{,}$ erregt wird, gegen die Kraft $A_{,}$ verschwindet, und wir $J = A_{,}/W_{,}$ setzen können, so erhalten wir aus der Gleichung:

$$J_{,,} = \frac{A_{,,} - \frac{1}{a} J_{,} \frac{dV}{dt}}{W_{,,}}.$$

Die electromotorische Inductionskraft ist also dieselbe, welche ein Magnet erzeugen würde, der dieselbe electrodynamische Kraft hat als der inducirende Strom. Dieses Gesetz hat W. Weber[1]) experimentell erwiesen.

1) Elektrodynamische Maassbestimmungen. S. 71—75.

Ist dagegen die Intensität in $W_{,}$ verschwindend klein gegen die in $W_{,,,}$ so findet sich:

$$J_{,} = \frac{A_{,} - \frac{1}{a} J_{,,} \frac{dV}{dt}}{W_{,}}.$$

Die electromotorischen Kräfte der Leiter aufeinander sind sich also gleich, wenn die Stromintensitäten gleich sind, wie auch die Form der Leiter sein mag.

Die gesammte Inductionskraft, welche während einer gewissen Bewegung der Leiter gegen einander ein Strom liefert, der selbst durch die Induction nicht verändert wird, ist hiernach wieder gleich der Aenderung in dem Potentiale desselben gegen den anderen von $-1/a$ durchflossenen Leiter. In dieser Form erschliesst Neumann das Gesetz aus der Analogie der magnetischen und electrodynamischen Kräfte l. c. § 10, und dehnt es auch auf den Fall aus, wo die Induction in ruhenden 69
Leitern durch Verstärkung oder Schwächung der Ströme hervorgebracht wird. W. Weber zeigt die Uebereinstimmung seiner Annahme für die electrodynamischen Kräfte mit diesen Theoremen l. c. S. 147—153. Aus dem Gesetze von der Erhaltung der Kräfte ist für diesen Fall keine Bestimmung zu entnehmen; nur muss durch Rückwirkung des inducirten Stromes auf den inducirenden eine Schwächung des letzteren eintreten, welche einem ebenso grossen Wärmeverlust entspricht, als in dem inducirten Strome gewonnen wird. Dasselbe Verhältniss muss bei der Wirkung des Stromes auf sich selbst zwischen der anfänglichen Schwächung und dem Extracurrent stattfinden. Indessen lassen sich hieraus keine weiteren Folgerungen ziehen, weil die Form des Ansteigens der Ströme nicht bekannt ist, und ausserdem das Ohm'sche Gesetz nicht unmittelbar anwendbar ist, da diese Ströme wohl nicht gleichzeitig die ganze Ausdehnung der Leitung einnehmen möchten.

Es bleiben uns von den bekannten Naturprocessen noch die der organischen Wesen übrig. In den Pflanzen sind die Vorgänge hauptsächlich chemische, und ausserdem findet, wenigstens in einzelnen, eine geringe Wärmeentwickelung

statt. Vornehmlich wird in ihnen eine mächtige Quantität chemischer Spannkräfte deponirt, deren Aequivalent uns als Wärme bei der Verbrennung der Pflanzensubstanzen geliefert wird. Die einzige lebendige Kraft, welche dafür nach unseren bisherigen Kenntnissen während des Wachsthums der Pflanzen absorbirt wird, sind die chemischen Strahlen des Sonnenlichtes. Es fehlen uns indessen noch alle Angaben zur näheren Ver-
70 gleichung der Kraftäquivalente, welche hierbei verloren gehen und gewonnen werden. Für die Thiere haben wir schon einige, nähere Anhaltpunkte. Dieselben nehmen die complicirten oxydablen Verbindungen, welche von den Pflanzen erzeugt werden, und Sauerstoff in sich auf, geben dieselben theils verbrannt als Kohlensäure und Wasser, theils auf einfachere Verbindungen reducirt wieder von sich, verbrauchen also eine gewisse Quantität chemischer Spannkräfte und erzeugen dafür Wärme und mechanische Kräfte. Da die letzteren eine verhältnissmässig geringe Arbeitsgrösse darstellen gegen die Quantität der Wärme, so reducirt sich die Frage nach der Erhaltung der Kraft ungefähr auf die, ob die Verbrennung und Umsetzung der zur Nahrung dienenden Stoffe eine gleiche Wärmequantität erzeuge, als die Thiere abgeben. Diese Frage kann nach den Versuchen von Dulong und Despretz wenigstens annähernd bejaht werden.[1])

Schliesslich muss ich noch einiger Bemerkungen von Matteucci gegen die hier durchgeführte Betrachtungsweise erwähnen, welche sich in der Biblioth. univ. de Genève Suppl. No. 16. 1847. 15. Mai. S. 375 finden. Derselbe geht aus von dem Satze, dass nach derselben ein chemischer Process nicht so viel Wärme erzeugen könne, wenn er Electricität, Magnetismus oder Licht zugleich entwickelt, als wenn dies nicht der Fall sei. Er führt dagegen an, dass, wie er durch eine Reihe von Messungen zu zeigen sich bemüht, Zink bei seiner Auf-
71 lösung in Schwefelsäure ebenso viel Wärme erzeugt, wenn die-

1) Näher eingegangen bin ich auf diese Frage in dem Encycl. Wörterbuch der medicinischen Wissenschaften. Art. „Wärme", (diese Sammlung Bd. II) und in den Fortschritten der Physik im Jahre 1845, dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. S. 346 (diese Sammlung Bd. I Nr. 1).

selbe unmittelbar durch die chemische Verwandtschaft geschieht, als wenn es mit Platin eine Kette bildet, und dass ein electrischer Strom, der einen Magneten in Ablenkung erhält, ebenso viel chemische und thermische Wirkungen erzeuge als ohne diese Ablenkung. Dass Matteucci diese Thatsachen als Einwürfe betrachtet, rührt von einem vollständigen Missverstehen der Ansicht her, welche er widerlegen will, wie sich aus einem Vergleiche mit unserer Darstellung dieser Verhältnisse sogleich ergiebt. Dann führt er zwei calorimetrische Versuche an über die Wärme, welche bei der Verbindung von Aetzbaryt mit concentrirter oder verdünnter Schwefelsäure sich entwickelt, und über die, welche in einem Drathe in Gasen von verschiedenem Abkühlungsvermögen durch denselben electrischen Strom erzeugt wird, wobei jene Masse und der Drath bald glühend werden, bald nicht. Er findet diese Wärmemengen im ersteren Falle nicht kleiner als im letzteren. Wenn man aber die Unvollkommenheit unserer calorimetrischen Vorrichtungen bedenkt, so kann es nicht auffallen, dass Unterschiede der Abkühlung durch Strahlung nicht bemerkt werden, welche davon herrühren könnten, dass diese Strahlung je nach der leuchtenden oder nicht leuchtenden Natur derselben die umgebenden diathermanen Mittel leichter oder schwerer durchdringt. In dem ersteren Versuche von Matteucci geschieht die Vereinigung des Baryts mit der Schwefelsäure noch dazu in einem nicht diathermanen Gefässe von Blei, wo die leuchtenden Strahlen gar nicht einmal herausdringen können. Die Unvollkommenheiten von Matteucci's Methoden bei diesen Messungen können wir daher wohl unerwähnt lassen.

Ich glaube durch das Angeführte bewiesen zu haben, dass 72
das besprochene Gesetz keiner der bisher bekannten Thatsachen der Naturwissenschaften widerspricht, von einer grossen Zahl derselben aber in einer auffallenden Weise bestätigt wird. Ich habe mich bemüht die Folgerungen möglichst vollständig aufzustellen, welche aus der Combination desselben mit den bisher bekannten Gesetzen der Naturerscheinungen sich ergeben, und welche ihre Bestätigung durch das Experiment noch erwarten müssen. Der Zweck dieser Untersuchung, der mich zugleich wegen der hypothetischen Theile derselben entschuldigen

mag, war, den Physikern in möglichster Vollständigkeit die theoretische, practische und heuristische Wichtigkeit dieses Gesetzes darzulegen, dessen vollständige Bestätigung wohl als eine der Hauptaufgaben der nächsten Zukunft der Physik betrachtet werden muss.

Zusätze (1881).

1) Zu Seite 13. Die philosophischen Erörterungen der Einleitung sind durch Kant's erkenntnisstheoretische Ansichten stärker beeinflusst, als ich jetzt noch als richtig anerkennen möchte. Ich habe mir erst später klar gemacht, dass das Princip der Causalität in der That nichts Anderes ist als die Voraussetzung der Gesetzlichkeit aller Naturerscheinungen. Das Gesetz als objective Macht anerkannt, nennen wir Kraft. Ursache ist seiner ursprünglichen Wortbedeutung nach das hinter dem Wechsel der Erscheinungen unveränderlich Bleibende oder Seiende, nämlich der Stoff und das Gesetz seines Wirkens, die Kraft. Die auf Seite 14 berührte Unmöglichkeit beide isolirt zu denken, ergiebt sich also einfach daraus, dass das Gesetz einer Wirkung Bedingungen voraussetzt, unter denen es zur Wirksamkeit kommt. Eine von der Materie losgelöste Kraft wäre die Objectivirung eines Gesetzes, dem Bedingungen seiner Wirksamkeit fehlen.

2) Zu Seite 15. Die Nothwendigkeit der Auflösung der Kräfte in solche, die sich auf Punkte beziehen, kann aus dem Princip der vollständigen Begreifbarkeit der Natur hergeleitet werden für die Massen, auf welche die Kräfte wirken, insofern vollständige Kenntniss der Bewegung fehlt, wenn nicht die Bewegung jedes einzelnen materiellen Punktes angegeben werden kann. Aber die gleiche Nothwendigkeit scheint mir nicht zu bestehen für die Massen, von denen die Kräfte ausgehen. Ich habe dies schon zum Theil im folgenden Aufsatze besprochen. Die Erörterungen in I und II des Textes sind zum Theil nur zulässig, wenn diese Auflösbarkeit in Punktkräfte als von vorn herein feststehend beibehalten wird. Dass die Bewegungskräfte, wie sie durch Newton definirt sind, die nach dem Gesetz des Parallelogramms construirten Resultanten aller Einzelkräfte sind, die von sämmtlichen einzelnen vorhan-

denen Massenelementen ausgehen, kann ich nur noch als ein durch Erfahrung gefundenes Naturgesetz anerkennen. Es sagt eine Thatsache aus: Die Beschleunigung, welche ein Massenpunkt erfährt, wenn mehrere Ursachen zusammenwirken, ist die Resultante (geometrische Summe) derjenigen Beschleunigungen, welche die einzelnen Ursachen einzeln herbeigeführt haben würden. Nun kommt freilich der Fall empirisch vor, dass zwei Körper, z. B. zwei Magnete, die gleichzeitig auf einen dritten wirken, eine Kraft ausüben, die nicht einfach die Resultante der Kräfte ist, die jeder allein genommen ausüben würde. Wir kommen in diesem Falle mit der Annahme aus, dass jeder einzelne Magnet in dem anderen die Anordnung einer unsichtbaren imponderablen Substanz verändert. Aber ich kann das Princip der Begreiflichkeit nicht mehr als zureichend für die Folgerung anerkennen, dass die durch das Zusammenwirken zweier oder mehrerer Bewegungsursachen entstehende Wirkung nothwendig durch (geometrische) Summirung aus denen der einzelnen gefunden werden müsse.

Sowohl dieser thatsächliche Inhalt von Newton's zweitem Axiom, wie das weiter unten ausgesprochene Princip, dass die Kräfte, welche zwei Massen aufeinander ausüben, nothwendig bestimmt sein müssen, wenn die Lage der Massen vollständig gegeben ist, sind verlassen worden in denjenigen electrodynamischen Theorien, welche die Kraft zwischen electrischen Quantis von deren Geschwindigkeit und Beschleunigung abhängig machen. Die in dieser Richtung gemachten Versuche haben bisher noch immer in Widersprüche gegen die innerhalb des Bereichs unserer bisherigen Erfahrung ausnahmslos bewährten mechanischen Principien von der Gleichheit der Action und Reaction und von der Constanz der Energie geführt, worüber später in den electrodynamischen Abhandlungen dieses Bandes mehr die Rede sein wird. Wenn für Electricität in Leitern nur labiles Gleichgewicht existirte, so wäre damit auch die Eindeutigkeit und Bestimmtheit der Lösungen electrischer Probleme verloren gegangen, und wenn eine Kraft abhängig gemacht wird von der absoluten Bewegung, d. h. von einer veränderten Beziehung einer Masse zu etwas, was nie Gegenstand einer möglichen Wahrnehmung werden kann, nämlich zum unterschiedslosen leeren Raum, so erscheint

mir dies als eine Annahme, die die Aussicht auf vollständige Lösung der naturwissenschaftlichen Aufgaben aufgiebt, was meiner Meinung nach erst geschehen dürfte, wenn alle anderen theoretischen Möglichkeiten erschöpft wären.

3) Zu Seite 20. Dieser viel gebrauchte Beweis ist ungenügend für den Fall, dass die Kräfte von den Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen abhängen sollten, worauf mich Hr. Lipschitz aufmerksam machte. Denn man kann auch setzen:

$$X = \frac{dU}{dx} + Q\cdot\frac{dz}{dt} - R\cdot\frac{dy}{dt}$$
$$Y = \frac{dU}{dy} + R\cdot\frac{dx}{dt} - P\cdot\frac{dz}{dt}$$
$$Z = \frac{dU}{dz} + P\cdot\frac{dy}{dt} - Q\cdot\frac{dx}{dt},$$

worin U eine Function der Coordinaten, P, Q, R dagegen beliebige Functionen der Coordinaten und ihrer Differentialquotienten seien, so ist:

$$X\cdot\frac{dx}{dt} + Y\cdot\frac{dy}{dt} + Z\cdot\frac{dz}{dt} = \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mq^2\right],$$

also die lebendige Kraft eine Function der Coordinaten. Die mit den Factoren P, Q, R versehenen Zusätze zu den Werthen der Kraftcomponenten repräsentiren eine resultirende Kraft, welche senkrecht zu der resultirenden Geschwindigkeit des bewegten Punktes ist. Eine solche Kraft würde ersichtlich die Krümmung der Bahn verändern aber nicht die lebendige Kraft.

Wenn man die Giltigkeit des Gesetzes von der Action und Reaction festhält und die Auflösbarkeit in Punktkräfte, so bleibt der im Text aufgestellte allgemeine Satz aber richtig. Denn das genannte Gesetz lässt für ein Punktpaar nur Kräfte zu, welche in Richtung der Verbindungslinie gleiche Intensität und entgegengesetzte Richtung haben. Die zu den Geschwindigkeiten senkrechten Kräfte würden daher nur in den Momenten eintreten können, wo beide Geschwindigkeiten senkrecht zur Verbindungslinie wären.

Der Schlusssatz des Abschnittes muss also den in der Anmerkung gemachten Zusatz erhalten.

4) Zu Seite 27. Auch dieser Satz ist zu weit gefasst, da wir die vorausgehenden allgemeinen Sätze auf die Fälle beschränken müssen, wo Gleichheit der Action und Reaction allgemein gilt. Wenn wir die letztere fallen lassen, so zeigt das neuerdings von Hrn. Clausius aufgestellte electrodynamische Grundgesetz einen Fall, wo Kräfte, die von den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen abhängen, doch nicht ins Unendliche Triebkraft erzeugen können.

5) Zu Seite 41. Zur Geschichte der Entdeckung des Gesetzes von der Erhaltung der Kraft wäre hier noch nachzutragen, dass R. Mayer 1842 seinen Aufsatz „Ueber die Kräfte der unbelebten Natur"[1]), veröffentlicht hatte, und 1845 die Abhandlung über „Die organische Bewegung in ihrem Zusammenhange mit dem Stoffwechsel". Heilbronn. Schon in dem ersten Aufsatze ist die Ueberzeugung von der Aequivalenz der Wärme und Arbeit ausgesprochen und das Aequivalent der Wärme auf demselben Wege, der im Texte als der von Holtzmann angegeben ist, auf 365 m.kg berechnet. Der zweite Aufsatz ist seinem allgemeinen Ziele nach im wesentlichen zusammenfallend mit dem meinigen. Ich habe beide Aufsätze erst später kennen gelernt, und seitdem ich sie kannte, nie unterlassen, wo ich öffentlich von der Aufstellung des hier besprochenen Gesetzes zu reden hatte[2]), R. Mayer in erster Linie zu nennen, auch habe ich seine Ansprüche, so weit ich sie vertreten konnte, gegen die Freunde Joule's, welche dieselben gänzlich zu leugnen geneigt waren, in Schutz genommen. Ein von mir in diesem Sinne an Hrn. P. G. Tait geschriebener Brief ist von diesem in der Vorrede zu seinem Buche: „Sketch of Thermodynamics" (Edinburgh, 1868) abgedruckt. Ich lasse ihn hier folgen:

„Ich muss sagen, dass mir die Entdeckungen von Kirchhoff auf diesem Felde (Radiation and Absorption) als einer

1) Annalen der Chemie und Pharmacie von Wöhler und Liebig. Bd. XLII p. 233. — Beide Aufsätze wieder abgedruckt in „Die Mechanik der Wärme" in gesammelten Schriften von J. R. Mayer. Stuttgart. Cotta 1867.

2) S. meine „Populären wissenschaftlichen Vorträge. Heft II S. 112 aus dem Jahre 1854. Ebenda S. 141 (1862). Ebenda S. 194 (1869).

der lehrreichsten Fälle in der Geschichte der Wissenschaft erscheinen, eben auch deshalb weil viele andere Forscher vorher schon dicht am Rande derselben Entdeckung gewesen waren. Kirchhoff's Vorgänger verhalten sich zu ihm in diesem Felde ungefähr so, wie in Bezug auf die Erhaltung der Kraft Rob. Mayer, Colding und Séguin zu Joule und W. Thomson."

„Was nun Robert Mayer betrifft, so kann ich allerdings den Standpunkt begreifen, den Sie ihm gegenüber eingenommen haben, kann aber doch diese Gelegenheit nicht hingehen lassen, ohne auszusprechen, dass ich nicht ganz derselben Meinung bin. Der Fortschritt der Naturwissenschaften hängt davon ab, dass aus den vorhandenen Thatsachen immer neue Inductionen gebildet werden, und dass dann die Folgerungen dieser Inductionen, so weit sie sich auf neue Thatsachen beziehen, mit der Wirklichkeit durch das Experiment verglichen werden. Ueber die Nothwendigkeit dieses zweiten Geschäftes kann kein Zweifel sein. Es wird auch oft dieser zweite Theil einen grossen Aufwand von Arbeit und Scharfsinn kosten und dem, der ihn gut durchführt, zum höchsten Verdienste gerechnet werden. Aber der Ruhm der Erfindung haftet doch an dem, der die neue Idee gefunden hat; die experimentelle Prüfung ist nachher eine viel mechanischere Art der Leistung. Auch kann man nicht unbedingt verlangen, dass der Erfinder der Idee verpflichtet sei auch den zweiten Theil der Arbeit auszuführen. Damit würden wir den grössten Theil der Arbeiten aller mathematischen Physiker verwerfen. Auch W. Thomson hat eine Reihe theoretischer Arbeiten über Carnot's Gesetz und dessen Consequenzen gemacht, ehe er ein einziges Experiment darüber anstellte, und Keinem von uns wird einfallen, deshalb jene Arbeiten gering schätzen zu wollen."

„Robert Mayer war nicht in der Lage Versuche anstellen zu können; er wurde von den ihm bekannten Physikern zurückgewiesen (noch mehrere Jahre später ging es mir ebenso); er konnte nur schwer Raum für die Veröffentlichung seiner ersten zusammengedrängten Darstellung gewinnen. Sie werden wissen, dass er in Folge dieser Zurückweisung zuletzt geisteskrank wurde. Es ist jetzt schwer sich in den Gedankenkreis jener Zeit zurückzuversetzen und sich klar zu machen, wie absolut

neu damals die Sache erschien. Mir scheint, dass auch Joule lange um Anerkennung seiner Entdeckung kämpfen musste."

„Obgleich also Niemand leugnen wird, dass Joule viel mehr gethan hat als Mayer, und dass in den ersten Abhandlungen des Letzteren viele Einzelheiten unklar sind, so glaube ich doch, man muss Mayer als einen Mann betrachten, der unabhängig und selbständig diesen Gedanken gefunden hat, der den grössten neueren Fortschritt der Naturwissenschaft bedingte: und sein Verdienst wird dadurch nicht geringer, dass gleichzeitig ein Anderer in einem anderen Lande und anderem Wirkungskreise dieselbe Entdeckung gemacht, und sie freilich nachher besser durchgeführt hat als er."

In neuester Zeit haben die Anhänger metaphysischer Speculation versucht das Gesetz von der Erhaltung der Kraft zu einem a priori gültigen zu stempeln, und feiern deshalb R. Mayer als einen Heros im Felde des reinen Gedankens. Was sie als den Gipfel von Mayer's Leistungen ansehen, nämlich die metaphysisch formulirten Scheinbeweise für die a priorische Nothwendigkeit dieses Gesetzes, wird jedem an strenge wissenschaftliche Methodik gewöhnten Naturforscher gerade als die schwächste Seite seiner Auseinandersetzungen erscheinen und ist unverkennbar der Grund gewesen, warum Mayer's Arbeiten in naturwissenschaftlichen Kreisen so lange unbekannt geblieben sind. Erst als von anderer Seite her, namentlich durch Hrn. Joule's meisterhafte Arbeiten, die Ueberzeugung von der Richtigkeit des Gesetzes sich Bahn gebrochen hatte, ist man auf Mayer's Schriften aufmerksam geworden.

Uebrigens ist dieses Gesetz, wie alle Kenntniss von Vorgängen der wirklichen Welt, auf inductivem Wege gefunden worden. Dass man kein Perpetuum mobile bauen, d. h. Triebkraft ohne Ende nicht ohne entsprechenden Verbrauch gewinnen könne, war eine durch viele vergebliche Versuche, es zu leisten, allmählig gewonnene Induction.

Schon längst hatte die französische Akademie das Perpetuum mobile in dieselbe Kategorie wie die Quadratur des Zirkels gestellt, und beschlossen keine angeblichen Lösungen dieses Problems mehr anzunehmen. Das muss doch als der Ausdruck einer unter den Sachverständigen weit verbreiteten

Ueberzeugung angesehen werden. Ich selbst habe diese Ueberzeugung schon während meiner Schulzeit oft genug aussprechen und die Unvollständigkeit der dafür zu erbringenden Beweise erörtern hören. Die Frage nach dem Ursprung der thierischen Wärme forderte eine sorgfältigere und vollständige Erörterung aller Thatsachen, die darauf Bezug hatten. Als ich an diese Arbeit ging, habe ich sie immer nur als eine kritische betrachtet, durchaus nicht als eine originale Entdeckung, um deren Priorität es einen Streit geben könnte. Ich war nachher einigermassen erstaunt über den Widerstand, dem ich in den Kreisen der Sachverständigen begegnete; die Aufnahme meiner Arbeit in Poggendorff's Annalen wurde mir verweigert, und unter den Mitgliedern der Berliner Akademie war es nur C. G. J. Jacobi, der Mathematiker, der sich meiner annahm. Ruhm und äussere Förderung war in jenen Zeiten mit der neuen Ueberzeugung noch nicht zu gewinnen; eher das Gegentheil. Dass ich selbst auch bei Abfassung der Schrift in keiner Weise nach einer mir nicht zukommenden Priorität getrachtet habe, wie mir meine Gegner metaphysischer Richtung anzudichten streben, ist, meine ich, vollständig dadurch klargestellt, dass ich die andern Forscher, die in dieser Richtung gearbeitet hatten, so weit ich sie kannte, angeführt habe. Und schon neben diesen von mir angeführten Arbeiten, namentlich denen von Joule, konnte damals von einem Prioritätsanspruch für mich nicht mehr die Rede sein, so weit überhaupt in Bezug auf das allgemeine Princip von einem solchen die Rede sein konnte.

Wenn meine Litteraturkenntniss zu jener Zeit 1847 noch unvollständig war, so bitte ich dies damit zu entschuldigen, dass ich die vorliegende Abhandlung in der Stadt Potsdam ausgearbeitet habe, wo sich meine litterarischen Hülfsmittel auf die der dortigen Gymnasialbibliothek beschränkten, und dass damals die „Fortschritte der Physik“ der Berliner physikalischen Gesellschaft und andere Hülfsmittel noch fehlten, mit denen es jetzt allerdings sehr leicht geworden ist, sich in der physikalischen Litteratur zu orientiren.

6) Zu Seite 42. Der Begriff des Potentials eines Körpers, beziehlich einer electrischen Ladung auf sich

selbst ist hier in etwas anderer Bedeutung genommen, als dies später in der wissenschaftlichen Literatur gewöhnlich geschehen ist. Ich konnte in der sehr spärlichen, mir damals zugänglichen Literatur keinen Vorgänger für den Gebrauch dieses Begriffs finden, und habe mich deshalb bei seiner Bildung durch die Analogie des Potentials zweier verschiedener Ladungen gegen einander (V im Texte) leiten lassen. Wenn man sich deren Träger als congruent und entsprechende Flächenstücke als gleich stark geladen vorstellt, so lässt sich das Potential V der beiden bilden. Nun kann man sich die beiden Körper in congruente Lage übergeführt denken; dann wird V das, was ich hier mit W bezeichnet habe. Darin kommt jede Combination je zweier electrischer Theilchen e und ε zweimal in Rechnung. Das so gebildete W ist nicht der Werth der Arbeit, wie auch im Texte festgestellt wird, sondern der letztere ist $\frac{1}{2}W$ (S. 43).[1] In meinen späteren Arbeiten habe ich mich dem zweckmässigeren Gebrauche anderer Autoren angeschlossen und $\frac{1}{2}W$ als das Potential des Körpers auf sich selbst bezeichnet. S. darüber auch den folgenden Aufsatz.

1) Die betreffende Stelle war im Original am Schluss als Berichtigung eingeführt.

III.

Erwiderung auf die Bemerkungen von Hrn. Clausius.

Poggendorff's Annalen Bd. 91. S. 241—260 (1854).

---

241 Hr. Clausius greift in diesen Annalen Bd. LXXXIX, S. 568 einige Stellen meiner Schrift über die Erhaltung der Kraft an. Bei dem ersten Punkte, den er behandelt, die Ableitung des Gesetzes der Wärmeentwickelung bei electrischen Entladungen aus dem Principe von der Erhaltung der Kraft betreffend, ist seine Polemik durch ein vollständiges Missverständniss dessen, was ich gemeint und ausgesprochen habe, bedingt.

Ich soll nämlich von der irrigen Ansicht ausgegangen sein, das, was ich Potential einer Masse auf sich selbst genannt habe, sei gleich der gethanen Arbeit, während es doch in Wahrheit doppelt so gross ist, und als Beleg dafür citirt Clausius auf S. 569 seines Aufsatzes eine Stelle aus S. 39 meiner Schrift so, als hätte ich diese Stelle allgemeingültig hingestellt, während ich ihr vielmehr besondere Annahmen vorausgeschickt habe, welche Bedingungen ihrer Gültigkeit sind. Wenn aber auch meine Worte in jener Stelle vielleicht einen Zweifel erregen konnten, so habe ich doch auf der folgenden Seite den auch von Clausius citirten mathematischen Ausdruck für die durch zwei electrisirte Körper repräsentirte Arbeit gegeben, aus der meine Ansicht über diesen Punkt jedenfalls ganz unzweideutig zu entnehmen war. Man braucht nur den einen der beiden Körper als unendlich gross und unendlich entfernt anzunehmen, so erhält man die Arbeit, welche der electrischen Vertheilung in dem anderen Körper entspricht, gleich dem halben Potentiale

seiner Electricität auf sich selbst, also übereinstimmend mit Clausius gleich dem, was dieser ganzes Potential genannt hat. Ich habe diese Folgerung an jener Stelle nicht ausdrücklich ausgesprochen, weil wir es, streng genommen, nie mit einem electrischen Körper allein zu thun haben, sondern stets mindestens mit zweien, von denen der zweite die Erde sein kann. 242
Doch findet sich die genannte Folgerung für ganz analoge Verhältnisse bei Magneten auf S. 63 meiner Schrift, wo ausdrücklich das halbe Potential eines Magneten auf sich selbst als Maass der Arbeit anerkannt wird.[1])

Meine Beweisführung geht nicht von einer falschen Annahme über das Arbeitsäquivalent des genannten Potentiales aus, sondern hat im Gegentheile den Zweck dies Arbeits-Aequivalent erst zu finden. Bei einer Bewegung zweier electrisirten Körper ohne Aenderung der Vertheilung ist, wie ich unmittelbar vorher gezeigt habe, der Gewinn an Arbeit der Differenz des Potentials der electrischen Massen aufeinander gleich. Jetzt musste auch der Arbeitsgewinn bei Aenderung der Vertheilung gefunden werden. Dies geschah durch die Betrachtung eines Falles von Entladung, wobei ich die wirkende Electricität so in vier electrische Massen eintheilte, dass die Arbeit, welche bei der Entladung durch Vertheilungsänderungen dieser vier Massen entstand, gleich Null war, indem nämlich zwei von diesen vier Massen ihren Platz und ihre Vertheilung behielten, zwei andere von gleicher Grösse und entgegengesetztem Zeichen beides vertauschten, wodurch offenbar keine Arbeit gewonnen oder verloren wird. Es wurde dadurch also ein Fall von Bewegung mit Vertheilungsänderung auf einen ohne Vertheilungsänderung zurückgeführt, und es konnte deshalb die gewonnene Arbeit gleich der Differenz der Potentialsumme gesetzt werden. Allerdings habe ich den Grund, warum letzteres geschehen konnte, dem Leser zu ergänzen überlassen. Wenn Hr. Clausius meinen Beweis in diesem Sinne ansieht, wird er ihn, denke ich, richtig finden.

Zweitens nimmt Clausius Anstoss daran, dass ich eine von Vorsselman de Heer aus den Versuchen von Riess

1) Siehe auch S. 45 und Zusatz 6 zur vorigen Abhandlung.

gezogene Folgerung aufgenommen habe, welche eine unerlaubte Verallgemeinerung der durch die Versuche gewonnenen Resultate enthalte. Er hat nicht bemerkt, dass ich dabei selbst auf
243 den Aufsatz von Riess verwiesen habe, welcher die Bedenken gegen eine solche Verallgemeinerung enthält. Ich habe also nichts Unsicheres als sicher, und nichts Lückenhaftes als vollständig ausgeben wollen. In seiner eigenen Untersuchung der Sache gelangt Clausius zu dem Ergebnisse, dass die Schlussweise von Vorsselman de Heer, die ich, indem ich sie citirte, mindestens als berücksichtigenswerth bezeichnet hatte, für den vorliegenden Zweck vorläufig ganz unbrauchbar sei. Es könnte also scheinen, als sei ich ganz unberechtigt gewesen, auf jene Folgerungen hinzuweisen. Indessen bitte ich zu bemerken, dass Clausius zu dieser vollständigen Verwerfung nur dadurch kommt, dass er schliesslich auch das von Riess aus seinen Versuchen abgeleitete Gesetz als unsicher verwirft. Hebt man die thatsächliche Grundlage auf, so fallen natürlich auch alle Folgerungen daraus zusammen. Wir wollen zunächst also festzustellen suchen, was von den Schlüssen von Vorsselman de Heer stehen bleibe und für unseren Zweck brauchbar sei, wenn wir die Gesetze von Riess so weit als gültig betrachten, wie dieser es selbst als erlaubt ansieht, und ausserdem nur dieselbe Annahme als wahrscheinlich beibehalten, welche Clausius selbst anwendet, wo er aus dem theoretischen Principe zu folgern sucht, dass die Wärmeentwickelung in den einzelnen Theilen des Schliessungsdrahtes dem Producte aus Quantität und Dichtigkeit der Electricität in der Batterie proportional sein müsse, die Annahme nämlich, dass bei Schliessungsbögen von grosser reducirter Länge gegen die in den continuirlichen Theilen des Schliessungsbogens entwickelte Wärmemenge die Arbeits-Aequivalente der übrigen Entladungsvorgänge verschwinden. Diese Annahme ist in der That deshalb höchst wahrscheinlich richtig, weil die im ganzen continuirlichen Theile des Schliessungsbogens entwickelte Wärme bei wachsender Länge desselben nach den Gesetzen von Riess fortdauernd wächst, und alle übrigen bekannten Entladungswirkungen dagegen fortdauernd abzunehmen scheinen. Unter diesen Umständen können wir folgern, dass mindestens bei

Schliessungsbögen von sehr grosser reducirter Länge und einer 244
beschränkten Anzahl von Verbindungsstellen verschiedener Metalle, die bei der Entladung entwickelte Wärme bis auf verschwindend kleine Theile von der Länge, Verzweigung und Zusammensetzung des Bogens unabhängig sei. Ist w die reducirte Länge des continuirlichen Theiles des verzweigten oder unverzweigten Leitungsdrahtes, ϑ die in diesem Theile entwickelte Wärme, q die Quantität der Electricität in der Batterie, und s die Zahl der gleich construirten Leydener Flaschen, so ist nach **Riess**:

$$\vartheta = \frac{a w}{b + w} \cdot \frac{q^2}{s}$$

wo a und b Constanten sind. Wird nun bei wachsender Grösse von w nicht gleichzeitig die Zahl der Verbindungsstellen verschiedener Metalle vermehrt, so wird sich nach den obigen Voraussetzungen eine Grösse von w erreichen lassen, wo die Wärmeentwickelung in den Verbindungsstellen, im Funken, in den Belegen der Flaschen und andere Arbeits-Aequivalente gegen ϑ verschwinden, ϑ also bis auf unmerklich kleine Quantitäten die ganze entwickelte Wärme repräsentirt. Ferner wird sich w auch so gross machen lassen, dass b dagegen verschwindet, dann wird:

$$\vartheta = a \frac{q^2}{s}$$

wie es das theoretische Gesetz verlangt.

Dagegen will ich **Clausius** gern zugeben, dass wir nicht durch thatsächliche Beweise entscheiden können, ob bei den Versuchen von **Riess** die gemachten Voraussetzungen erfüllt waren, weder ob die Theile der Arbeit verschwanden, welche nicht dem Gesetze der Wärmeentwickelung in linearen Leitern von constantem Widerstande folgen, noch auch ob die Grösse b wirklich, wenn von ihr die reducirten Längen der constanten Theile des Schliessungsbogens ab und zu w hinzugerechnet wurden, gegen w verschwindend klein war. Setzen wir das theoretische Gesetz, das aus der Aequivalenz von Wärme und mechanischer Kraft hergeleitet ist, als richtig voraus, so folgt
daraus allerdings, dass, soweit die Versuche von **Riess** sich 245
der von ihm daraus abgeleiteten Formel fügen, die gesammte

Arbeitsleistung in den nicht untersuchten Theilen der Leitung äquivalent sein musste der Wärme, welche durch die Entladung in der reducirten Länge b zu entwickeln war. Denn die ganze zu leistende Arbeit ist:

$$a \cdot \frac{q^2}{s},$$

die in den linearen Leitungen vom Widerstande w entwickelte:

$$\frac{aw}{b+w} \cdot \frac{q^2}{s},$$

also die Differenz beider:

$$\frac{ab}{b+w} \cdot \frac{q^2}{s},$$

d. h. gleich der Wärme, welche in der reducirten Länge b zu entwickeln wäre. Während also durch das aus den Versuchen hergeleitete Gesetz, wenigstens theilweise, für grosse Werthe von w, wo die etwa vorhandenen störenden Umstände verschwinden mussten, das allgemeine Princip bestätigt wird, macht letzteres wieder wahrscheinlich, dass unter den Bedingungen, wo jene Versuche angestellt sind, entweder keine unbekannten Umstände einen merklichen Einfluss hatten, oder dass sie, wenn sie wirksam waren, auch mit unter jenes empirische Gesetz fielen.

Clausius deutet in seinem Aufsatze an, dass eine solche Schlussfolgerung, wie ich sie eben gezogen habe, möglich sei; doch lässt er sich nicht darauf ein sie zu ziehen, weil ihm die Richtigkeit der empirischen Formel von Riess zweifelhaft erscheint. Er macht darauf aufmerksam, dass die allerdings kleinen Abweichungen zwischen der Formel und den Beobachtungen ein constantes Gesetz zu befolgen scheinen. Indessen ist dies fast allgemein bei den Beobachtungsreihen von Riess mit dem electrischen Thermometer der Fall. Die stärkeren Erwärmungen sind fast immer kleiner gefunden, als sie nach der Rechnung sein sollten, was davon herrühren mag, dass der
246 Wärmeverlust im Thermometer bei höheren Temperaturunterschieden verhältnissmässig stärker war. Indessen sind die Abweichungen überall so gering, dass wir bei der grossen Schwierigkeit dieser Versuche deshalb wohl noch keinen Verdacht gegen die Gesetze zu schöpfen brauchen. Mindestens sehe ich keinen Grund den einen Factor der Formel, welcher vom

Widerstande abhängig ist, mehr zu bezweifeln, als den von der Ladung abhängigen, welchen Clausius für seine Folgerungen benutzt. Indessen wenn er geneigt ist die Uebereinstimmung der Versuche mit jenem ersten Theile des Gesetzes für einen blossen Zufall zu halten, so lässt sich darüber natürlich nicht weiter mit ihm rechten. Ich bin gern geneigt jeden Zweifel, der uns dazu führen kann die Thatsachen genauer festzustellen, zu ehren; aber wir müssen uns dadurch nicht verhindern lassen uns die Consequenzen solcher Gesetze klar zu machen, die durch eine lange Reihe von Thatsachen so weit erwiesen sind, als es zur Zeit möglich erscheint.

Clausius neigt sich in dieser Sache zu der Annahme, dass die bisher nicht untersuchten Theile der Arbeit einen beträchtlichen Theil der Gesammtwirkung bilden. Mir schien aus der Uebereinstimmung des theoretischen und empirischen Gesetzes das Gegentheil wahrscheinlicher. Indessen da es an factischen Entscheidungsmitteln ganz fehlt, ist es unnütz über die grössere oder geringere Wahrscheinlichkeit der einen oder der anderen Annahme zu streiten. Ich kann es deshalb wohl unterlassen, gegen die Wahrscheinlichkeitsgründe, welche Clausius vorgebracht hat Einwendungen zu machen und andere dagegen zu stellen, besonders da eine Entscheidung der Hauptpunkte durch Versuche nicht eben allzu schwer erscheint.

Der dritte Punkt, den Clausius angegriffen hat, betrifft den Beweis des folgenden allgemeinen Satzes: das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft gilt nur da, wo die wirkenden Kräfte sich auflösen lassen in Kräfte materieller Punkte, welche in der Richtung der Verbindungslinie wirken, und deren Intensität nur von der Entfernung abhängt. Wir wollen auf 247
solche Kräfte allein den besonderen Namen Centralkräfte anwenden, wie es in meiner Schrift schon geschehen ist.

Ich gebe in meiner Schrift zuerst die bekannte analytische Folgerung, dass in einem solchen Falle Richtung und Grösse der auf einen der materiellen Punkte wirkenden Gesammtkraft nur Function von Raumgrössen (Coordinaten), nicht von Zeit, Geschwindigkeit u. s. w. sein können. Dieser Theil des Beweises lässt sich ausführen, ohne die auf den betrachteten Punkt wirkende Gesammtkraft in ihre einzelnen Theile aufzulösen, die den

einzelnen wirkenden Punkten angehören. Der Grund, warum es nicht ganz unwichtig erscheint die Theile der Folgerungen besonders hinzustellen, welche eine solche Auflösung nicht erfordern, wird weiter unten erhellen. (Siehe vorher S. 70. Nr. 3.)

Um die Kräfte zu finden, mit denen zwei einzelne materielle Punkte gegeneinander wirken, muss ich natürlich das System aufgelöst denken, und zwei solche Punkte allein betrachten. Dieser Theil des Beweises kann übrigens von dem ersten ganz unabhängig gemacht werden, und auf ihn beziehen sich die Einwürfe von Clausius. Er behauptet nämlich, ich hätte ausser der Annahme, dass die Erhaltung der lebendigen Kraft stattfinde, noch eine zweite Annahme gemacht, die nämlich, dass die Grösse der Kraft Function der Entfernung sei, und daraus erst geschlossen, dass die Richtung der Kraft die der Verbindungslinie sei. Ich habe aber in der betreffenden Stelle die Behauptung über die Grösse der Kraft nicht als Annahme, sondern als Folgerung aus dem vorhergehenden Theile des Beweises hingestellt, und wenn ich ein neues Princip angewendet habe, so war es nur das Princip, wenn man es so nennen will, dass Stärke und Richtung reell vorhandener Naturkräfte nicht von der Lage bloss vorgestellter Coordinatsysteme, sondern nur von der Lage reell vorhandener physischer Objecte abhängig gemacht werden können.

Da dieser Theil des Beweises übrigens in meiner Schrift
248 durch die Verbindung mit dem ersten Theile schwerfälliger geworden ist, als nöthig war, und wie ich sehe auch in Beziehung der Gedankenverbindung schärfer sein könnte, so möge es mir wegen der Wichtigkeit des bestrittenen Punktes erlaubt sein ihn hier abgetrennt von dem ersten Theile und mit specieller Angabe aller seiner Vordersätze wieder anzuführen, damit man die Grundlagen, auf denen er ruht, klar übersehe. Das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft ist gemäss der Formulirung auf S. 9 meiner Schrift, wenn wir es nur auf bewegliche Massenpunkte beziehen, folgendes: „Wenn in beliebiger Zahl bewegliche Massenpunkte sich nur unter dem Einflusse solcher Kräfte bewegen, die sie selbst gegeneinander ausüben, so ist die Summe der lebendigen Kräfte aller zusammengenommen zu allen Zeitpunkten dieselbe, in welchen alle Punkte

dieselben relativen Lagen gegeneinander einnehmen, wie auch ihre Bahnen und Geschwindigkeiten in der Zwischenzeit gewesen sein mögen.“ Ich muss hier besonders auf den Begriff der relativen Lage aufmerksam machen, der vielleicht nicht von allen Mechanikern in diesem Principe angewendet worden ist, der aber offenbar für die physikalische Anwendung des Principes durchaus wesentlich ist. Ich denke, es wird gegen folgende Definition dieses Begriffes nichts einzuwenden sein: „Gleiche relative Lage zu einander haben bewegliche Punkte, so oft ein Coordinatensystem zu construiren ist, in welchem alle ihre Coordinaten beziehungsweise dieselben Werthe wiederbekommen.“

Aus dieser Definition folgt unmittelbar für zwei Punkte, dass sie dieselbe relative Lage zueinander haben, so oft sie sich in gleicher Entfernung von einander befinden; denn so oft dies der Fall ist, lässt sich nicht bloss ein, sondern es lassen sich durch Drehung dieses einen um die Verbindungslinie der Punkte unzählig viele Coordinatensysteme finden, in denen die Coordinaten beider Punkte beziehungsweise dieselben Werthe annehmen. Die Summe der lebendigen Kräfte soll nach der Annahme gleich sein bei gleicher relativer Lage der Punkte. Die relative Lage ist gleich bei gleicher Entfernung, folglich wird durch unsere Annahme auch bedingt, dass für zwei Punkte 249
die lebendige Kraft gleich sei bei gleicher Entfernung, also ihrer Grösse nach abhängig sei nur von der Entfernung. Hiervon geht der zweite Theil meines Beweises aus, der sich auf zwei einzelne Punkte bezieht. Nennen wir die ganze lebendige Kraft des Systemes L, welche Grösse also nach dem eben Gesagten Function der Entfernung r ist. Die Coordinaten der beiden beweglichen Punkte seien beziehlich x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2, die Componenten der Kraft, welche auf den ersten Punkt ausgeübt wird, X, Y, Z, und ihre Resultante R, so ist nach bekannten analytischen Sätzen:

$$X = \frac{dL}{dx_1} \text{ oder:}$$

$$= \frac{dL}{dr}\frac{dr}{dx_1} \text{ oder:}$$

$$X = \frac{dL}{dr}\frac{x_2 - x_1}{r} \text{ und ebenso:} \qquad (1)$$

$$Y = \frac{dL}{dr}\,\frac{y_2 - y_1}{r} \tag{2}$$

$$Z = \frac{dL}{dr}\,\frac{z_2 - z_1}{r} \tag{3}$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{dL}{dr}\,. \tag{4}$$

Die Gleichungen 1, 2 und 3 sagen aus, dass die Kraft nach der Richtung der Verbindungslinie wirke, die Gleichung 4, dass ihre Grösse Function der Entfernung r sei; *q. e. d.*

Clausius stellt meinen Sätzen die Möglichkeit entgegen, dass bei den Bewegungen eines beweglichen Punktes b um einen festen a die lebendige Kraft eine beliebige Function der Coordinaten sei. Eine solche Annahme würde zunächst der oben gegebenen Formulirung des Principes von der Erhaltung der Kraft nicht gemäss sein; sie würde also rein logisch genommen kein Gewicht gegen die Folgerung enthalten, die ich daraus gezogen habe. Aber es ist dagegen auch zu erinnern, dass wenn diese Annahme auch zuweilen bei mathematischen
250 Untersuchungen auf dem Papiere, wo man sich die Coordinataxen hinzeichnen kann, eine erlaubte und nützliche Vereinfachung der Vorstellung sein kann, sie sich doch nicht auf die physikalische Wirklichkeit übertragen lässt, so lange wir dem Grundsatze treu bleiben wollen, für reelle Wirkungen den vollständigen Grund auch nur in den Beziehungen reeller Dinge zueinander zu suchen. Denn wenn der feste Punkt a irgendwo im Raume gegeben wäre, müssten doch auch unmittelbar dadurch, dass er gegeben ist, diejenigen Richtungen gegeben sein, in denen die lebendige Kraft um ihn herum die grösste oder die kleinste ist, und diese Richtungen können ersichtlich durch die blosse Lage des Punktes nicht gegeben sein. Wir müssen hier scharf zwischen einem Punkte und einem körperlichen Elemente unterscheiden. Ein körperliches Element hat drei Dimensionen und durch seine Lage sind deshalb auch Richtungen bestimmt. Sobald uns z. B. die Lage eines körperlichen Elementes eines Krystalles vollständig gegeben ist, sind uns auch die Richtungen der Krystallaxen gegeben. Demgemäss liegt auch kein Widerspruch darin, dass ein solches Element nach verschiedenen Richtungen verschiedene Kräfte

ausübe, wie es z. B. die Elemente eines magnetisirten Körpers thun. Aber innerhalb eines solchen Elementes können wir uns auch eine unendliche Verschiedenheit von wirkenden Punkten denken. Körperliche Elemente sind deshalb noch nicht das letzte gleichartigste, bei dem unsere Analyse der Kräfte aufhören müsste.

Wenn also die Mechaniker in einem beweglichen Systeme von Massenpunkten die lebendige Kraft als Function der Coordinaten der Punkte betrachten, so dürfen sie hier statt der Punkte nicht körperliche Elemente substituiren, denn dann würde die lebendige Kraft auch noch von den Richtungen dreier fester Axen in jedem Elemente abhängen. Dem entsprechend müssen wir auch in dem Beispiele von Clausius statt des festen Punktes a ein körperliches Element setzen. Wenn nun die lebendige Kraft des bewegten Punktes b eine beliebige Function der Coordinaten φ ist, so kann gefragt 251
werden, ob in jedem Falle eine Anordnung von wirkenden Punkten mit Centralkräften innerhalb des Volumenelementes a möglich sei, welche die lebendige Kraft φ hervorbringen könnte.

Es lässt sich nun einsehen, dass dies für Entfernungen, gegen welche die Grösse des Elementes verschwindet, stets möglich sei, und auch, dass sogar jedesmal unendlich viele verschiedene Anordnungen dieser Art existiren werden. Unter ihnen ist für den zu führenden Beweis diejenige die bequemste, wo wir uns die wirkenden Punkte auf der Oberfläche einer unendlich kleinen Kugel vom Radius ϱ vertheilt denken. Die Function ϱ sei nach den Kugelfunctionen von Laplace entwickelt. Wenn φ, wie wir hier annehmen müssen, continuirlich ist, so giebt diese Entwickelung bekanntlich stets eine convergirende Reihe, und indem wir eine gewisse endliche Anzahl ihrer Glieder benutzen, können wir dadurch die Function φ mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit darstellen. Der Mittelpunkt des Coordinatensystems sei im Mittelpunkte der Kugel. Die Coordinaten eines äusseren Punktes seien:

$$x = r \cos \omega,$$
$$y = r \sin \omega \sin \vartheta,$$
$$z = r \sin \omega \cos \vartheta.$$

Die eines Punktes auf der Kugel seien:

$$a = \varrho \cos\alpha,$$
$$b = \varrho \sin\alpha \sin\beta,$$
$$c = \varrho \sin\alpha \cos\beta.$$

Wir betrachten ϱ als verschwindend klein gegen r, und nennen den reciproken Werth der letzteren Grösse e, den der Entfernung der beiden Punkte xyz und abc dagegen ε, sodass also:

$$e = \frac{1}{r}$$
$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}\cdot$$

Wir setzen ferner:

$$\varepsilon - e = \Delta e.$$

252 Bekannt ist die Entwickelung von ε nach Kugelfunctionen, deren Glieder die Form haben:

$$b_{(n,\,m)}\,\varrho^n e^{n+1} \frac{d^m P_n(\omega)}{d(\cos\omega)^m}\cdot\frac{d^m P_n(\alpha)}{d(\cos\alpha)^m} \sin^m\omega\,.\sin^m\alpha \cos[m(\vartheta-\beta)],$$

wo $b_{(n,\,m)}$ ein Zahlencoëfficient und $P_n(\omega)$ eine ganze Function des $n$ten Grades von $\cos\omega$ ist, welche entweder nur gerade oder nur ungerade Potenzen dieser Grösse enthält. Die Entwickelung von Δe ergiebt sich daraus sogleich, wenn man das erste Glied der Reihe für ε, welches e ist, wegnimmt. Die Entwickelung der Function φ liefert dagegen eine Summe von Gliedern der Form:

$$\psi_{(e)} \frac{d^m P_n(\omega)}{d(\cos\omega)^m} \sin^m\omega \cos(m\vartheta) \qquad \text{oder:}$$
$$\psi_{(e)} \frac{d^m P_n(\omega)}{d(\cos\omega)^m} \sin^m\omega \sin(m\vartheta),$$

wo ψ eine Function von e ist, die jede mögliche Form haben kann. Wir wollen die Reihe abschliessen mit den Gliedern, für welche $n = \nu$ ist.

Die Aufgabe ist also: für die Punkte der Kugeloberfläche eine Function U von ε, α und β so zu bestimmen, dass wir haben:

$$\varphi = \int_0^\pi\!\!\int_0^{2\pi} U\varrho^2 \sin\alpha\, d\alpha\, d\beta.$$

Wir können nun U in eine Summe von Theilen zerlegen, welche einzelnen Gliedern oder Gliedergruppen der Reihe für φ entsprechen. Nehmen wir aus dieser Reihe alle Glieder heraus, für welche m einen constanten Werth μ, n dagegen die Werthe $\nu, \nu - 2, \nu - 4$ u. s. w. bis μ oder $\mu + 1$ hin hat, und welche $\cos(m\vartheta)$ als Factor enthalten, und bezeichnen wir die Summe dieser Glieder mit $\varphi_{\nu\mu}$, den dazu gehörigen Theil von U mit $U_{\nu\mu}$, so lässt sich zeigen, dass der Gleichung:

$$\varphi_{\nu\mu} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} U_{\nu\mu}\, \varrho^2 \sin\alpha\, d\alpha\, d\beta \tag{1}$$

Genüge geschieht, wenn wir für $U_{\nu\mu}$ eine ähnliche Summe 253
setzen, wie $\varphi_{\nu\mu}$ ist, deren Glieder die Form haben:

$$u_{\nu\mu} \frac{d^\mu P_n(\alpha)}{d(\cos\alpha)^\mu} \sin^\mu\alpha \cos(\mu\beta),$$

wo ebenfalls n die Werthe $\nu, \nu - 2, \nu - 4$ u. s. w. bis μ oder $\mu + 1$ annimmt, und u eine Function von ε allein ist.

Setzt man nun für $U_{\nu\mu}$ in die Gleichung (1) diese Summe, entwickelt jedes u nach dem Taylor'schen Satze:

$$u_\varepsilon = u_e + \frac{d_e u}{de} \varDelta e + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{d_e^2 u}{de^2} \varDelta e^2 + \text{etc.},$$

setzt auch für $\varDelta e$ seine Entwickelung nach Kugelfunctionen, so kann man schliesslich alle vorhandenen Grössen als constante Factoren vor das Integralzeichen setzen, mit Ausnahme der Kugelfunctionen und trigonometrischen Functionen von α und β, und die Integration dann ausführen. Wenn man weiter berücksichtigt, dass:

$$\int_0^{2\pi} \cos(p\beta) \cos[q(\vartheta - \beta)]\, d\beta = 0,$$

so oft nicht p gleich q ist, dass ferner:

$$\int_0^\pi \frac{d^m P_n(\alpha)}{d(\cos\alpha)^m} \cos^p\alpha \sin^{2m+1}\alpha\, d\alpha = 0,$$

so oft p kleiner als $n - m$ ist, und behält man ferner von den Gliedern, welche als Factor dieselbe Function $u_{\nu\mu}$ oder einen ihrer Differentialquotienten enthalten, nur diejenigen bei, welche mit den niedrigsten Potenzen von ϱ multiplicirt sind, da ϱ so

klein gemacht werden kann als man will, so reducirt sich schliesslich die Gleichung (1) auf ein System linearer, partieller Differentialgleichungen:

254
$$\frac{1}{\varrho^{\nu}}\,\psi_{\nu\mu} = a_1\, e^{\nu+1}\frac{d\,u_{\nu\mu}}{d\,e} + a_2\, e^{\nu+2}\frac{d^2 u_{\nu\mu}}{d\,e^2} + \text{etc.}$$
$$+ a_{(\nu-\mu)}\, e^{2\nu-\mu}\,\frac{d^{\nu-\mu} u_{\nu\mu}}{d\,e},$$

$$\frac{1}{\varrho^{\nu-2}}\,\psi_{(\nu-2)\mu} = b_1\, e^{\nu-1}\frac{d\,u_{\nu-2,\mu}}{d\,e} + b_2\, e^{\nu}\,\frac{d^2 u_{\nu-2,\mu}}{d\,e^2} + \text{etc.}$$
$$+ b_{\nu-2-\mu}\, e^{2\nu-4-\mu}\,\frac{d^{\nu-2-\mu}\, u_{\nu-2,\mu}}{d\,e^{\nu-2-\mu}} + \varrho^2\, c_2\, c^{\nu+2}\frac{d^2 u_{\nu\mu}}{d\,e^2} + \text{etc.}$$
$$+ \varrho^2\, c_{(\nu-\mu)}\, e^{2\nu-\mu}\,\frac{d^{\nu-\mu}\, u_{\nu\mu}}{d\,e^{\nu-\mu}}.$$

u. s. w.

Die Grössen a, b, c u. s. w. sind Zahlencoëfficienten. Aus der ersten dieser Gleichungen kann man nach bekannten Integrationsregeln $u_{(\nu,\mu)}$, aus der zweiten dann $u_{(\nu-2,\mu)}$ finden u. s. w. Aus dem Verfahren, welches man bei der Integration zu befolgen hat, geht auch hervor, dass wenn die Functionen ψ für endliche Werthe von e endlich sind, auch die Grössen $\varrho^{\nu} u_{\nu\mu}$ und deren Ableitungen nach e, so weit sie in unseren Reihenentwickelungen vorkommen, für endliche Werthe von e und r stets endlich sind. Sowie somit die Theile von $U_{\nu\mu}$ gefunden sind, lassen sich die für jedes andere ähnliche Aggregat von Gliedern von φ finden, und somit lässt sich die gestellte Aufgabe jedenfalls bis zu jedem beliebigen Grade von Genauigkeit lösen.

Von einer anderen Seite hätte ich vielleicht Einwendungen gegen meinen Satz erwarten können. Ich habe nämlich ein Princip angewendet, welches allerdings in der mathematischen Mechanik ganz allgemein gebraucht wird, nach dessen Berechtigung aber vielleicht gefragt werden könnte. Ich habe nämlich vorausgesetzt, dass die Kraft, welche ein Punkt a auf einen anderen b ausübt, unabhängig von der Anwesenheit jedes dritten Punktes c sei, so dass also die Kraft welche a und c gleichzeitig auf b ausüben, die Summe derjenigen ist, welche sie einzeln genommen ausüben würden. Nur unter dieser Voraussetzung bin ich berechtigt anzunehmen, wie es in dem vor-
255 ausgegangenen Beweise geschehen musste, dass das, was für

die Kräfte der beiden bewegten Punkte a und b, wenn sie sich allein befinden gilt, auch noch gelte, wenn sie sich verbunden mit einem grösseren Systeme materieller Punkte bewegen. Wenn wir die Richtigkeit dieses Principes anerkennen, wie es bisher in der Mechanik immer geschehen ist, so folgt daraus, dass die lebendige Kraft nicht eine ganz beliebige Function der Coordinaten des Systemes sein könne, sondern eine Function, welche gewisse particuläre Differentialgleichungen erfüllen müsse. Nennen wir L die lebendige Kraft, a, b, c, d u. s. w. die einzelnen materiellen Punkte, x_a, y_a, z_a, x_b, y_b, z_b u. s. w. ihre Coordinaten, X_{ab} die der x-Axe parallele Componente der Kraft, welche der Punkt b auf den Punkt a ausübt, so ist nach bekannten Sätzen:

$$\frac{dL}{dx_a} = X_{ab} + X_{ac} + X_{ad} + \text{etc.}$$

Die Kraft X_{ab} würde nach dem eben ausgesprochenen Principe unabhängig sein von der Anwesenheit oder Lage sämmtlicher anderen materiellen Punkte mit Ausnahme von a und b, würde also auch nur Function von den Coordinaten dieser Punkte sein können, ebenso X_{ac} nur Function der Coordinaten von a und von c. Daraus folgt, wenn wir nach y_b differenziren, dass:

$$\frac{d^2 L}{dx_a, dy_b} = \frac{dX_{ab}}{dy_b}.$$

Da der Ausdruck der rechten Seite nur noch Function der Coordinaten von a und b ist, kann auch der der linken nur eine eben solche Function sein. Es müssen also alle Differentialquotienten von der Form:

$$\frac{d^3 L}{dx_a,\ dy_b,\ dz_c} \text{ oder } \frac{d^3 L}{dx_a,\ dx_b,\ dy_c} \text{ oder } \frac{d^2 L}{dx_a,\ dx_b,\ dx_c}$$

gleich Null sein.

Verbinden wir hiermit, was ich eben aus dem Begriffe der relativen Lage für die physikalische Anwendbarkeit hergeleitet habe, so folgt, dass die Function L eine Summe von Functionen sein muss, deren jede nur abhängig von der Entfernung zweier 256
einzelnen Punkte ist, so wie ich sie in meiner Abhandlung hingestellt habe.

Was endlich den vierten Punkt betrifft, der glücklicherweise nicht in wesentlicher Verbindung mit dem Hauptthema meines Buches steht, nämlich das, was ich über die Schrift von Holtzmann gesagt habe, so muss ich hier allerdings einen Irrthum eingestehen. Holtzmann spricht im Anfange sein Princip so aus, dass es wie eine Anerkennung der Aequivalenz von Wärme und Arbeit klingt, und der bei weitem grösste Theil der mathematischen Folgerungen, die er zieht, so weit sie ohne Integration zu erhalten sind, entsprechen dem auch. Die Integration ist aber, wie Clausius nachgewiesen hat, nicht in der Weise auszuführen, wie es Holtzmann gethan hat, wenn das Princip der Aequivalenz festgehalten werden soll.

In der Theorie des Galvanismus muss ich die Einwürfe von Clausius erwarten. Das Kapitel der Electrodynamik dagegen ist in meiner Schrift nur unter einer sehr beschränkenden Voraussetzung durchgeführt, weil ich damals von aller mathematisch physikalischen Literatur entblösst, fast auf das beschränkt war, was ich selbst zu erfinden wusste. Ich habe deshalb den Magnetismus des Eisens nur unter der Voraussetzung behandeln können, dass dasselbe vollkommen weich sei; d. h. der magnetischen Vertheilung gar kein Hinderniss entgegensetze, sodass diese Vertheilung genau dieselbe würde, wie die der Electricität an electrisirten Leitern. Unter der allgemeineren Voraussetzung jedoch, welche Poisson seinen Theoremen zu Grunde gelegt hat, dass die Stärke der Magnetisirung der magnetisirenden Kraft proportional sei, was für geringe Stärke der Magnetisirung jedenfalls mit der Erfahrung stimmt, mit Benutzung ferner der seit jener Zeit in Deutschland bekannt gewordenen Theoreme von Green und meiner eigenen Untersuchungen über den Verlauf der durch Stromesschwankungen inducirten Ströme, lässt sich das genannte Kapitel jetzt vollständiger und genügender als irgend ein anderes
257 behandeln, und namentlich lässt sich das allgemeine Gesetz von Neumann für die inducirten Ströme jetzt viel vollständiger aus dem Principe von der Erhaltung der Kraft herleiten.

Da Clausius eine Arbeit über dies Kapitel ankündigt, will ich ihm nicht vorgreifen durch eine Veröffentlichung

meiner eigenen weiteren Arbeiten hierüber. Ich kann es nur für einen Gewinn halten, wenn die Ideenverbindungen, welche ich in meiner Schrift damals zu einer Zeit, wo sie noch wenig Anklang unter den Physikern fanden, darzulegen suchte, jetzt von einem Andern in anderer Form wieder aufgenommen, und in so vollständiger und kritischer Weise durchgearbeitet werden, wie es bisher bei anderen Kapiteln der Theorie von der Erhaltung der Kraft durch Hrn. Clausius geschehen ist. Nur sei es mir vergönnt die Resultate, wie ich sie mit erweiterten Hülfsmitteln später gewonnen habe, hier kurz zusammenzustellen, damit ich mit meiner älteren Darstellung nicht in zu ungünstigem Lichte neben Hrn. Clausius stehen bleibe.

Die Voraussetzung ist demnach, dass das magnetische Moment eines jeden körperlichen Elementes innerhalb eines durch Vertheilung magnetisirten Körpers A der magnetischen Richtkraft an dieser Stelle proportional sei und dieselbe Richtung habe. Das Potential des vertheilten Körpers A gegen den vertheilenden Magneten B sei V, das von A auf sich selbst (nach Clausius Definition) sei W, so lassen sich folgende Sätze ableiten:

1) Wenn der vertheilende Magnet aus unendlicher Entfernung dem vertheilten Körper A genähert wird, so wird dabei mechanische Arbeit gewonnen gleich dem Werthe von $\frac{1}{2}V$ am Ende des Weges. Dies ist ein, so viel ich weiss, neuer Satz in der mathematischen Theorie des Magnetismus. Wird der in A erzeugte Magnetismus nun fixirt und der Magnet in unendliche Entfernung gebracht, so wird dabei die mechanische Arbeit V aufgebraucht. Die erzeugte Magnetisirung von A hat also die mechanische Arbeit $^1/_2\,V$ erfordert. Nur wenn 258
die magnetische Vertheilung im Eisen ganz unbehindert ist, wird entsprechend den electrisirten Körpern, wie ich es in meiner Schrift angenommen habe, die durch die Magnetisirung repräsentirte Arbeit gleich $-W$, d. h. gleich der Arbeit, welche durch die Anziehungskräfte der freigewordenen magnetischen Fluida verrichtet werden kann. Der Unterschied $\frac{1}{2}V-(-W)$ repräsentirt also die Grösse der Moleculararbeit innerhalb des magnetisirten Körpers.

2) Aus meinen Untersuchungen über die durch Stromesschwankungen inducirten Ströme[1]) ergiebt sich, dass die Ansteigung eines galvanischen Stromes gegeben wird durch eine Gleichung von folgender Form:

$$i = \frac{A}{w}\left(1 - e^{-wt/p}\right),$$

wo A die electromotorische Kraft, w der Widerstand, t die Zeit und p eine Constante ist, welche nur von der Form der Leitung abhängt (nach Neumann das doppelte Potential der Leitung auf sich selbst bei der Stromeseinheit, dividirt durch die Inductionsconstante). Der durch das Ansteigen des Stromes inducirte Integralstrom ist dann:

$$\frac{p}{w} J,$$

wo J den grössten Werth, welchen i erreicht, bezeichnet. Dabei wird durch den inducirten Strom die Wärmemenge:

$$\frac{1}{2} p J^2$$

vernichtet, wenn die Einheit von w diejenige ist, in der die willkürliche Einheit der Stromintensität in der Zeiteinheit die Wärmeeinheit entwickelt. Wird der Strom so unterbrochen, dass der dabei inducirte Extracurrent eine Leitung findet, so wird dieselbe Wärmemenge wieder erzeugt, ohne dass dafür ein anderer Arbeitsverbrauch stattfände. Der galvanische
259 Strom J repräsentirt uns also, so lange er besteht, eine geleistete Arbeit, äquivalent der Wärmemenge:

$$\frac{1}{2} p J^2.$$

3) Wenn demnach ein Stromleiter von unveränderlicher Form mit unveränderlichen Stahlmagneten und Eisenmassen in Wechselwirkung tritt, welche letzteren theils durch ihn selbst, theils durch die Magnete magnetisirt werden, so muss in jedem Augenblicke durch den inducirten Strom so viel Wärme in der Stromleitung entwickelt oder vernichtet werden, als an Arbeit bei den stattfindenden Bewegungen, bei der Magnetisirung der Eisenmassen und Veränderung der Stromintensität verloren oder gewonnen wird. Daraus lässt sich

1) Diese Annalen Bd. LXXXIII, S. 505.

jetzt für die Induction durch Magnete ganz allgemein das Gesetz von Neumann ableiten, dass die inducirte electromotorische Kraft gleich ist den Veränderungen des Potentials der vorhandenen Magnete auf die von der Stromeinheit durchflossene Stromleitung, multiplicirt mit einer Constanten, und ferner, dass diese Constante bei der angegebenen Einheit des Widerstandes gleich dem reciproken Werthe des mechanischen Aequivalents der Wärmeeinheit ist. Diese Ableitung konnte ich in meiner früheren Schrift vollständig nur durchführen für die Induction durch Bewegung eines unveränderlichen Magneten.

4) W. Weber[1]) hat die Induction bei der Bewegung eines Stromleiters gegen einen anderen experimentell verglichen mit der bei Bewegung des Stromleiters gegen einen Magneten, und gefunden, dass beide gleich sind, unter Umständen wo die Veränderungen des Potentials auf den von der Stromeinheit durchflossenen Leiter gleich sind. Wenn also das Inductionsgesetz von Neumann für Magnetinduction vollständig gilt, erscheint es gerechtfertigt, dasselbe auch auf Induction durch Bewegung von Stromleitern zu übertragen. Dann lässt sich weiter aus dem Principe von der Erhaltung der Kraft folgern, dass auch in dem einen Leiter durch Stromesschwankungen des anderen inducirten Ströme demselben Gesetze folgen. Für 260
einen einzelnen Stromeskreis ist es mir noch nicht gelungen zu beweisen, dass die oben mit p bezeichnete Constante gleich dem doppelten Potentiale sein müsse, so wahrscheinlich dies auch nach der Analogie der übrigen Fälle sein mag.

Die in meiner früheren Schrift gegebene Gleichung für die Induction zweier bewegten Stromleiter aufeinander, ist nur für den Fall richtig, wo der eine Strom gegen den anderen verschwindend klein ist, weil ich damals noch nicht den Einfluss der Induction bei Unterbrechungen der Stromleitungen zu berücksichtigen wusste.

Eine zweite Erwiderung von Hrn. Clausius ist hierauf erfolgt in Poggendorff's Annalen Bd. 91. S. 601—604.

---

1) Electrodynamische Maassbestimmungen. Leipzig, 1846, S. 171.

IV.

Ueber Eigenschaften des Eises.

Vorgetragen im naturhistorisch-medicinischen Verein zu Heidelberg am 24. Februar 1865. Das Manuscript eingereicht am 10. März. Abgedruckt in den Verhandlungen des Vereins Bd. III S. 194—196. Dasselbe Thema in seinen Beziehungen zur Gletschertheorie ist besprochen in meinen Populären wissenschaftlichen Vorträgen. Heft I S. 93—134.

---

194 Das Phänomen der Regelation des Eises von Null Grad, wonach zwei Eisstücke beim Aneinanderpressen zusammenfrieren und sich fest vereinigen, ist von Faraday entdeckt und von James Thomson erklärt worden aus der Erniedrigung des Gefrierpunktes, die bei gesteigertem Drucke eintritt. Dagegen wurden von Faraday Versuche angeführt, bei denen der Druck sehr klein ist, und doch die Eisstücke im Laufe einiger Stunden zusammenfroren.

Der Vortragende hat einige Versuche angestellt, welche dazu dienen können, die gegen J. Thomson's Theorie gemachten Einwände zu heben. Man muss hierbei wesentlich die Zeit berücksichtigen. Unter starkem Drucke haften zwei Eisstücke augenblicklich zusammen, unter Umständen so stark, dass man sie nicht wieder von einander lösen kann. Je schwächer der Druck ist, desto länger muss man warten und desto leichter sind die Stücke nachher wieder von einander zu lösen.

Presst man zwei Eisstücke an einander, so nehmen sie eine Temperatur niedriger als der Gefrierpunkt an, für je eine Atmosphäre Druck 0,0075 eines Centesimalgrades. Die zwischen ihnen zurückbleibende Wasserschicht aber kann entweichen und wird nicht gepresst, deren Gefrierpunkt wird also

auch nicht vermindert, und sie wird gefrieren müssen, da sie mit Eis von weniger als 0° in Berührung ist. Je kleiner der Druck, desto kleiner die Temperaturdifferenz, desto langsamer die Ableitung der Wärme vom Wasser zum Eise, desto langsamer das Gefrieren.

Der Vortragende erhielt einen durch Auskochen luftleer gemachten und zugeschmolzenen Glaskolben, der Wasser und Eis enthielt, in einem Gemisch von Eis und Wasser. Im Innern des Kolbens musste der Gefrierpunkt höher sein als ausserhalb. Deshalb gefror langsam das innere Wasser. Im Laufe einiger Stunden haftete das innen schwimmende Eis immer wieder an der Glaswand des Kolbens, und im Laufe einiger Tage entstanden gut ausgebildete Eiskrystalle über den ganzen Boden des Kolbens. Durch die Glaswand des Kolbens musste natürlich der Process sehr viel langsamer vor sich gehen, als in einer mikroskopisch dünnen Wasserschicht zwischen zwei Eisflächen.

Durch Berücksichtigung dieser Umstände scheinen die gegen die Theorie von Thomson aufgestellten Bedenken beseitigt zu werden. Faraday nimmt an, dass Wassertheilchen in enger Nachbarschaft von Eis durch eine Art von Contactwirkung leichter gefrieren. Dabei wird aber dem Wasser latente Wärme entzogen, und es ist nicht abzusehen, wo die hin kommen soll, oder welche Arbeit sie leisten soll. J. Thom-
son hat dagegen wohl mit Recht eingewendet, dass Contact- 105
wirkungen in solchen Fällen wohl Hindernisse wegräumen können, welche der Wirksamkeit derjenigen Kräfte entgegenstehen, die Veränderung hervorzubringen streben, aber sie nicht selbst hervorbringen können. Es würde dies ein Widerspruch gegen das Gesetz von der Erhaltung der Kraft sein.

Die Plasticität des Eises zeigt sich nach den Versuchen des Vortragenden am ausgezeichnetsten in Eis, welches durch hohen Druck (50 Atmosphären) aus Schnee zusammengepresst ist. Cylinder aus solchem Eise konnten zwischen zwei Platten in Richtung ihrer Axe zusammengedrückt werden, so dass sie platte Scheiben wurden, und erst gegen das Ende der Pressung bildeten sich offene Spalten an einzelnen Stellen der cylindrischen Oberfläche.

Regelmässig krystallinisches Eis dagegen von der Oberfläche eines gefrorenen Flusses, spaltet beim Druck zwischen zwei Platten in grosse Bruchstücke auseinander, die zwar durch Regelation wieder vereinigt werden, aber dann doch deutlich ein Haufwerk unregelmässiger Stücke bilden.

Körniges Eis dagegen, sei es nun feinkörnig, wie das aus Schnee gepresste Eis, oder grobkörnig, wie krystallinisches Eis, welches in einer geschlossenen eisernen Form zerbrochen und in eine neue Gestalt gepresst worden ist, bildet beim Druck nur kleine Risse, welche den Zusammenhang der Eismasse nicht vollständig trennen.

Ein Cylinder solchen körnigen Eises konnte selbst durch eine Oeffnung, deren Durchmesser nur halb so gross war, als der des Cylinders, hindurchgepresst werden, ohne seinen Zusammenhang zu verlieren. Doch spaltet der engere ausgepresste Cylinder gewöhnlich der Länge nach auf, ähnlich einem Gletscher, der durch eine enge Felsschlucht in ein weites Thal hinein bricht. Es erklärt sich dieses Aufspalten dadurch, dass das Eis durch die Mitte der Oeffnung schneller vordringt, als an deren Rändern.

Bei diesen Versuchen, wobei das Eis einem bis zu 50 Atmosphären gesteigerten Drucke ausgesetzt wird, und seine Temperatur deshalb auf etwa $-0^{0},5$ fällt, gefriert oft das Wasser, welches sich in den Spalten der aus mehreren Stücken zusammengesetzten eisernen Form ansammelt.

Das Eis, welches man künstlich aus Schnee zusammenpresst, ist von weisslichem Aussehen und undurchsichtig wegen der Menge kleiner Luftblasen, die es einschliesst. Wenn man es mit der Presse umknetet, wird es immer klarer, indem die Luftblasen durch die sich bildenden kleinen Sprünge ausgetrieben werden. Presst man einen Cylinder solchen Eises zwischen ebenen Platten, so sieht man fortwährend eine Menge kleiner Luftbläschen durch seine nasse Oberfläche entweichen. Dass das Gletschereis schliesslich ganz klar wird, erklärt sich also wohl durch das fortdauernde Umkneten desselben, welches in den Gletschern stattfindet.

Aber auch klares krystallinisches Eis wird trübe, wenn es

unter der Presse in eine andere Form gebracht wird. Ich habe 196
eine geschlossene cylindrische Form aus Gusseisen, in die ein Stempel eingetrieben werden konnte, mit klaren Eisstücken und Wasser gefüllt, so dass alle Luft ausgeschlossen war, und dann das Eis zusammengepresst, während das Wasser durch die Spalten der Form entwich. Der dadurch erzeugte Eisblock war weisslich durchscheinend. Mit der Lupe erkannte man eine grosse Menge sehr feiner und dicht aneinander stehender, das Licht schwach reflectirender Flächen in seinem Innern; wahrscheinlich Spalten von einer Weite, die kleiner als Viertellichtwellenlängen war, die ein Vacuum enthielten. Dass solche spaltförmige unvollständig mit Wasser gefüllte Vacua im Gletschereise vorkommen, hat Tyndall gezeigt. Solche können beim Pressen entstehen, wenn sich die Wände der gebildeten Sprünge mit einer kleinen Verschiebung wieder aneinander legen, wo sie dann nicht genau aufeinander passen.

Wenn ein solcher weisslicher Block gepressten Eises einige Stunden im Eiswasser lag, so wurde er ganz durchsichtig, wie Gletschereis. Mit der Lupe aber erkannte man in seinem Innern eine grosse Zahl von Linien, welche sich durch andere Lichtbrechung auszeichneten, und wie die aneinanderstossenden Kanten einer grossen Zahl kleiner Zellen erschienen. Brach man mit dem Daumennagel einige Theile von der Kante des Blockes los, so erschienen diese als ein Haufwerk kleiner polyedrischer Körner von Stecknadelkopf- bis Erbsengrösse. Jenes zellige Ansehen des Blockes rührte offenbar davon her, dass er durch und durch aus solchen polyedrischen Körnern bestand, zwischen denen sich Wasserschichten befanden. Mittels polarisirten Lichtes liess sich an gepressten Eisplatten von etwa 4 mm Dicke dieselbe Zusammensetzung aus einem Haufwerk von Körnern ebenfalls leicht erkennen, auch sogar unmittelbar nach der Pressung, ehe noch das Schmelzen angefangen hatte. Genau dieselbe Zusammensetzung zeigt bekanntlich schmelzendes Gletschereis, nur dass dieses meist grössere und mehr ineinander verschränkte Körner hat.

Die Entstehung dieser Körner scheint sich dadurch zu erklären, dass die unregelmässigen Bruchstücke, aus denen der zusammengepresste Block besteht und welche durch Regelation

vereinigt sind, bei der allmäligen Erwärmung des Blockes auf Null Grad gerade an den Stellen abschmelzen, die noch gepresst sind, dass die luftleeren Spalten sich mit diesem Wasser füllen, und so schliesslich eine Masse von aneinander liegenden Körnern entsteht, die durch ihre gegenseitige Verschränkung noch aneinander haften.

Hydrodynamik.

7*

V.

Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen.

(Aus dem „Journal für die reine und angewandte Mathematik." Bd. 55. S. 25—55. (1858.)

Es sind bisher Integrale der hydrodynamischen Gleichungen 25
fast nur unter der Voraussetzung gesucht worden, dass die rechtwinkeligen Componenten der Geschwindigkeit jedes Wassertheilchens gleich gesetzt werden können den nach den entsprechenden Richtungen genommenen Differentialquotienten einer bestimmten Function, welche wir das Geschwindigkeitspotential nennen wollen. Allerdings hat schon Lagrange[1]) nachgewiesen, dass diese Voraussetzung zulässig ist, so oft die Bewegung der Wassermasse unter dem Einflusse von Kräften entstanden ist und fortgesetzt wird, welche selbst als Differentialquotienten eines Kräftepotentials dargestellt werden können, und dass auch der Einfluss bewegter fester Körper, welche mit der Flüssigkeit in Berührung kommen, die Gültigkeit jener Voraussetzung nicht abändert. Da nun die meisten mathematisch gut definirbaren Naturkräfte als die Differentialquotienten eines Kräftepotentials dargestellt werden können, so fallen auch bei weitem die meisten mathematisch zu behandelnden Fälle von Flüssigkeitsbewegung in die Zahl derer, bei denen ein Geschwindigkeitspotential existirt.

Indessen hat schon Euler[2]) darauf aufmerksam gemacht,

---

1) Mécanique analytique. Paris 1815. T. II, p. 304.

2) Histoire de l'Acad. des Sciences de Berlin. An. 1755, p. 292.

dass es doch auch Fälle von Flüssigkeitsbewegung giebt, in denen kein Geschwindigkeitspotential existirt, z. B. die Drehung einer Flüssigkeit um eine Axe mit gleicher Winkelgeschwindigkeit aller Theilchen. Zu den Kräften, welche solche Arten von Bewegungen hervorbringen können, gehören magnetische Kräfte, welche auf eine von elektrischen Strömen durchlaufene Flüssigkeit wirken, und namentlich die Reibung der Flüssigkeitstheilchen aneinander und an festen Körpern. Der Einfluss der Reibung auf Flüssigkeiten konnte bisher noch nicht mathematisch definirt werden, und doch ist derselbe in allen Fällen, wo es sich nicht um unendlich kleine Schwingungen handelt,
26 sehr gross, und bringt die bedeutendsten Abweichungen zwischen der Theorie und der Wirklichkeit hervor. Die Schwierigkeit diesen Einfluss zu definiren und Methoden zu seiner Messung zu finden, beruhte zum grossen Theile wohl auch darin, dass man keine Anschauung von den Formen der Bewegung hatte, welche die Reibung in der Flüssigkeit hervorbringt. In dieser Beziehung schien mir daher eine Untersuchung der Bewegungsformen, bei denen kein Geschwindigkeitspotential existirt, von Wichtigkeit zu sein.

Die folgende Untersuchung wird nun lehren, dass in den Fällen, wo ein Geschwindigkeitspotential existirt, die kleinsten Wassertheilchen keine Rotationsbewegungen haben, wohl aber ist wenigstens ein Theil der Wassertheilchen in Rotation begriffen in solchen Fällen, wo kein Geschwindigkeitspotential existirt.

Wirbellinien nenne ich Linien, welche durch die Flüssigkeitsmasse so gezogen sind, dass ihre Richtung überall mit der Richtung der augenblicklichen Rotationsaxe der in ihnen liegenden Wassertheilchen zusammentrifft.

Wirbelfäden nenne ich Theile der Wassermasse, welche man dadurch aus ihr herausschneidet, dass man durch alle Punkte des Umfanges eines unendlich kleinen Flächenelementes die entsprechenden Wirbellinien construirt.

Die Untersuchung ergiebt nun, dass wenn für alle Kräfte, welche auf die Flüssigkeit wirken, ein Kräftepotential existirt:

1) kein Wassertheilchen in Rotation kommt, welches nicht von Anfang an in Rotation begriffen ist.

2) Die Wassertheilchen, welche zu irgend einer Zeit derselben Wirbellinie angehören, auch indem sie sich fortbewegen, immer zu derselben Wirbellinie gehörig bleiben.

3) Dass das Product aus dem Querschnitte und der Rotationsgeschwindigkeit eines unendlich dünnen Wirbelfadens längs der ganzen Länge des Fadens constant ist, und auch bei der Fortbewegung des Fadens denselben Werth behält. Die Wirbelfäden müssen deshalb innerhalb der Flüssigkeit in sich zurücklaufen, oder können nur an ihren Grenzen endigen.

Dieser letztere Satz macht es möglich die Rotationsgeschwindigkeiten zu bestimmen, wenn die Form der betreffenden Wirbelfäden zu verschiedenen Zeiten gegeben ist. Ferner wird die Aufgabe gelöst, die Geschwindigkeiten der Wassertheilchen für einen gewissen Zeitpunkt zu bestimmen, wenn für diesen Zeitpunkt die Rotationsgeschwindigkeiten gegeben sind; nur bleibt dabei eine willkürllche Function unbestimmt, 27
welche zur Erfüllung der Grenzbedingungen verwendet werden muss.

Diese letztere Aufgabe führt zu einer merkwürdigen Analogie der Wirbelbewegungen des Wassers mit den elektromagnetischen Wirkungen elektrischer Ströme. Wenn nämlich in einem einfach zusammenhängenden[1], mit bewegter Flüssigkeit gefüllten Raume ein Geschwindigkeitspotential existirt, sind die Geschwindigkeiten der Wassertheilchen gleich und gleichgerichtet den Kräften, welche eine gewisse Vertheilung magnetischer Massen an der Oberfläche des Raumes auf ein magnetisches Theilchen im Innern ausüben würde. Wenn dagegen in einem solchen Raume Wirbelfäden existiren, so sind

1) Ich nehme diesen Ausdruck in demselben Sinne, in welchem Riemann (dieses Journal Bd. LIV, S. 108) von einfach und mehrfach zusammenhängenden Flächen spricht. Ein n fach zusammenhängender Raum ist danach ein solcher, durch den $n-1$, aber nicht mehrere Schnittflächen gelegt werden können, ohne den Raum in zwei vollständig getrennte Theile zu trennen. Ein Ring ist also in diesem Sinne ein zweifach zusammenhängender Raum. Die Schnittflächen müssen ringsum durch die Linie, in der sie die Oberfläche des Raumes schneiden, vollständig begrenzt sein.

die Geschwindigkeiten der Wassertheilchen gleich zu setzen den auf ein magnetisches Theilchen ausgeübten Kräften geschlossener elektrischer Ströme, welche theils durch die Wirbelfäden im Innern der Masse, theils in ihrer Oberfläche fliessen, und deren Intensität dem Product aus dem Querschnitt der Wirbelfäden und ihrer Rotationsgeschwindigkeit proportional ist.

Ich werde mir deshalb im Folgenden öfter erlauben, die Anwesenheit von magnetischen Massen oder elektrischen Strömen zu fingiren, blos um dadurch für die Natur von Functionen einen kürzeren und anschaulicheren Ausdruck zu gewinnen, die eben solche Functionen der Coordinaten sind, wie die Potentialfunctionen oder Anziehungskräfte, welche jenen Massen oder Strömen für ein magnetisches Theilchen zukommen.

Durch diese Sätze wird die Reihe der Bewegungsformen, welche in der nicht behandelten Klasse der Integrale der hydrodynamischen Gleichungen verborgen sind, wenigstens für die Vorstellung zugänglich, wenn auch die vollständige Ausführung der Integration nur in wenigen einfachsten Fällen möglich ist, wo nur ein oder zwei geradlinige oder kreisförmige Wirbelfäden vorhanden sind in unbegrenzten oder durch eine unendliche Ebene theilweis begrenzten Wassermassen.

Es lässt sich nachweisen, dass geradlinige parallele Wirbelfäden in einer Wassermasse, die nur durch senkrecht gegen
28 die Fäden gestellte Ebenen begrenzt ist, um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt rotiren, wenn man zur Bestimmung dieses Punktes die Rotationsgeschwindigkeit gleich der Dichtigkeit einer Masse betrachtet. Die Lage des Schwerpunkts bleibt unverändert. Bei kreisförmigen Wirbelfäden dagegen, die alle auf einer gemeinsamen Axe senkrecht stehen, bewegt sich der Schwerpunkt ihres Querschnitts parallel der Axe fort.

§ 1. Definition der Rotation.

Es sei innerhalb einer tropfbaren Flüssigkeit in dem Punkte, der durch die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z bestimmt ist, zur Zeit t der Druck gleich p, die den drei Coordinataxen parallelen Componenten der Geschwindigkeit u, v, w, die Componenten der auf die Einheit der flüssigen

Masse wirkenden äusseren Kräfte X, Y und Z, und die Dichtigkeit, deren Aenderungen als verschwindend klein angesehen werden, gleich h, so sind die bekannten Bewegungsgleichungen für die inneren Punkte der Flüssigkeit:

$$\left.\begin{aligned} X - \frac{1}{h}\cdot\frac{dp}{dx} &= \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz} \\ Y - \frac{1}{h}\cdot\frac{dp}{dy} &= \frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz} \\ Z - \frac{1}{h}\cdot\frac{dp}{dz} &= \frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz} \\ 0 &= \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Man hat bisher fast ausschliesslich nur solche Fälle behandelt, wo nicht nur die Kräfte X, Y und Z ein Potential V haben, also auf die Form gebracht werden können:

$$X = \frac{dV}{dx}, \quad Y = \frac{dV}{dy}, \quad Z = \frac{dV}{dz}, \tag{1 a}$$

sondern auch ausserdem ein Geschwindigkeitspotential φ gefunden werden kann, so dass:

$$u = \frac{d\varphi}{dx}, \quad v = \frac{d\varphi}{dy}, \quad w = \frac{d\varphi}{dz}. \tag{1 b}$$

Dadurch vereinfacht sich die Aufgabe ausserordentlich, indem die drei ersten der Gleichungen (1) eine gemeinsame Integralgleichung geben, aus der p zu finden ist, nachdem man φ der vierten Gleichung gemäss bestimmt hat, welche in diesem Falle die Gestalt annimmt:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0,$$

also mit der bekannten Differentialgleichung für das Potential 29
magnetischer Massen übereinstimmt, welche ausserhalb des Raumes liegen, für den diese Gleichung gelten soll. Auch ist bekannt, dass jede Function φ, welche die obige Differentialgleichung innerhalb eines einfach zusammenhängenden[1]) Rau-

1) In mehrfach zusammenhängenden Räumen kann φ mehrdeutig werden, und für mehrdeutige Functionen, die der obigen Differentialgleichung Genüge thun, gilt der Fundamentalsatz von Green's Theorie der Elektricität (dieses Journal Bd. XLIV, S. 360) nicht, und demgemäss auch ein grosser Theil der aus ihm herfliessenden Sätze nicht, welche Gauss und Green für die magnetischen Potentialfunctionen aufgestellt haben, die ihrer Natur nach immer eindeutig sind.

mes erfüllt, als das Potential einer bestimmten Vertheilung magnetischer Massen an der Oberfläche des Raumes ausgedrückt werden kann, wie ich schon in der Einleitung angeführt habe.

Damit die in der Gleichung (1 b.) verlangte Substitution gemacht werden könne, muss sein:

$$\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} = 0, \quad \frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} = 0, \quad \frac{dw}{dx} - \frac{dv}{dz} = 0, \qquad (1\,c)$$

Um die mechanische Bedeutung dieser letzteren drei Bedingungen zu verstehen, können wir uns die Veränderung, welche irgend ein unendlich kleines Wasservolum in dem Zeittheilchen dt erleidet, zusammengesetzt denken aus drei verschiedenen Bewegungen: 1) einer Fortführung des Wassertheilchens durch den Raum hin, 2) einer Ausdehnung oder Zusammenziehung des Theilchens nach drei Hauptdilatationsrichtungen, wobei ein jedes aus Wasser gebildete rechtwinklige Parallelepipedon, dessen Seiten den Hauptdilatationsrichtungen parallel sind, rechtwinklig bleibt, während seine Seiten zwar ihre Länge ändern, aber ihren früheren Richtungen parallel bleiben, 3) einer Drehung um eine beliebig gerichtete temporäre Rotationsaxe, welche Drehung nach einem bekannten Satze immer als Resultante dreier Drehungen um die Coordinataxen angesehen werden kann.

Sind in dem Punkte, dessen Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ sind, die unter (1 c) aufgestellten Bedingungen erfüllt, so wollen wir die Werthe von u, v, w und ihren Differentialquotienten in jenem Punkte folgendermassen bezeichnen:

$$\begin{aligned}
u &= A, & \frac{du}{dx} &= a, & \frac{dw}{dy} &= \frac{dv}{dz} = \alpha,\\
v &= B, & \frac{dv}{dy} &= b, & \frac{du}{dz} &= \frac{dw}{dx} = \beta,\\
w &= C, & \frac{dw}{dz} &= c, & \frac{dv}{dx} &= \frac{du}{dy} = \gamma,
\end{aligned}$$

und erhalten dann für Punkte, deren Coordinaten x, y, z unendlich wenig von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ verschieden sind:

$$\begin{aligned}
u &= A + a(x - \mathfrak{x}) + \gamma(y - \mathfrak{y}) + \beta(z - \mathfrak{z}),\\
v &= B + \gamma(x - \mathfrak{x}) + b(y - \mathfrak{y}) + \alpha(z - \mathfrak{z}),\\
w &= C + \beta(x - \mathfrak{x}) + \alpha(y - \mathfrak{y}) + c(z - \mathfrak{z}),
\end{aligned}$$

oder wenn wir setzen:

$$\varphi = A(x - \mathfrak{x}) + B(y - \mathfrak{y}) + C(z - \mathfrak{z}) + \tfrac{1}{2}a(x - \mathfrak{x})^2 + \tfrac{1}{2}b(y - \mathfrak{y})^2 + \tfrac{1}{2}c(z - \mathfrak{z})^2 + \alpha(y - \mathfrak{y})(z - \mathfrak{z}) + \beta(x - \mathfrak{x})(z - \mathfrak{z}) + \gamma(x - \mathfrak{x})(y - \mathfrak{y}),$$

so ist:

$$u = \frac{d\varphi}{dx}, \quad v = \frac{d\varphi}{dy}, \quad w = \frac{d\varphi}{dz}.$$

Es ist bekannt, dass man durch eine geeignete Wahl anders gerichteter rechtwinkliger Coordinaten x_1, y_1, z_1, deren Mittelpunkt im Punkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ liegt, den Ausdruck für φ auf die Form bringen kann:

$$\varphi = A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1 + \tfrac{1}{2}a_1 x_1^2 + \tfrac{1}{2}b_1 y_1^2 + \tfrac{1}{2}c_1 z_1^2,$$

wo dann die nach diesen neuen Coordinataxen zerlegten Geschwindigkeiten u_1, v_1, w_1 die Werthe erhalten:

$$u_1 = A_1 + a_1 x_1, \quad v_1 = B_1 + b_1 y_1, \quad w_1 = C_1 + c_1 z_1.$$

Die der x_1-Axe parallele Geschwindigkeit u_1 ist also gleich für alle Wassertheilchen für welche x_1 denselben Werth hat, oder Wassertheilchen, welche zu Anfang des Zeittheilchens dt in einer den $y_1 z_1$ parallelen Ebene liegen, sind auch am Schlusse des Zeittheilchens dt in einer solchen. Dasselbe gilt für die $x_1 y_1$ und $x_1 z_1$ Ebene. Wenn wir also ein Parallelepipedon durch drei den letztgenannten Coordinatebenen parallele und ihnen unendlich nahe Ebenen begrenzt denken, so bilden die darin eingeschlossenen Wassertheilchen auch nach Ablauf des Zeitheilchens dt ein rechtwinkliges Parallelepipedon, dessen Flächen denselben Coordinatebenen parallel sind. Die ganze Bewegung eines solchen unendlich kleinen Parallelepipedon ist also unter der in (1 c) ausgesprochenen Voraussetzung zusammengesetzt nur aus einer Translationsbewegung im Raume, und einer Ausdehnung oder Zusammenziehung seiner Kanten, und es ist keine Drehung desselben vorhanden.

Kehren wir zurück zu dem ersten Coordinatsystem der x, y, z und denken wir nun zu den bisher vorhandenen Bewegungen der den Punkt $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ umgebenden unendlich kleinen Wassermasse noch Rotationsbewegungen um Axen, die denen 31
der x, y und z parallel sind, und durch den Punkt $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ gehen, hinzugefügt, deren Winkelgeschwindigkeiten beziehlich sein mögen ξ, η, ζ, so sind die davon herrührenden Geschwindig-

keitscomponenten parallel den Coordinataxen der x, y, z beziehlich:

$$\begin{array}{ccc} 0, & (z-\mathfrak{z})\,\xi, & -(y-\mathfrak{y})\,\xi, \\ -(z-\mathfrak{z})\,\eta, & 0, & (x-\mathfrak{x})\,\eta \\ (y-\mathfrak{y})\,\zeta, & -(x-\mathfrak{x})\,\zeta, & 0. \end{array}$$

Die Geschwindigkeiten des Theilchens, dessen Coordinaten x, y, z sind, werden nun also:

$$\begin{aligned} u &= A + a(x-\mathfrak{x}) + (\gamma+\zeta)(y-\mathfrak{y}) + (\beta-\eta)(z-\mathfrak{z}), \\ v &= B + (\gamma-\zeta)(x-\mathfrak{x}) + b(\mathfrak{y}-y) + (\alpha+\xi)(z-\mathfrak{z}), \\ w &= C + (\beta+\eta)(x-\mathfrak{x}) + (\alpha-\xi)(y-\mathfrak{y}) + c(z-\mathfrak{z}). \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Differenziren:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dv}{dz} - \frac{dw}{d\gamma} &= 2\,\xi, \\ \frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz} &= 2\,\eta, \\ \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} &= 2\,\zeta. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Die Grössen der linken Seite also, welche nach den Gleichungen (1 c.) gleich Null sein müssen, wenn ein Geschwindigkeitspotential existiren soll, sind gleich den doppelten Rotationsgeschwindigkeiten der betreffenden Wassertheilchen um die drei Coordinataxen. Die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials schliesst die Existenz von Rotationsbewegungen der Wassertheilchen aus.

Als eine weitere charakteristische Eigenthümlichkeit der Flüssigkeitsbewegung mit einem Geschwindigkeitspotential soll hier ferner noch angeführt werden, dass in einem ganz von festen Wänden eingeschlossenen, ganz mit Flüssigkeit gefüllten und einfach zusammenhängenden Raume S keine solche Bewegung vorkommen kann. Denn wenn wir mit n die nach innen gerichtete Normale der Oberfläche eines solchen Raumes bezeichnen, muss die zur Wand senkrecht gerichtete Geschwindigkeitscomponente $d\varphi/dn$ überall gleich Null sein. Dann ist nach einem bekannten Satze[1]) von Green:

32 $$\iiint\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right] dx\,dy\,dz = -\int \varphi\,\frac{d\varphi}{dn}\,d\omega,$$

1) Der vorher schon angeführte Satz in Journ. f. r. u. a. Math. Bd. LIV. S. 108, welcher nicht für mehrfach zusammenhängende Räume gilt.

wo links die Integration über den ganzen Raum S, rechts über die ganze Oberfläche von S, deren Flächenelement mit $d\omega$ bezeichnet ist, ausgedehnt werden muss. Ist nun $d\varphi / dn$ an der ganzen Oberfläche gleich Null, so muss auch das Integral links gleich Null sein, was nur der Fall sein kann, wenn im ganzen Raume S:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

also gar keine Bewegung des Wassers stattfindet. Jede Bewegung einer begrenzten Flüssigkeitsmasse in einem einfach zusammenhängenden Raume, die ein Geschwindigkeitspotential hat, ist also nothwendig mit einer Bewegung der Oberfläche der Flüssigkeit verbunden. Ist diese Bewegung der Oberfläche, d. h. $d\varphi / dn$ vollständig gegeben, so ist dadurch auch die ganze Bewegung der eingeschlossenen Flüssigkeitsmasse eindeutig bestimmt. Denn gäbe es zwei Funktionen $\varphi_{,}$ und $\varphi_{,,}$, welche gleichzeitig im Inneren des Raumes S der Gleichung:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0$$

genügten und an der Oberfläche die Bedingung:

$$\frac{d\varphi}{dn} = \psi$$

erfüllten, wo ψ die durch die gegebene Bewegung der Oberfläche bedingten Werthe von $d\varphi / dn$ bezeichnet, so würde auch die Function $(\varphi_{,} - \varphi_{,,})$ die erstere Bedingung im Innern von S erfüllen, an der Oberfläche aber:

$$\frac{d(\varphi_{,} - \varphi_{,,})}{dn} = 0$$

sein, woraus wie eben gezeigt ist, auch für das ganze Innere von S folgen würde:

$$\frac{d(\varphi_{,} - \varphi_{,,})}{dx} = \frac{d(\varphi_{,} - \varphi_{,,})}{dy} = \frac{d(\varphi_{,} - \varphi_{,,})}{dz} = 0.$$

Beiden Functionen würden also genau dieselben Geschwindigkeiten auch im ganzen Innern von S entsprechen.

Also nur in dem Falle, wo kein Geschwindigkeitspotential existirt, können Drehungen der Wassertheilchen, und in sich
zurücklaufende Bewegungen innerhalb einfach zusammenhängen- 33
der ganz geschlossener Räume vorkommen. Wir können daher

die Bewegungen, denen ein Geschwindigkeitspotential nicht zukommt, im Allgemeinen als Wirbelbewegungen charakterisiren.

§ 2. Constanz der Wirbelbewegung.

Wir wollen zunächst die Aenderungen der Rotationsgeschwindigkeiten ξ, η und ζ während der Bewegung bestimmen, wenn nur Kräfte wirken, denen ein Kräftepotential zukommt. Ich bemerke zunächst im allgemeinen, dass wenn ψ eine Function von x, y, z, t ist, und um $\partial \psi$ wächst, während die letzteren vier Grössen um ∂x, ∂y, ∂z und ∂t wachsen, wir haben:

$$\partial \psi = \frac{d\psi}{dt} \partial t + \frac{d\psi}{dx} \partial x + \frac{d\psi}{dy} \partial y + \frac{d\psi}{dz} \partial z.$$

Soll nun die Aenderung von ψ während des Zeittheilchens ∂t für ein constant bleibendes Wassertheilchen bestimmt werden, so müssen wir den Grössen ∂x, ∂y und ∂z dieselben Werthe geben, welche sie für das bewegte Wassertheilchen haben, nämlich:

$$\partial x = u \partial t, \quad \partial y = v \partial t, \quad \partial z = w \partial t,$$

und erhalten:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{d\psi}{dt} + u \frac{d\psi}{dx} + v \frac{d\psi}{dy} + w \frac{d\psi}{dz}.$$

Das Zeichen $\partial \psi / \partial t$ werde ich im Folgenden immer nur in dem Sinne gebrauchen, dass $(\partial \psi / \partial t)\, dt$ die Aenderung von ψ während der Zeit dt für dasselbe Wassertheilchen bezeichnet, dessen Coordinaten zu Anfang der Zeit dt x, y und z waren.

Indem wir aus den ersten der Gleichungen (1) mit Hülfe von Differentiationen die Grösse p eliminiren, und dabei die Bezeichnungen der Gleichungen (2) einführen, und für die Kräfte X, Y, Z die Gleichungen (1a) als erfüllbar betrachten, erhalten wir folgende drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial t} &= \xi \frac{du}{dx} + \eta \frac{du}{dy} + \zeta \frac{du}{dz}, \\
\frac{\partial \eta}{\partial t} &= \xi \frac{dv}{dx} + \eta \frac{dv}{dy} + \zeta \frac{dv}{dz}, \\
\frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \xi \frac{dw}{dx} + \eta \frac{dw}{dy} + \zeta \frac{dw}{dz},
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

oder auch: 34

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial t} &= \xi \frac{du}{dx} + \eta \frac{dv}{dx} + \zeta \frac{dw}{dx},\\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \xi \frac{du}{dy} + \eta \frac{dv}{dy} + \zeta \frac{dw}{dy},\\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \xi \frac{du}{dz} + \eta \frac{dv}{dz} + \zeta \frac{dw}{dz}.\end{aligned}\right\} \qquad (3a)$$

Wenn in einem Wassertheilchen ξ, η und ζ gleichzeitig gleich Null sind, sind auch:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0.$$

Diejenigen Wassertheilchen also, welche nicht schon Rotationsbewegungen haben, bekommen auch im Verlaufe der Zeit keine Rotationsbewegungen.

Bekanntlich kann man Rotationen nach der Methode des Parallelogramms der Kräfte zusammensetzen. Sind ξ, η, ζ die Rotationsgeschwindigkeiten um die Coordinataxen, so ist die Rotationsgeschwindigkeit q um die augenblickliche Axe der Rotation:

$$q = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

und die Cosinus der Winkel, welche diese Axe mit den Coordinaten bildet, sind beziehlich ξ/q, η/q und ζ/q.

Wenn wir nun in Richtung dieser augenblicklichen Drehungsaxe, das unendlich kleine Stück $q\varepsilon$ abschneiden, so sind die Projectionen dieses Stückes auf die drei Coordinataxen beziehlich $\varepsilon\xi$, $\varepsilon\eta$ und $\varepsilon\zeta$. Während im Punkte x, y, z die Componenten der Geschwindigkeit u, v und w sind, sind sie am anderen Endpunkte von $q\varepsilon$ beziehlich:

$$\begin{aligned} u_1 &= u + \varepsilon\xi\frac{du}{dx} + \varepsilon\eta\frac{du}{dy} + \varepsilon\zeta\frac{du}{dz},\\ v_1 &= v + \varepsilon\xi\frac{dv}{dx} + \varepsilon\eta\frac{dv}{dy} + \varepsilon\zeta\frac{dv}{dz},\\ w_1 &= w + \varepsilon\xi\frac{dw}{dx} + \varepsilon\eta\frac{dw}{ny} + \varepsilon\zeta\frac{dw}{dz}.\end{aligned}$$

Nach Verlauf der Zeit dt haben also die Projectionen der Entfernung der beiden Wassertheilchen, welche zu Anfang von dt das Stück $q\varepsilon$ begrenzten, einen Werth erlangt, welchen man mit Berücksichtigung der Gleichungen (3) folgendermassen schreiben kann:

35

$$\varepsilon \xi + (u_1 - u)\, dt = \varepsilon \left(\xi + \frac{\partial \xi}{\partial t} dt \right),$$

$$\varepsilon \eta + (v_1 - v)\, dt = \varepsilon \left(\eta + \frac{\partial \eta}{\partial t} dt \right),$$

$$\varepsilon \zeta + (w_1 - w)\, dt = \varepsilon \left(\zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial t} dt \right).$$

Links stehen hier die Projectionen der neuen Lage der Verbindungslinie $q\varepsilon$, rechts die mit dem constanten Factor ε multiplicirten Projectionen der neuen Rotationsgeschwindigkeit; es folgt aus diesen Gleichungen, dass die Verbindungslinie der beiden Wassertheilchen, welche zu Anfang der Zeit dt das Stück $q\varepsilon$ der augenblicklichen Rotationsaxe begrenzten, auch nach Ablauf der Zeit dt noch mit der jetzt geänderten Rotationsaxe zusammenfällt.

Wenn wir eine Linie, deren Richtung überall mit der Richtung der augenblicklichen Rotationsaxe der dort befindlichen Wassertheilchen zusammentrifft, wie oben festgesetzt ist, eine *Wirbellinie* nennen, so können wir den eben gefundenen Satz so aussprechen: *Eine jede Wirbellinie bleibt fortdauernd aus denselben Wassertheilchen zusammengesetzt, während sie mit diesen Wassertheilchen in der Flüssigkeit fortschwimmt.*

Die rechtwinkligen Componenten der Rotationsgeschwindigkeit nehmen in demselben Verhältnisse zu, wie die Projectionen des Stückes εq der Rotationsaxe; daraus folgt, dass *die Grösse der resultirenden Rotationsgeschwindigkeit in einem bestimmten Wassertheilchen in demselben Verhältnisse sich verändert, wie der Abstand dieses Wassertheilchens von seinen Nachbarn in der Rotationsaxe*

Denken wir uns durch alle Punkte des Umfanges einer unendlich kleinen Fläche Wirbellinien gelegt, so wird dadurch aus der Flüssigkeit ein Faden von unendlich kleinem Querschnitt herausgetheilt, der *Wirbelfaden* genannt werden soll. Das Volumen eines zwischen zwei bestimmten Wassertheilchen gelegenen Stückes eines solchen Fadens, welches nach den eben bewiesenen Sätzen immer von denselben Wassertheilchen angefüllt bleibt, muss bei der Fortbewegung constant bleiben, sein Querschnitt sich also im umgekehrten Verhältnisse als die

Länge ändern. Danach kann man den eben hingestellten Satz auch so aussprechen: *Das Product aus der Rotationsgeschwindigkeit und dem Querschnitte in einem aus denselben Wassertheilchen bestehenden Stücke eines Wirbelfadens bleibt bei der Fortbewegung desselben constant.*

Aus den Gleichungen (2) folgt unmittelbar, dass: 36

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0\,.$$

Daraus weiter, dass:

$$\iiint \left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right) dx\, dy\, dz = 0\,,$$

wobei die Integration über einen ganz beliebigen Theil S der Wassermasse ausgedehnt werden kann. Wenn wir partiell integriren, folgt daraus:

$$\iint \xi\, dy\, dz + \iint \eta\, dx\, dz + \iint \zeta\, dx\, dy = 0\,,$$

wobei die Integrationen über die ganze Oberfläche des Raumes S auszudehnen sind. Nennen wir $d\omega$ ein Flächenelement dieser Oberfläche und α, β, γ die drei Winkel, welche die nach aussen gerichtete Normale von $d\omega$ mit den Coordinataxen bildet, so ist:

$$dy\, dz = \cos\alpha\, d\omega\,, \quad dx\, dz = \cos\beta\, d\omega\,, \quad dx\, dy = \cos\gamma\, d\omega\,,$$

also:

$$\iint (\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma)\, d\omega = 0\,,$$

oder wenn man σ die resultirende Rotationsgeschwindigkeit nennt, und ϑ den Winkel zwischen ihr und der Normale,

$$\iint \sigma\cos\vartheta\,.\,d\omega = 0\,,$$

die Integration über die ganze Oberfläche von S ausgedehnt.

Nun sei S ein Stück eines Wirbelfadens, begrenzt durch zwei unendlich kleine senkrecht gegen die Axe des Fadens gelegte Ebenen $\omega_{,}$ und $\omega_{,,}$, so ist $\cos\vartheta$ an einer dieser Ebenen gleich 1, an der andern -1, an der ganzen übrigen Oberfläche des Fadens gleich 0, folglich wenn $\sigma_{,}$ und $\sigma_{,,}$ die Rotationsgeschwindigkeiten in $\omega_{,}$ und $\omega_{,,}$ sind, reducirt sich die letzte Gleichung auf:

$$\sigma_{,}\omega_{,} = \sigma_{,,}\omega_{,,}\,,$$

woraus folgt: *Das Product aus der Rotationsgeschwindigkeit und dem Querschnitte ist in der ganzen Länge*

desselben Wirbelfadens constant. Dass es sich auch bei der Fortbewegung des Fadens nicht ändert, ist vorher schon bewiesen worden.

Es folgt hieraus auch, dass ein Wirbelfaden nirgends innerhalb der Flüssigkeit aufhören dürfe, sondern entweder ringförmig innerhalb der Flüssigkeit in sich zurücklaufen, oder
37 bis an die Grenzen der Flüssigkeit reichen müsse. Denn wenn ein Wirbelfaden innerhalb der Flüssigkeit irgend wo endete, würde sich eine geschlossene Fläche construiren lassen, für welche das Integral $\int \sigma \cos\vartheta . d\omega$ nicht den Werth Null hätte.

§ 3. Integration nach dem Raume.

Wenn man die Bewegung der in der Flüssigkeit vorhandenen Wirbelfäden bestimmen kann, so werden durch die hingestellten Sätze auch die Grössen ξ, η und ζ vollständig zu bestimmen sein. Wir wollen jetzt an die Aufgabe gehen, aus den Grössen ξ, η und ζ die Geschwindigkeiten u, v und w zu finden.

Es seien also innerhalb einer Wassermasse, die den Raum S einnimmt, die Werthe von ξ, η und ζ gegeben, welche drei Grössen der Bedingung genügen, dass:

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0. \tag{2a}$$

Es sollen gefunden werden u, v und w, so dass sie innerhalb des ganzen Raumes S den Bedingungen genügen, dass:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} &= 2\xi, \\ \frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz} &= 2\eta, \\ \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} &= 2\zeta. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Dazu kommen noch die durch die jedesmalige Natur der Aufgabe für die Grenze des Raumes S geforderten Bedingungen.

Bei der gegebenen Vertheilung von ξ, η, ζ können nun theils Wirbellinien vorkommen, welche innerhalb des Raumes S geschlossen in sich zurücklaufen, theils solche, welche die Grenze von S erreichen und hier abbrechen. Wenn letzteres

der Fall ist, so kann man jedenfalls entweder auf der Oberfläche von S oder ausserhalb S diese Wirbellinien fortsetzen und in sich zurücklaufend schliessen, so dass dann ein grösserer Raum S_1 existirt, welcher nur geschlossene Wirbellinien enthält, und an dessen ganzer Oberfläche ξ, η, ζ und ihre Resultante σ selbst gleich Null sind, oder wenigstens:

$$\xi \cos\alpha + \eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma = \sigma \cos\vartheta = 0. \tag{2b}$$

Wie vorher bedeuten hier α, β, γ die Winkel zwischen der 38
Normale des betreffenden Theiles der Oberfläche von S_1 und den Coordinataxen, ϑ den Winkel zwischen der Normale und der resultirenden Rotationsaxe.

Werthe von u, v, w, welche den Gleichungen $(1)_4$ und (2) genügen, erhalten wir nun, indem wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{dP}{dx} + \frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz}, \\ v &= \frac{dP}{dy} + \frac{dL}{dz} - \frac{dN}{dx}, \\ w &= \frac{dP}{dz} + \frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

und die Grössen L, M, N, P durch die Bedingungen bestimmen, dass innerhalb des Raumes S_1:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2L}{dx^2} + \frac{d^2L}{dy^2} + \frac{d^2L}{dz^2} &= 2\xi, \\ \frac{d^2M}{dx^2} + \frac{d^2M}{dy^2} + \frac{d^2M}{dz^2} &= 2\eta, \\ \frac{d^2N}{dx^2} + \frac{d^2N}{dy^2} + \frac{d^2N}{dz^2} &= 2\zeta, \\ \frac{d^2P}{dx^2} + \frac{d^2P}{dy^2} + \frac{d^2P}{dz^2} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Wie diese letzteren Gleichungen integrirt werden, ist bekannt. L, M, N sind die Potentialfunctionen fingirter magnetischer Massen, die mit der Dichtigkeit $-\xi/2\pi$, $-\eta/2\pi$, und $-\zeta/2\pi$ durch den Raum S_1 verbreitet sind, P die Potentialfunction von Massen, die ausserhalb des Raumes S liegen. Bezeichnen wir die Entfernung eines Punktes, dessen Coordinaten a, b, c sind, von dem Punkte x, y, z mit r, und mit ξ_a, η_a, ζ_a die Werthe von ξ, η, ζ in dem Punkte a, b, c, so ist also:

$$\left.\begin{aligned} L &= -\frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\xi_a}{r}\, da\, db\, dc \\ M &= -\frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\eta_a}{r}\, da\, db\, dc \\ N &= -\frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\zeta_a}{r}\, da\, db\, dc, \end{aligned}\right\} \quad (5\,\text{a})$$

die Integration über den Raum S_1 ausgedehnt, und:

$$P = \iiint \frac{k}{r}\, da\, db\, dc,$$

39 wo k eine willkührliche Function von a, b, c ist, und die Integration über den äusseren, S umschliessenden Raum auszudehnen ist. Die willkührliche Function k muss so bestimmt werden, dass die Grenzbedingungen erfüllt werden, eine Aufgabe, deren Schwierigkeit ähnlich denen über electrische und magnetische Vertheilung ist.

Dass die in (4) gegebenen Werthe von u, v und w die Bedingung $(1)_4$ erfüllen, ergiebt sich gleich durch Differentiation mit Berücksichtigung der vierten der Gleichungen (5).

Ferner findet man durch Differentiation der Gleichungen (4) mit Berücksichtigung der ersten drei von (5), dass:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} &= 2\xi - \frac{d}{dx}\left[\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz}\right] \\ \frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz} &= 2\eta - \frac{d}{dy}\left[\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz}\right] \\ \frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx} &= 2\zeta - \frac{d}{dz}\left[\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz}\right]. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (2) sind also ebenfalls erfüllt, wenn nachgewiesen werden kann, dass im ganzen Raume S_1:

$$\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = 0. \quad (5\,\text{b})$$

Dass dies der Fall sei, ergiebt sich aus den Gleichungen (5a):

$$\frac{dL}{dx} = +\frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\xi_a (x-a)}{r^3}\, da\, db\, dc,$$

oder nach partieller Integration:

$$\frac{dL}{dx} = \frac{1}{2\pi}\iint \frac{\xi_a}{r}\, db\, dc - \frac{1}{2\pi}\iiint \frac{1}{r} \cdot \frac{d\xi_a}{da}\, da\, db\, dc,$$

$$\frac{dM}{dy} = \frac{1}{2\pi}\iint \frac{\eta_a}{r}\, da\, dc - \frac{1}{2\pi}\iiint \frac{1}{r}\cdot\frac{d\eta_a}{db}\, da\, db\, dc,$$

$$\frac{dN}{dz} = \frac{1}{2\pi}\iint \frac{\zeta_a}{r}\, da\, db - \frac{1}{2\pi}\iiint \frac{1}{r}\cdot\frac{d\zeta_a}{dc}\, da\, db\, dc.$$

Addiren wir diese drei Gleichungen und nennen das Flächenelement der Oberfläche von S wieder $d\omega$, so erhalten wir:

$$\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = \frac{1}{2\pi}\int (\xi_a \cos\alpha + \eta_a \cos\beta + \zeta_a \cos\gamma)\,\frac{1}{r}\, d\omega$$
$$- \frac{1}{2\pi}\iiint \frac{1}{r}\left(\frac{d\xi_a}{da} + \frac{d\eta_a}{db} + \frac{d\zeta_a}{dc}\right) da\, db\, dc.$$

Da aber im ganzen Innern des Raumes: 40

$$\frac{d\xi_a}{da} + \frac{d\eta_a}{db} + \frac{d\zeta_a}{dc} = 0, \qquad (2\text{a})$$

und auf seiner ganzen Oberfläche:

$$\xi_a \cos\alpha + \eta_a \cos\beta + \zeta_a \cos\gamma = 0, \qquad (2\text{b})$$

so sind beide Integrale gleich 0 und die Gleichung (5b) wie die Gleichungen (2) erfüllt. Die Gleichungen (4) und (5) oder (5a) sind somit wirklich Integrale der Gleichungen $(1)_4$ und (2).

Die in der Einleitung erwähnte Analogie zwischen den Fernwirkungen der Wirbelfäden und den electromagnetischen Fernwirkungen stromleitender Drähte, welche ein sehr gutes Mittel abgiebt, um die Form der Wirbelbewegungen anschaulich zu machen, ergiebt sich aus diesen Sätzen.

Wenn wir die Werthe von L, M, N aus den Gleichungen (5a) in die Gleichung (4) setzen, und diejenigen unendlich kleinen Theile von u, v und w, welche in den Integralen von dem Körperelemente da, db, dc herrühren, mit Δu, Δv, Δw bezeichnen, ihre Resultante mit Δp, so ist:

$$\Delta u = \frac{1}{2\pi}\frac{(y-b)\,\zeta_a - (z-c)\,\eta_a}{r^3}\, da\, db\, dc,$$

$$\Delta v = \frac{1}{2\pi}\frac{(z-c)\,\xi_a - (x-a)\,\zeta_a}{r^3}\, da\, db\, dc,$$

$$\Delta w = \frac{1}{2\pi}\frac{(x-a)\,\eta_a - (y-b)\,\xi_a}{r^3}\, da\, db\, dc.$$

Aus diesen Gleichungen geht hervor, dass:

$$\Delta u\,(x-a) + \Delta v\,(y-b) + \Delta w\,(z-c) = 0,$$

d. h. die Resultante Δp von Δu, Δv und Δw macht mit r einen rechten Winkel. Ferner:

$$\xi_a \Delta u + \eta_a \Delta v + \zeta_a \Delta w = 0,$$

d. h. dieselbe Resultante Δp macht auch mit der resultirenden Rotationsaxe in a, b, c einen rechten Winkel. Endlich:

$$\Delta p = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2} = \frac{da\,db\,dc}{2\pi r^2}\,\sigma \sin \nu,$$

wo σ die Resultante von ξ_a, η_a, ζ_a und ν der Winkel zwischen ihr und r ist, welcher durch die Gleichung bestimmt wird:

$$\sigma r \cos \nu = (x-a)\,\xi_a + (y-b)\,\eta_a + (z-c)\,\zeta_a.$$

41 Jedes rotirende Wassertheilchen a bedingt also in jedem anderen Theilchen b derselben Wassermasse eine Geschwindigkeit, welche senkrecht gegen die durch die Rotationsaxe von a und das Theilchen b gelegte Ebene steht. Die Grösse dieser Geschwindigkeit ist direct proportional dem Volumen von a, seiner Rotationsgeschwindigkeit und dem Sinus des Winkels zwischen der Linie ab und der Rotationsaxe, umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung beider Theilchen.

Genau demselben Gesetze folgt die Kraft, welche eine in a befindliche electrische, der Rotationsaxe parallele Strömung auf ein in b befindliches magnetisches Theilchen ausüben würde.

Die mathematische Verwandtschaft beider Klassen von Naturerscheinungen beruht darin, dass bei den Wasserwirbeln in denjenigen Theilen des Wassermasse, welche keine Rotation haben, ein Geschwindigkeitspotential φ existirt, welches der Gleichung:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0$$

Genüge thut, welche Gleichung nur innerhalb der Wirbelfäden nicht gilt. Wenn wir uns die Wirbelfäden aber immer als geschlossen denken entweder innerhalb oder ausserhalb der Wassermasse, so ist der Raum, in welchem die Differentialgleichung für φ gilt, ein mehrfach zusammenhängender, denn er bleibt noch zusammenhängend, wenn man Schnittflächen durch ihn gelegt denkt, deren jede durch einen Wirbelfaden vollständig begrenzt wird. In solchen mehrfach zusammenhängenden Räumen kann nun eine Function φ, welche der obigen Differentialgleichung genügt, mehrdeutig werden, und

sie muss mehrdeutig werden, wenn sie in sich selbst zurücklaufende Strömungen darstellen soll; denn da die Geschwindigkeiten der Wassermasse ausserhalb der Wirbelfäden den Differentialquotienten von φ proportional sind, so muss man der Bewegung des Wassers folgend zu immer grösseren Werthen von φ fortschreiten. Ist die Strömung also in sich zurücklaufend, und kommt man ihr folgend schliesslich an den Ort zurück, wo man schon früher war, so findet man für diesen einen zweiten höheren Werth von φ. Da man dasselbe unendlich oft ausführen kann, so muss es unendlich viel verschiedene Werthe von φ für jeden Punkt eines solchen mehrfach zusammenhängenden Raumes geben, welche um gleiche Differenzen von einander verschieden sind, wie die verschiedenen Werthe von Arc tang (x/y), welches eine solche mehrdeutige Function ist, die der obigen Differentialgleichung genügt.

Ebenso verhält es sich mit den electromagnetischen Wir- 42
kungen eines geschlossenen electrischen Stromes. Derselbe wirkt in die Ferne, wie eine gewisse Vertheilung magnetischer Massen auf einer von dem Stromleiter begrenzten Fläche. Ausserhalb des Stromes können deshalb die Kräfte, die er auf ein magnetisches Theilchen ausübt, als die Differentialquotienten einer Potentialfunction V betrachtet werden, welche der Gleichung genügt:

$$\frac{d^2 V}{d x^2} + \frac{d^2 V}{d y^2} + \frac{d^2 V}{d z^2} = 0.$$

Auch hier ist aber der Raum, welcher den geschlossenen Stromleiter umgiebt, und in dem diese Gleichung gilt, mehrfach zusammenhängend, und V vieldeutig.

Bei den Wirbelbewegungen des Wassers also, wie bei den electromagnetischen Wirkungen, hängen Geschwindigkeiten oder Kräfte ausserhalb des von Wirbelfäden oder electrischen Strömen durchzogenen Raumes von mehrdeutigen Potentialfunctionen ab, welche übrigens der allgemeinen Differentialgleichung der magnetischen Potentialfunctionen Genüge thun, während innerhalb des von Wirbelfäden oder electrischen Strömen durchzogenen Raumes statt der Potentialfunctionen, die hier nicht existiren, andere gemeinsame Functionen auftreten, wie sie in den Gleichungen (4), (5) und (5 a) hingestellt sind. Bei den

einfach fortströmenden Wasserbewegungen und den magnetischen Kräften dagegen haben wir es mit eindeutigen Potentialfunctionen zu thun, ebenso wie bei der Gravitation, den electrischen Anziehungskräften, den constant gewordenen electrischen und thermischen Strömungen.

Diejenigen Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, in denen ein eindeutiges Geschwindigkeitspotential existirt, können wir Integrale erster Klasse nennen. Diejenigen dagegen, bei welchen Rotationen eines Theils der Wassertheilchen und demgemäss in den nicht rotirenden Wassertheilchen ein mehrdeutiges Geschwindigkeitspotential vorkommt, Integrale zweiter Klasse. Es kann vorkommen, dass im letzteren Falle nur solche Theile des Raumes in der Aufgabe zu berücksichtigen sind, welche keine rotirenden Wassertheile enthalten, z. B. bei Bewegungen des Wassers in ringförmigen Gefässen, wobei ein Wirbelfaden durch die Axe des Gefässes gehend gedacht werden kann, und wo also die Aufgabe doch noch zu denen gehört, die mittels der Annahme eines Geschwindigkeitspotentials gelöst werden können.

In den hydrodynamischen Integralen erster Klasse sind die Geschwindigkeiten der Wassertheilchen gleich gerichtet und proportional den Kräften, welche eine gewisse ausserhalb
43 der Flüssigkeit befindliche Vertheilung magnetischer Massen auf ein am Orte des Wassertheilchens befindliches magnetisches Theilchen hervorbringen würde.

In den hydrodynamischen Integralen zweiter Klasse sind die Geschwindigkeiten der Wassertheilchen gleich gerichtet und proportional den auf ein magnetisches Theilchen wirkenden Kräften, welche geschlossene electrische, durch die Wirbelfäden fliessende Ströme, deren Dichtigkeit der Rotationsgeschwindigkeit dieser Fäden proportional wäre, vereint mit ausserhalb der Flüssigkeit befindlichen magnetischen Massen hervorbringen würden. Die electrischen Ströme innerhalb der Flüssigkeit würden mit dem betreffenden Wirbelfaden fortfliessen und constante Intensität behalten müssen. Die angenommene Vertheilung magnetischer Massen ausserhalb der Flüssigkeit oder auf ihrer Oberfläche muss so bestimmt werden, dass den Grenzbedingungen Genüge geschieht. Jede

magnetische Masse kann bekanntlich auch durch electrische Strömungen ersetzt werden. Statt also in den Werthen für u, v und w noch die Potentialfunction P einer ausserhalb liegenden Masse k hinzuzufügen, erhält man eine ebenso allgemeine Lösung, wenn man den Grössen ξ, η und ζ ausserhalb oder selbst nur an der Oberfläche der Flüssigkeit beliebige Werthe ertheilt, aber so, dass nur geschlossene Stromfäden entstehen, und dann die Integration in den Gleichungen (5 a) über den ganzen Raum ausdehnt, in welchem ξ, η und ζ von 0 verschieden sind.

§ 4. Wirbelflächen und Energie der Wirbelfäden.

In den hydrodynamischen Integralen erster Art genügt es, wie ich oben gezeigt habe, die Bewegung der Oberfläche zu kennen. Dadurch ist die Bewegung im Innern der Flüssigkeit ganz bestimmt. Bei den Integralen zweiter Art ist dagegen noch die Bewegung der innerhalb der Flüssigkeit befindlichen Wirbelfäden unter ihrem gegenseitigen Einflusse und mit Berücksichtigung der Grenzbedingungen zu bestimmen, wodurch die Aufgabe viel verwickelter wird. Indessen lässt sich für gewisse einfache Fälle auch diese Aufgabe lösen, namentlich für solche, wo Rotation der Wassertheilchen nur in gewissen Flächen oder Linien vorkommt, und die Gestalt dieser Flächen und Linien bei der Fortbewegung unverändert bleibt.

Die Eigenschaften von Flächen, welchen eine unendlich dünne Schicht rotirender Wassertheilchen anliegt, ergeben sich leicht aus den Gleichungen (5 a). Wenn ξ, η und ζ nur in einer unendlich dünnen Schicht von 0 verschieden sind, so werden ihre Potentialfunctionen L, M und N nach bekannten Sätzen auf beiden Seiten der Schicht gleiche Werthe haben,
aber ihre Differentialquotienten, in Richtung der Normale der 44
Schicht genommen, werden verschieden sein. Denken wir uns die Coordinataxen so gelegt, dass an der von uns betrachteten Stelle der Wirbelfläche die z-Axe der Normale der Fläche, die x-Axe der Rotationsaxe der Wassertheilchen in der Fläche entspricht, so dass an dieser Stelle $\eta = \zeta = 0$, so werden die Potentiale M und N, so wie ihre Differentialquotienten auf beiden Seiten der Schicht dieselben Werthe haben, ebenso L

und dL/dx und dL/dy, dagegen wird dL/dz zwei verschiedene Werthe haben, deren Unterschied gleich $2\xi\varepsilon$ ist, wenn ε die Dicke der Schicht bezeichnet. Demgemäss ergeben die Gleichungen (4), dass u und w auf beiden Seiten der Wirbelfläche gleiche Werthe haben, v aber Werthe, die um $2\xi\varepsilon$ von einander verschieden sind. Es ist also auf beiden Seiten einer Wirbelfläche diejenige Componente der Geschwindigkeit, welche senkrecht gegen die Wirbellinie stehend die Fläche tangirt, von verschiedenem Werthe. Innerhalb der Schicht rotirender Wassertheilchen muss man sich die betreffende Componente der Geschwindigkeit gleichmässig zunehmend denken von demjenigen Werthe der an der einen Seite der Fläche stattfindet, zu dem der anderen Seite. Denn wenn ξ durch die ganze Dicke der Schicht hier constant ist, und α einen ächten Bruch bezeichnet, v' den Werth von v auf der einen, v_1 auf der anderen Seite, v_α in der Schicht selbst um $\alpha\varepsilon$ von der ersten Seite entfernt, so sahen wir, dass $v' - v_1 = 2\xi\varepsilon$, weil zwischen beiden eine Schicht von der Dicke ε und der Rotationsintensität ξ liegt. Aus demselben Grunde muss $v' - v_\alpha = 2\xi\varepsilon\alpha = \alpha.(v' - v_1)$ sein, worin der hingestellte Satz liegt. Da wir uns die rotirenden Wassertheilchen selbst als bewegt denken müssen, und die Aenderung der Vertheilung auf der Fläche von ihrer Bewegung abhängt, so müssen wir ihnen als mittlere Geschwindigkeit ihres Fortfliessens längs der Fläche für die ganze Dicke der Schicht eine solche zuertheilen, welche dem arithmetischen Mittel der an beiden Seiten der Schicht stattfindenden Geschwindigkeiten entspricht.

Eine solche Wirbelfläche würde z. B. entstehen, wenn zwei vorher getrennte und bewegte Flüssigkeitsmassen in Berührung miteinander kommen. An der Berührungsfläche würden sich die gegen diese senkrechten Geschwindigkeiten nothwendig ausgleichen müssen. Die sie tangirenden Geschwindigkeiten werden aber im Allgemeinen in den beiden Flüssigkeitsmassen verschieden sein. Die Berührungsfläche würde also die Eigenschaften einer Wirbelfläche haben.

45 Dagegen darf man sich im Allgemeinen vereinzelte Wirbelfäden nicht als unendlich dünn denken, weil sonst die Geschwindigkeiten an entgegengesetzten Seiten des Fadens unendlich

grosse und entgegengesetzte Werthe erhalten, und die eigene Geschwindigkeit des Fadens deshalb unbestimmt wird. Um nun doch gewisse allgemeine Schlüsse für die Bewegung sehr dünner Fäden von beliebigem Querschnitt ziehen zu können, wird uns das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft dienen.

Ehe wir also zu einzelnen Beispielen übergehen, wollen wir noch die Gleichung für die lebendige Kraft K der bewegten Wassermasse bilden:

$$K = \tfrac{1}{2} h \iiint (u^2 + v^2 + w^2)\, dx\, dy\, dz. \tag{6}$$

Indem ich in dem Integral nach den Gleichungen (4) setze:

$$u^2 = u\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz}\right),$$
$$v^2 = v\left(\frac{dP}{dy} + \frac{dL}{dz} - \frac{dN}{dx}\right),$$
$$w^2 = w\left(\frac{dP}{dz} + \frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy}\right)$$

und partiell integrire, dann mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ und $\cos\vartheta$ die Winkel bezeichne, welche die nach innen gerichtete Normale des Elements $d\omega$ der Wassermasse mit den Coordinataxen und der resultirenden Geschwindigkeit q bildet, erhalte ich mit Berücksichtigung der Gleichungen (2) und $(1)_4$:

$$K = -\frac{h}{2}\int d\omega\,[Pq\cos\vartheta + L(v\cos\gamma - w\cos\beta) \tag{6 a}$$
$$+ M(w\cos\alpha - u\cos\gamma) + N(u\cos\beta - v\cos\alpha)]$$
$$- h\iiint (L\xi + M\eta + N\zeta)\, dx\, dy\, dz.$$

Den Werth von dK/dt erhält man aus den Gleichungen (1), indem man die erste mit u, die zweite mit v, die dritte mit w multiplicirt und addirt:

$$h\left(u\frac{du}{dt} + v\frac{dv}{dt} + w\frac{dw}{dt}\right) = -\left(u\frac{dp}{dx} + v\frac{dp}{dy} + w\frac{dp}{dz}\right)$$
$$+ h\left(u\frac{dV}{dx} + v\frac{dV}{dy} + w\frac{dV}{dz}\right) - \frac{h}{2}\left(u\frac{d(q^2)}{dx} + v\frac{d(q^2)}{dy} + w\frac{d(q^2)}{dz}\right).$$

Wenn man beide Seiten mit $dx\,dy\,dz$ multiplicirt, dann über die ganze Ausdehnung der Wassermasse integrirt, und berücksichtigt, dass wegen $(1)_4$:

$$\iiint\left(u\frac{d\psi}{dx} + v\frac{d\psi}{dy} + w\frac{d\psi}{dz}\right) dx\, dy\, dz = -\int \psi q \cos\vartheta\, d\omega,$$

wenn ψ im Innern der Wassermasse eine stetige und eindeutige
46 Function bezeichnet, so erhält man:

$$\frac{dK}{dt} = \int d\omega\,(p - h\,U + \tfrac{1}{2}hq^2)\,q\cos\vartheta. \qquad (6\text{ b})$$

Wenn die Wassermasse ganz in festen Wänden eingeschlossen ist, muss $q\cos\vartheta$ an allen Punkten der Oberfläche gleich 0 sein, dann wird also auch $dK/dt = 0$, d. h. K constant.

Denkt man sich diese feste Wand in unendlicher Entfernung vom Anfangspunkt der Coordinaten und alle vorhandenen Wirbelfäden in endlicher Entfernung, so werden die Potentialfunctionen L, M, N, deren Massen ξ, η, ζ jede in Summa gleich Null sind, in der unendlichen Entfernung $\mathfrak{R}$ wie $\mathfrak{R}^{-2}$ abnehmen, und die Geschwindigkeiten, ihre Differentialquotienten, wie $\mathfrak{R}^{-3}$, das Flächenelement $d\omega$ aber, wenn es immer dem gleichen Kegelwinkel im Nullpunkte der Coordinaten entsprechen soll, wie $\mathfrak{R}^2$ zunehmen. Das erste Integral in dem Ausdrucke für K (Gleichung (6 a)), welches über die Oberfläche der Wassermasse ausgedehnt ist, wird wie $\mathfrak{R}^{-3}$ abnehmen, für ein unendliches $\mathfrak{R}$ also gleich Null werden. Dann reducirt sich der Werth von K auf:

$$K = -h\iiint (L\xi + M\eta + N\zeta)\,dx\,dy\,dz \qquad (6\text{ c})$$

und diese Grösse wird während der Bewegung nicht geändert

§ 5. Geradlinige parallele Wirbelfäden.

Wir wollen zuerst den Fall untersuchen, wo nur geradlinige, der Axe der z parallele Wirbelfäden existiren, entweder in einer unendlich ausgedehnten Wassermasse, oder in einer solchen Masse, die durch zwei gegen die Wirbelfäden senkrechte unendliche Ebenen begrenzt ist, was auf dasselbe herauskommt. Alle Bewegungen geschehen dann in Ebenen, die zur Axe der z senkrecht sind, und sind in allen diesen Ebenen genau dieselben.

Wir setzen also:

$$w = \frac{du}{dz} = \frac{dv}{dz} = \frac{dp}{dz} = \frac{dV}{dz} = 0.$$

Dann reduciren sich die Gleichungen (2) auf:

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad 2\zeta = \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx},$$

die Gleichungen (3) auf:

$$\frac{\delta \zeta}{\partial t} = 0.$$

Die Wirbelfäden behalten also constante Rotationsge- 47
schwindigkeit, so wie sie auch constanten Querschnitt behalten.

Die Gleichungen (4.) reduciren sich auf:

$$u = \frac{dN}{dy}, \qquad v = -\frac{dN}{dx}, \qquad \frac{d^2N}{dx^2} + \frac{d^2N}{dy^2} = 2\zeta.$$

Ich habe hier nach der am Ende des § 3 gemachten Bemerkung $P = 0$ gesetzt. Die Gleichung der Strömungslinien ist also $N = \text{Const.}$

N ist in diesem Falle die Potentialfunction unendlich langer Linien; diese selbst ist unendlich gross, aber ihre Differentialquotienten sind endlich. Sind a und b die Coordinaten eines Wirbelfadens, dessen Querschnitt $da\,db$ ist, so ist:

$$-v = \frac{dN}{dx} = \frac{\zeta\,da\,db}{\pi} \cdot \frac{x-a}{r^2}, \qquad u = \frac{dN}{dy} = \frac{\zeta\,da\,db}{\pi} \cdot \frac{y-b}{r^2}.$$

Es folgt hieraus, dass die resultirende Geschwindigkeit q senkrecht gegen r, das auf den Wirbelfaden gefällte Loth steht, und dass:

$$q = \frac{\zeta\,da\,db}{\pi r}.$$

Haben wir in einer in Richtung der x und y unendlich ausgedehnten Wassermasse mehrere Wirbelfäden, deren Coordinaten beziehlich x_1, y_1, x_2, y_2 u. s. w. sind, während das Product aus Rotationsgeschwindigkeit und Querschnitt eines jeden derselben mit m_1, m_2 etc. bezeichnet wird, und bilden wir die Summen:

$$U = m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3 \text{ etc.,}$$
$$V = m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 \text{ etc.,}$$

so werden dieselben gleich 0, weil der Antheil an der Summe V, der aus der Wirkung des zweiten Wirbelfadens auf den ersten entsteht, aufgehoben wird durch den vom ersten Wirbelfaden auf den zweiten. Beide sind nämlich:

$$m_1 \cdot \frac{m_2}{\pi} \frac{x_1 - x_2}{r^2} \text{ und } m_2 \cdot \frac{m_1}{\pi} \frac{x_2 - x_1}{r^2}$$

und so bei allen andern in beiden Summen. Nun ist U die Geschwindigkeit des Schwerpunktes der Massen m_1, m_2 u. s. w. in Richtung der x, multiplicirt mit der Summe dieser Massen, ebenso V parallel den y genommen. Beide Geschwindigkeiten sind also gleich Null, wenn nicht die Summe der Massen gleich Null, wo es überhaupt keinen Schwerpunkt giebt. Der
48 Schwerpunkt der Wirbelfäden bleibt also bei ihrer Bewegung umeinander unverändert, und da dieser Satz für jede beliebige Vertheilung der Wirbelfäden gilt, so dürfen wir ihn auch auf einzelne Wirbelfäden von unendlich kleinem Querschnitt anwenden.

Daraus ergeben sich nun nachstehende Folgerungen:

1) Haben wir einen einzelnen geradlinigen Wirbelfaden von unendlich kleinem Querschnitt, in einer nach allen gegen den Wirbelfaden senkrechten Richtungen unendlich ausgedehnten Wassermasse, so hängt die Bewegung der Wassertheilchen in endlicher Entfernung von ihm nur ab von dem Product $\zeta\, da\, db = m$ aus der Rotationsgeschwindigkeit und der Grösse seines Querschnitts, nicht von der Form seines Querschnitts. Die Theilchen der Wassermasse rotiren um ihn mit der Tangentialgeschwindigkeit $m/\pi r$, wo r die Entfernung vom Schwerpunkte des Wirbelfadens bezeichnet. Die Lage des Schwerpunktes selbst, die Rotationsgeschwindigkeit, die Grösse des Querschnitts, also auch die Grösse m bleiben unverändert, wenn auch die Form des unendlich kleinen Querschnitts sich ändern kann.

2) Haben wir zwei geradlinige Wirbelfäden von unendlich kleinem Querschnitt in einer unbegrenzten Wassermasse, so wird jeder den anderen in einer Richtung forttreiben, welche senkrecht gegen ihre Verbindungslinie steht. Die Länge der Verbindungslinie wird dadurch nicht geändert. Es werden sich also beide um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt in gleich bleibendem Abstande drehen. Ist die Rotationsgeschwindigkeit in beiden Wirbelfäden gleich gerichtet, also von gleichem Vorzeichen, so muss ihr Schwerpunkt zwischen ihnen liegen. Ist sie entgegengesetzt gerichtet, also von ungleichem Vorzeichen, so liegt ihr Schwerpunkt in der Verlängerung ihrer Verbindungslinie. Und ist das Product aus der Rotationsgeschwindigkeit und

dem Querschnitte bei beiden gleich, aber von entgegengesetztem Zeichen, wobei der Schwerpunkt in unendlicher Entfernung liegen würde, so schreiten sie beide mit gleicher Geschwindigkeit und senkrecht gegen ihre Verbindungslinie in gleicher Richtung fort.

Auf den letzteren Fall kann man auch den zurückführen, wo ein Wirbelfaden von unendlich kleinem Querschnitte sich neben einer ihm parallelen unendlich ausgedehnten Ebene befindet. Die Grenzbedingung für die Bewegung des Wassers an der Ebene, dass sie der Ebene parallel sein müsse, erfüllt man, indem man jenseits der Ebene noch einen zweiten Wirbelfaden, das Spiegelbild des ersten, hinzugefügt denkt. Daraus folgt denn, dass der 49
in der Wassermasse befindliche Wirbelfaden parallel der Ebene fortschreitet in der Richtung, in welcher sich die Wassertheilchen zwischen ihm und der Ebene bewegen, und mit $\frac{1}{4}$ der Geschwindigkeit, welche die Wassertheilchen im Fusspunkt eines von dem Wirbelfaden auf die Ebene gefällten Lothes haben.

Bei geradlinigen Wirbelfäden führt die Annahme eines unendlich kleinen Querschnittes auf keine unzulässige Folgerung, weil jeder einzelne Faden auf sich selbst keine forttreibende Kraft ausübt, sondern nur durch den Einfluss der anderen vorhandenen Fäden fortgetrieben wird. Anders ist es bei gekrümmten Fäden.

§ 6. Kreisförmige Wirbelfäden.

In einer unendlich ausgedehnten Wassermasse seien nur kreisförmige Wirbelfäden vorhanden, deren Ebenen zur z-Axe senkrecht sind und deren Mittelpunkte in dieser Axe liegen, sodass rings um sie herum alles symmetrisch ist. Man ändere die Coordinaten, indem man setzt:

$$x = \chi \cos \varepsilon, \qquad a = g \cos e,$$
$$y = \chi \sin \varepsilon, \qquad b = g \sin e,$$
$$z = z, \qquad c = c.$$

Die Rotationsgeschwindigkeit σ ist nach der Annahme nur eine Function von χ und z oder von g und c, und die Rotationsaxe steht überall senkrecht auf χ (oder g) und der z-Axe. Es sind also die rechtwinkeligen Componenten der Rotation in dem Punkte, dessen Coordinaten g, e und c sind:

$$\xi = -\sigma \sin e, \quad \eta = \sigma \cos e, \quad \zeta = 0.$$

In den Gleichungen (5a) wird:

$$r^2 = (z-c)^2 + \chi^2 + g^2 - 2\chi g \cos(\varepsilon - e),$$

$$L = \frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\sigma \sin e}{r}\, g\, dg\, de\, dc,$$

$$M = -\frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\sigma \cos e}{r}\, g\, dg\, de\, dc,$$

$$N = 0.$$

Indem man mit $\cos\varepsilon$ und $\sin\varepsilon$ multiplicirt und addirt, erhält man aus den Gleichungen für L und M:

$$L \sin\varepsilon - M\cos\varepsilon = -\frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\sigma\cos(\varepsilon - e)}{r}\, g\, dg\, d(\varepsilon - e)\, dc,$$

$$L\cos\varepsilon + M\sin\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\sigma \sin(\varepsilon - e)}{r}\, g\, dg\, d(\varepsilon - e)\, dc.$$

50 In beiden Integralen kommen die Winkel e und ε nur noch in der Verbindung $(\varepsilon - e)$ vor, und diese Grösse kann deshalb als die Variable unter dem Integral betrachtet werden. In dem zweiten Integrale heben sich die Theile, in denen $(\varepsilon - e) = \mathfrak{c}$ ist, gegen die auf, in denen $(\varepsilon - e) = 2\pi - \mathfrak{c}$, es wird also gleich Null. Setzen wir:

$$\psi = \frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\sigma \cos e \,.\, g\, dg\, de\, dc}{\sqrt{(z-c)^2 + \chi^2 + g^2 - 2g\chi\cos e}}, \tag{7}$$

so wird also:

$$M\cos\varepsilon - L\sin\varepsilon = \psi,$$
$$M\sin\varepsilon + L\cos\varepsilon = 0,$$

oder:

$$L = -\psi\sin\varepsilon, \qquad M = \psi\cos\varepsilon. \tag{7}$$

Nennen wir τ die Geschwindigkeit in Richtung des Radius χ, und berücksichtigen, dass in Richtung der Kreisperipherie wegen der symmetrischen Lage der Wirbelringe zur Axe die Geschwindigkeit gleich Null sein muss, so haben wir:

$$u = \tau\cos\varepsilon, \qquad v = \tau\sin\varepsilon,$$

und nach den Gleichungen (4):

$$u = -\frac{dM}{dz}, \qquad v = \frac{dL}{dz}, \qquad w = \frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy}.$$

Daraus folgt:

$$\tau = -\frac{d\psi}{dz}, \qquad w = \frac{d\psi}{d\chi} + \frac{\psi}{\chi},$$

oder:

$$\tau\chi = -\frac{d(\psi\chi)}{dz}, \qquad w\chi = \frac{d(\psi\chi)}{d\chi}. \tag{7 b}$$

Die Gleichung der Strömungslinien ist also:

$$\psi\chi = \text{Const.}$$

Wenn wir die im Werthe von ψ angezeigte Integration zunächst für einen Wirbelfaden von unendlich kleinem Querschnitte ausführen, dabei setzen $\sigma\, dg\, dc = m_1$, und den davon herrührenden Theil von ψ mit ψ_{m_1} bezeichnen, so ist:

$$\psi_{m_1} = \frac{m_1}{\pi}\sqrt{\frac{g}{\chi}}\left\{\frac{2}{\varkappa}(F - E) - \varkappa F\right\},$$

$$\varkappa^2 = \frac{4g\chi}{(g+\chi)^2 + (z-c)^2},$$

worin F und E die ganzen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung für den Modul $\varkappa$ bedeuten.

Setzen wir der Kürze wegen: 51

$$U = \frac{2}{\varkappa}(F - E) - \varkappa F,$$

wo also U eine Function von $\varkappa$ ist, so ist:

$$\tau\chi = \frac{m_1}{\pi}\sqrt{g\chi}\,\frac{dU}{d\varkappa}\cdot\varkappa\cdot\frac{z-c}{(g+\chi)^2 + (z-c)^2}.$$

Befindet sich nun in dem durch χ und z bestimmten Punkte ein zweiter Wirbelfaden m, und nennen wir τ_1 die Geschwindigkeit in Richtung von g, welche er dem Wirbelfaden m_1 mittheilt, so erhalten wir diese, indem wir in dem Ausdrucke für τ:

statt $\tau \;\; \chi \;\; g \;\; z \;\; c \;\; m_1$
setzen $\tau_1 \;\; g \;\; \chi \;\; c \;\; z \;\; m$.

Dabei bleiben $\varkappa$ und U unverändert, und es wird:

$$m\tau\chi + m_1\tau_1 g = 0. \tag{8}$$

Bestimmen wir nun den Werth der der Axe parallelen Geschwindigkeit w, welchen der Wirbelfaden m_1 hervorbringt, dessen Coordinaten g und c sind, so finden wir:

$$w\chi = \frac{1}{2}\frac{m_1}{\pi}\sqrt{\frac{g}{\chi}}\,U + \frac{m_1}{\pi}\sqrt{g\chi}\,\frac{dU}{d\varkappa}\cdot\frac{\varkappa}{2\chi}\cdot\frac{(z-c)^2 + g^2 - \chi^2}{(g+\chi)^2 + (z-c)^2}.$$

Nennt man nun w_1 die der z-Axe parallele Geschwindigkeit, welche der Wirbelring m, dessen Coordinaten z und χ sind, am Orte von m_1 hervorbringt, so braucht man dazu nur wie-

der die vorher schon angezeigte Vertauschung der betreffenden Coordinaten und Massen vorzunehmen. So findet man, dass:

$$2mw\chi^2 + 2m_1w_1g^2 - m\tau\chi z - m_1\tau_1 gc = \frac{2mm_1}{\pi}\sqrt{g\chi}\,U. \quad (8a)$$

Aehnliche Summen wie (8) und (8a) lassen sich für eine beliebig grosse Anzahl von Wirbelringen bilden. Ich bezeichne für den n^{ten} derselben das Product $\sigma\,dg\,dc$ mit m_n, die Componenten der Geschwindigkeit, welche ihm von den übrigen Wirbelringen mitgetheilt werden, mit τ_n und w_n, wobei aber vorläufig abgesehen wird von den Geschwindigkeiten, die jeder Wirbelring sich selbst mittheilen kann. Ich nenne ferner den Radius des Ringes ϱ_n und die Entfernung von einer gegen die Axe senkrechten Fläche λ, welche beiden letzteren Grössen zwar der Richtung nach mit χ und z übereinstimmen, aber als zu dem bestimmten Wirbelringe gehörig Functionen der Zeit, und nicht unabhängige Variable sind, wie χ und z. Schliesslich
52 sei der Werth von ψ, so weit dieser von den anderen Wirbelringen herrührt ψ_n. Es ergiebt sich aus (8) und (8a), indem man die entsprechenden Gleichungen für jedes einzelne Paar von Wirbelringen aufstellt und alle addirt:

$$\Sigma[m_n\varrho_n\tau_n] = 0,$$
$$\Sigma[2m_nw_n\varrho_n^2 - m_n\tau_n\varrho_n\lambda_n] = \Sigma[m_n\varrho_n\psi_n].$$

So lange man in diesen Summen noch eine endliche Zahl getrennter und unendlich dünner Wirbelringe hat, darf man unter w, τ und ψ nur diejenigen Theile dieser Grössen verstehen, welche von der Anwesenheit der anderen Ringe herrühren. Wenn man aber eine unendlich grosse Anzahl solcher Ringe den Raum continuirlich ausfüllend denkt, ist ψ die Potentialfunction einer continuirlichen Masse, w und τ sind Differentialquotienten dieser Potentialfunction, und es ist bekannt, dass sowohl in einer solchen Function wie in ihren Differentialquotienten die Theile der Function, welche von der Anwesenheit von Masse in einem unendlich kleinen den betreffenden Punkt, für den die Function bestimmt ist, umgebenden Raum herrühren, unendlich klein sind gegen die von endlichen Massen in endlicher Entfernung herrührenden.[1])

1) S. Gauss in Resultate des magnetischen Vereins im Jahre 1839, S. 7.

Verwandeln wir also die Summen in Integrale, so können wir unter w, τ und ψ die ganzen in dem betreffenden Punkte geltenden Werthe dieser Grössen verstehen, und:

$$w = \frac{d\lambda}{dt}, \qquad \tau = \frac{d\varrho}{dt}$$

setzen. Die Grösse m ersetzen wir zu diesem Zwecke durch das Product $\sigma\, d\varrho\, d\lambda$.

$$\iint \sigma \varrho \frac{d\varrho}{dt} d\varrho\, d\lambda = 0, \tag{9}$$

$$2\iint \sigma \varrho^2 \frac{d\lambda}{dt} d\varrho\, d\lambda - \iint \sigma \varrho \lambda \frac{d\varrho}{dt} d\varrho\, d\lambda = \iint \sigma \varrho \psi\, d\varrho\, d\lambda. \tag{9a}$$

Da das Product $\sigma\, d\varrho\, d\lambda$ gemäss § 2 nach der Zeit constant ist, so kann die Gleichung (9) nach t integrirt werden, und wir erhalten:

$$\tfrac{1}{2} \iint \sigma \varrho^2 d\varrho\, d\lambda = \text{Const.}$$

Denkt man den Raum durch eine Ebene getheilt, die durch die z-Axe geht und daher alle vorhandenen Wirbelringe schneidet, betrachten wir dann σ als die Dichtigkeit einer Massenschicht, und nennen $\mathfrak{M}$ die ganze in dieser Schicht der Ebene anliegende Masse, also: 53

$$\mathfrak{M} = \iint \sigma\, d\varrho\, d\lambda,$$

und R^2 den mittleren Werth von ϱ^2 für sämmtliche Massenelemente genommen, so ist:

$$\iint \sigma \varrho \,.\, \varrho\, d\varrho\, d\lambda = \mathfrak{M} R^2,$$

und da dieses Integral und der Werth von $\mathfrak{M}$ der Zeit nach constant sind, so folgt, dass auch R bei der Fortbewegung unverändert bleibt.

Existirt also in der unbegrenzten Flüssigkeitsmasse nur ein kreisförmiger Wirbelfaden von unendlich kleinem Querschnitte, so bleibt dessen Radius unverändert.

Die Grösse der lebendigen Kraft ist nach Gleichung (6c) in unserem Falle:

$$\begin{aligned} K &= -h \iiint (L\xi + M\eta)\, da\, db\, dc \\ &= -h \iiint \psi \sigma \,.\, \varrho\, d\varrho\, d\lambda\, d\varepsilon \\ &= -2\pi h \iint \psi \sigma \,.\, \varrho\, d\varrho\, d\lambda. \end{aligned}$$

Sie ist ebenfalls der Zeit nach constant.

Indem wir ferner bemerken, dass, weil $\sigma\, d\varrho\, d\lambda$ nach der Zeit constant ist:

$$\frac{d}{dt}\iint \sigma \varrho^2 \lambda\, d\varrho\, d\lambda = 2\iint \sigma \varrho \lambda \frac{d\varrho}{dt} d\varrho\, d\lambda + \iint \sigma \varrho^2 \frac{d\lambda}{dt} d\lambda\, d\varrho,$$

so wird die Gleichung (9a), wenn wir mit l den Werth von λ für den Schwerpunkt des Querschnittes des Wirbelfadens bezeichnen, damit (9) multipliciren und addiren:

$$2\frac{d}{dt}\iint \sigma \varrho^2 \lambda\, d\varrho\, d\lambda + 5\iint \sigma \varrho (l-\lambda) \frac{d\varrho}{dt} d\varrho\, d\lambda = -\frac{K}{2\pi h}. \quad (9b)$$

Wenn der Querschnitt des Wirbelfadens unendlich klein ist, und ε eine unendlich kleine Grösse derselben Ordnung wie $l-\lambda$ und die übrigen Lineardimensionen des Querschnittes, $\sigma\, d\varrho\, d\gamma$ aber endlich ist, so ist ψ und auch K von derselben Ordnung unendlich grosser Quantitäten, wie $\log \varepsilon$. Für sehr kleine Werthe des Abstandes v vom Wirbelringe wird nämlich:

$$v = \sqrt{(g-\chi)^2 + (z-c)^2},$$

$$\varkappa^2 = 1 - \frac{v^2}{4g^2},$$

$$\psi_{m_1} = \frac{m_1}{\pi} \log\left(\frac{\sqrt{1-\varkappa^2}}{4}\right) = \frac{m_1}{\pi} \log \frac{v}{8g}.$$

54 In dem Werthe von K wird ψ noch mit ϱ oder g multiplicirt. Ist g endlich und v von der gleichen Ordnung mit ε, so ist K von der Ordnung $\log \varepsilon$. Nur wenn g unendlich gross von der Ordnung $1/\varepsilon$ ist, wird K unendlich gross, wie $(1/\varepsilon) \log \varepsilon$. Dann geht der Kreis in eine gerade Linie über. Dagegen wird $d\varrho/dt$, welches gleich $d\psi/dz$ ist, von der Ordnung $1/\varepsilon$, das zweite Integral also endlich und bei endlichem ϱ verschwindend klein gegen K. In diesem Falle können wir im ersten Integrale das constante l statt λ setzen, und erhalten:

$$2\frac{d(\mathfrak{M} R^2 l)}{dt} = -\frac{K}{2\pi h} \qquad \text{oder:}$$

$$2\mathfrak{M} R^2 l = C - \frac{K}{2\pi h} t.$$

Da $\mathfrak{M}$ und R constant sind, kann sich nur l proportional der Zeit ändern. Wenn $\mathfrak{M}$ positiv ist, ist die Bewegung der Wassertheilchen auf der äusseren Seite des Ringes nach der Seite der positiven z, auf der inneren nach der negativen z gerichtet; K, h und R sind ihrer Natur nach immer positiv.

Daraus folgt also, dass bei einem kreisförmigen Wirbelfaden von sehr kleinem Querschnitt in einer unendlich ausgedehnten Wassermasse der Schwerpunkt des Querschnittes eine der Axe des Wirbelringes parallele Bewegung hat von annähernd constanter und sehr grosser Geschwindigkeit, die nach derselben Seite hin gerichtet ist, nach welcher das Wasser durch den Ring strömt. Unendlich dünne Wirbelfäden von endlichem Radius würden unendlich grosse Fortpflanzungsgeschwindigkeit erhalten. Ist aber der Radius des Wirbelringes unendlich gross von der Ordnung $1/\varepsilon$, so wird R^2 unendlich gross gegen K, und l wird constant. Der Wirbelfaden, welcher sich nun in eine gerade Linie verwandelt hat, wird stationär, wie wir für geradlinige Wirbelfäden schon früher gefunden haben.

Es lässt sich nun auch im allgemeinen übersehen, wie sich zwei ringförmige Wirbelfäden, deren Axe dieselbe ist, gegeneinander verhalten werden, da jeder, abgesehen von seiner eigenen Fortbewegung, auch der Bewegung der Wassertheilchen folgt, die der andere hervorbringt. Haben sie gleiche Rotationsrichtung, so schreiten sie beide in gleichem Sinne fort, und es wird der vorangehende sich erweitern, dann langsamer fortschreiten, der nachfolgende sich verengern und schneller fortschreiten, schliesslich bei nicht zu differenten Fortpflanzungsgeschwindigkeiten den anderen einholen, durch ihn hindurch- 55
gehen. Dann wird sich dasselbe Spiel mit dem anderen wiederholen, sodass die Ringe abwechselnd einer durch den anderen hindurchgehen.

Haben die Wirbelfäden gleiche Radien, gleiche und entgegengesetzte Rotationsgeschwindigkeiten, so werden sie sich einander nähern und sich gegenseitig erweitern, sodass schliesslich, wenn sie sich sehr nah gekommen sind, ihre Bewegung gegeneinander immer schwächer wird, die Erweiterung dagegen mit wachsender Geschwindigkeit geschieht. Sind die beiden Wirbelfäden ganz symmetrisch, so ist in der Mitte zwischen beiden die der Axe parallele Geschwindigkeit der Wassertheilchen gleich Null. Man kann sich hier also eine feste Wand angebracht denken, ohne die Bewegung zu stören, und erhält so den Fall eines Wirbelringes, der gegen eine feste Wand anläuft.

Ich bemerke noch, dass man diese Bewegungen der kreisförmigen Wirbelringe in der Natur leicht studiren kann, indem man eine halb eingetauchte Kreisscheibe, oder die ungefähr halbkreisförmig begrenzte Spitze eines Löffels schnell eine kurze Strecke längs der Oberfläche der Flüssigkeit hinführt, und dann schnell herauszieht. Es bleiben dann halbe Wirbelringe in der Flüssigkeit zurück, deren Axe in der freien Oberfläche liegt. Die freie Oberfläche bildet also eine durch die Axe gelegte Begrenzungsebene der Wassermasse, wodurch an den Bewegungen nichts wesentliches geändert wird. Die Wirbelringe schreiten fort, erweitern sich, wenn sie gegen eine Wand laufen, und werden durch andere Wirbelringe erweitert oder verengert, ganz wie wir es aus der Theorie abgeleitet haben.

VI.

Sur le mouvement le plus général d'un fluide.

Réponse à une communication précédente de ***M. S. Bertrand.***

Comtes rendus de l'Académie des sciences de Paris. T. 67. p. 221—225. (1868.)

Dans la séance du 22 juin, M. S. Bertrand a communiqué à l'Académie un théorème très-intéressant, concernant le mouvement infiniment petit le plus général, qu'un volume infiniment petit d'un fluide puisse prendre. Il finit sa Note en disant que le résultat auquel il est arrivé est en désaccord avec les vues sur lesquelles j'ai établi mes théorèmes, concernant le mouvement tournant des fluides; c'est pourquoi M. Bertrand révoque en doute aussi toutes les conséquences que j'ai fait sortir de ces prémisses.

Je ne puis m'expliquer les objections de l'illustre géomètre, qu'en supposant qu'il s'est trompé sur le sens de mes théorèmes, ayant lu peut-être une traduction défectueuse de mon Mémoire. Car, autant que je puis en juger moi-même, les résultats de M. Bertrand sont dans l'accord le plus parfait avec ceux de mon Mémoire, et il est facile de les faire dériver tous de l'expression que j'ai donnée pour représenter le mouvement le plus général d'un particule fluide.

On sait que, dans la mécanique analytique, il est permis de décomposer un mouvement compliqué, en plusieurs partiels plus simples. La règle d'après laquelle on le décompose est arbitraire, jusqu'à un certain point; on est libre de choisir la manière qui convient le mieux à la solution du problème, pourvu

qu'elle soit assez générale et parfaitement déterminée. La question soulevée par M. Bertrand, si j'ai bien compris le sens de sa critique, se rapporte à la généralité de la méthode que j'aie choisie dans mon Mémoire. Il croit avoir trouvé une espèce de mouvement possible, qui n'est pas compris dans les termes que j'ai employés.

J'ai représenté le mouvement d'un élément de volume du fluide comme la somme de cinq mouvements simples, c'est-à-dire:

1° D'un mouvement du centre de gravité;

2°, 3°, 4° De trois mouvements de dilatation (ou contraction), dirigés parallèlement à trois axes orthogonaux.

5° D'un mouvement rotatoire autour d'un axe de rotation temporaire.

La direction des trois axes de dilatation et de l'axe de rotation est déterminée, pour chaque point du fluide et pour chaque instant, par les valeurs des différentielles partielles des vitesses, prises par rapport aux coordonnées.

Nous pouvous laisser ici de côté la première espèce de mouvement, le mouvement du centre de gravité. La deuxième espèce de mouvement, que je nomme *mouvement à dilatations orthogonales*, prise isolément, fait en sorte qu'un parallélipipède rectangle et infiniment petit, dont les arêtes ont une certaine direction, se transforme en un autre parallélipipède dont les arêtes ont la même direction que celles du premier, mais une longueur différente.

Par la méthode de décomposition choisie par moi, j'ai aussi fixé, comme on voit, le sens dans lequel il faut prendre le terme *rotation* dans mon Mémoire.

Nommous u, v, w les composantes de la vitesse parallèles aux axes des coordonnées x, y, z. Alors le résultat de mon analyse préliminaire, qui semble être l'objet de la critique de M. Bertrand, est celui-ci.

Si l'expression $(u\,dx + v\,dy + w\,dz)$ est une différentielle exacte, il n'y a pas de rotation dans la partie du fluide correspondant. Si cette expression n'est pas une différentielle exacte, il y a rotation.

M. Bertrand, au contraire, a démontré que, dans un nombre très-considérable de cas, on peut construire des parallélipipèdes obliques ayant une direction déterminée pour leurs arêtes, qui se transforment en d'autres parallélipipèdes dont les arêtes restent parallèles à celles des premiers; et l'illustre géomètre suppose que j'ai omis ce cas dans mon analyse, parce que je n'ai parlé que des parallélipipèdes rectangles.

Mais on peut voir aisément que le mouvement défini par M. Bertrand peut être représenté aussi comme la combinaison d'une rotation avec trois dilatations rectangulaires. Il me suffira de donner ici un exemple des plus simples pour rendre clair le sens de cette assertion.

Limitons l'analyse au cas où l'une des composantes de la vitesse est égale à zéro, $w = 0$; alors le plan xy remplira la condition que M. Bertrand lui-même a posée en formant les équations qui sont contenues dans la seconde moitié de la page 1228 et à la page 1229 de sa Note. Nommons, comme lui, P le point (x, y, z) et Q le point $(x + dx, y + dy, z)$; enfin soit θ l'inclinaison de la droite PQ sur l'axe des x. Alors la rotation $d\theta / dt$ de cette droite sera, d'après les formules de M. Bertrand:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{dv}{dx}\cos^2\theta + \left(\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dx}\right)\sin\theta\cos\theta - \frac{du}{dy}\sin^2\theta.$$

Regardons maintenant les vitesses u et v comme composées de deux parties, en posant:

$$u = u_0 - py, \qquad v = v_0 + px.$$

Soient les quantités u_0 et v_0 des fonctions des coordonnées, et soit p une constante, dont la valeur est donnée par l'équation:

$$2p = \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy},$$

qui sera satisfaite au point P. On a alors, pour ce même point:

$$\frac{du_0}{dy} - \frac{dv_0}{dx} = 0.$$

Introduisons ces valeurs du u et v dans la première équation, nous trouverons:

$$2\frac{d\theta}{dt} = p + \left(\frac{dv_0}{dx} + \frac{du_0}{dy}\right)\cos(2\theta) + \left(\frac{dv_0}{dy} - \frac{du_0}{dx}\right)\sin(2\theta).$$

On voit ici que les membres qui contiennent le facteur p dans nos expressions représentent une rotation à vitesse constante p, qui restera seule quand u_0 et v_0 s'évanouissent. Introduisons maintenant, pour simplifier les expressions, deux nouvelles quantités A et θ_0, qui sont définies par les équations suivantes:

$$A \cos (2\,\theta_0) = \frac{d v_0}{d x} + \frac{d u_0}{d y},$$

$$A \sin (2\,\theta_0) = \frac{d v_0}{d y} - \frac{d u_0}{d x}.$$

Alors nous aurons:

$$2 \frac{d\theta}{d t} = p + A \cos 2 (\theta - \theta_0) \cdot$$

Il faut que $d\theta/dt$ soit égale à zéro pour les lignes qui ne changent pas de direction, c'est-à-dire:

$$\cos 2\,(\theta - \theta_0) = - \frac{p}{A}.$$

Si θ_1 est une des valeurs qui remplissent cette condition, une autre valeur sera $(2\,\theta_0 - \theta_1)$. La différence entre les deux est égale à $2\,(\theta_0 - \theta_1)$. Or cette différence ne peut être un angle droit que sous la condition $p = 0$.

On voit donc que le mouvement représenté par les quantités u_0 et v_0 est un mouvement à dilatations orthogonales, pendant que le mouvement dont les termes ont p comme facteur est une simple rotation. Ces deux mouvements combinés donnent un mouvement à dilatations obliques, comme il a été défini par M. Bertrand.

On pourra toujours trouver des valeurs réelles pour p, u_0, v_0, A et θ_0; mais on ne trouvera une valeur réelle pour θ, que sous la condition $p < A$. Si la vitesse de rotation devient trop grande, $p > A$, il n'y a plus de lignes dans le plan xy, qui ne changent pas de direction. C'est le cas où l'équation caractéristique de M. Bertrand donne deux racines imaginaires.

Il n'est pas difficile d'ailleurs d'étendre cette démonstration au cas général d'un mouvement à trois dimensions.

On voit par là que le mouvement à dilatations obliques de M. Bertrand est compris dans mon Mémoire parmi les mouvements rotatoires. J'avoue qu'au premier aspect l'emploi

du terme *rotation* pourrait paraître hardi dans ce cas, mais je crois qu'il est amplement justifié dans le langage scientifique; car, quand on détermine le moment de rotation d'une petite sphère fluide, contenue dans une masse d'eau en mouvement, on trouve que le moment d'une telle sphère est égal à zéro dans un mouvement à dilatations rectangulaires, mais qu'il est différent de zéro dans un mouvement à dilatations obliques. On trouve ainsi, pour mesurer la rotation du fluide, exactement les expressions que j'ai employées dans mon Mémoire.

Du reste, mon savant critique, en regardant les valeurs que j'ai données à la page 31 de mon Mémoire comme l'expression la plus générale des vitesses u, v, w, décomposées d'après la règle que j'avais fixée, reconnaîtra aisément que ces valeurs contiennent le même nombre de quantités indépendantes que celles qu'il a employées lui-même dans son analyse, et que ces deux systèmes ont le même degré de généralité. Je n'ai pas donné, dans mon Mémoire, de démonstration explicite de la généralité de cette décomposition du mouvement que j'ai employée, parce que cette méthode n'était pas nouvelle; elle avait déjà été employée auparavant dans la théorie des solides élastiques, entre autres par M. Kirchhoff[1]), dans son Mémoire sur les plaques élastiques vibrantes.

---

1) Journal de Crelle, t. XL; 1850.

VII.

Sur le mouvement des fluides.

Deuxième réponse à ***M. S. Bertrand.***

Comtes rendus de l'Académie des sciences de Paris. T. 67. p. 754—757. (1868.)

Je n'ai eu connaissance des deux nouvelles Notes, par lesquelles M. Bertrand à répondu à ma communication du 27 juillet, qu'à mon retour d'un voyage, il y a peu de jours. Je m'empresse de lui faire les observations suivantes.

Quant à la première de ses réponses, je crois pouvoir me dispenser d'entrer dans de plus amples détails, car il est évident que M. Bertrand l'a rédigée, sans avoir sous les yeux ma réplique. C'est comme cela du moins que je m'explique comment M. Bertrand substitue au terme de *dilatation* partout où j'en avais fait usage, celui de *translation*, qui ne se trouve pas une seule fois dans ma communication. Il a rendu parfaitement absurdes des théorèmes, d'ailleurs évidents, pour les présenter ensuite, ainsi défigurés, comme étant de ma façon.

Dans sa deuxième réponse du 24 août, M. Bertrand tombe enfin d'accord qu'il ne s'agit ici que d'une dénomination différente. Mais il s'attache à soutenir que j'ai donné à l'énoncé de mes théorèmes une élégance apparente, en altérant arbitrairement le sens du mot *rotation*. Est-il réellement nécessaire de répéter que le mouvement rotatoire (Rotations-Bewegung), attribué par moi aux molécules liquides, n'a jamais été défini dans mes Mémoires autrement que comme une rotation ordinaire, combinée avec d'autres formes de mouve-

ment [dilatation et translation]?[1]) Aussi cette composante du mouvement que j'ai appelée *rotation* se réduit-elle, prise isolément, à une rotation pure et simple, dans le sens généralement accepté de ce mot.

Du reste, cet emploi du terme de rotation n'est pas une innovation de ma part. Cinq ans avant la publication de mon Mémoire, M. Stokes[2]) a dit, en parlant des quantités qui, dans la théorie des solides élastiques, correspondent aux quantités ξ, η, ζ de mon Mémoire: „Ces quantités expriment „les rotations de l'élément du moyen .... autour des axes „qui sont respectivement parallèles aux trois axes des coordonnées."

M. Bertrand dit que j'attache une importance qu'il ne peut comprendre à l'orthogonalité des faces du parallélipipède de dilatation. Je réponds que, mécaniquement parlant, cette orthogonalité est d'une importance de premier ordre; car dans le cas d'un mouvement à dilatations orthogonales, le moment des quantités de mouvement d'une petite masse sphérique par rapport aux axes passant par son centre est égal et reste égal à zéro, tandis que, dans le cas de dilatations obliques, il est différent et reste différent de zéro pendant toute la durée du mouvement. C'est bien pour cette raison que, dans les savantes recherches sur la théorie des corps élastiques de M. Kirchhoff[3]), et de MM. Thomson et Tait[4]), les dilatations orthogonales jouent un rôle également prépondérant, encore que ces deux derniers savants aient très-bien connu et publié, avant M. Bertrand, les théorèmes qu'il a communiqués dans la séance du 22 juin, et qui lui ont servi de point de départ pour les attaques qu'il a dirigées contre mon Mémoire.

---

1) L'exemple sur lequel M. Bertrand s'appuie dans sa réponse du 3 août, et qu'il trouve si décisif, à déjà été soumis à l'analyse par la rédaction du journal *les Mondes*, t. XVII, p. 621; je puis donc me dispenser de revenir là-dessus.

2) On the dynamical theory of diffraction (Transactions of the Cambridge Philos. Soc., 1850; vol. IX, p. I. § 10).

3) Sur l'équilibre et le mouvement d'une plaque élastique (Journal de Crelle, t. XL, p. 59; 1850).

4) Treatise on natural Philosophy. Oxford, 1867; vol. I, p. 108—115.

Enfin, si en France ou préfère adopter le terme de *rotation moyenne*, proposé par A. Cauchy pour avertir le lecteur qu'il ne s'agit pas du mouvement d'un corps solide, mais de celui d'une masse à forme variable, je n'ai aucune raison pour m'y opposer.

Examinons maintenant la seconde objection que M. Bertrand m'a faite, dans sa communication du 24 août, objection qui concerne un passage de mon Mémoire, textuellement cité par lui. Il n'est pas difficile de se convaincre que la place occupée par le passage en question dans la suite de mes raisonnements lui donne un sens très-différent de celui que mon savant adversaire croit y avoir trouvé. Je n'y donne pas une règle pour déterminer les intégrales des équations différentielles; mais après avoir, dans ce qui précède, effectué les intégrations, ou du moins les avoir supposées effectuées, j'interprète dans le passage cité le sens mécanique des expressions analytiques obtenues par ces intégrations.

Dans ces expressions, les vitesses des molécules du liquide sont représentées comme la somme d'un nombre infini d'effets élémentaires, dérivant en partie des points situés à l'intérieur du liquide, en partie des points de la surface ou de l'extérieur. Dans le passage cité par M. Bertrand, il n'est question que des effets dérivant directement des points situés à l'intérieur du liquide, et jamais je n'ai songé à y faire entrer autre chose. Si M. Bertrand veut porter son attention sur la solution du problème que j'ai donnée, dans quelques cas spéciaux, aux pages 49 et 55 de mon Mémoire, il comprendra que ce n'est pas moi qu'il faut accuser d'avoir mis au jour l'absurdité, qu'il a bien voulu me suggérer, savoir: de supposer la quantité k, qui détermine l'effet des points situés en dehors du liquide, indépendante des quantités ξ, η, ζ.

M. Bertrand résume sa deuxième objection, en avançant que mon théorème „n'apprent absolument rien, en ne donnant „qu'une partie d'une somme, dont l'autre partie reste inconnue.“ Dans un grand nombre de cas spéciaux cette autre partie reste en effet inconnue jusqu'à un certain point. Du moins, il n'est guère probable qu'ou puisse jamais trouver pour cette seconde

partie explicitement une expression analytique générale qui convienne à tous les cas speciaux.

Mais j'invite mon savant critique à se rappeler que cette deuxième partie de la somme, qu'il dit être inconnue, est censée correspondre à un mouvement non rotatoire du liquide, et que par conséquent, elle possède toutes ces propriétés si remarquables des fonctions qui satisfont à l'équation différentielle:

$$\frac{d^2P}{dx^2} + \frac{d^2P}{dy^2} + \frac{d^2P}{dz^2} = 0,$$

et qui ont été l'objet de tant de recherches profondes, recherches qui non seulement nous mettent en état de trouver l'intégrale de cette équation pour un nombre très-considérable de conditions données aux limites, mais, ce qui est plus utile encore, nous permettent, dans la plupart des cas où l'expression analytique de l'intégrale reste inconnue, d'en assigner les propriétés les plus importantes, dont la connaissance peut souvent tenir lieu de l'intégrale elle-même.

M. Bertrand aurait pu trouver, aux pages 29 et 43 de mon Mémoire, un résumé de cette partie de mon travail. Je finirai en reproduisant les résultats généraux de mes recherches, tout en évitant d'employer les dénominations nouvelles que j'ai introduites dans le texte allemand de mon Mémoire. Je ne conserverai que les lettres ξ, η, ζ avec leur signification:

$$\xi = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right), \quad \eta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}\right), \quad \zeta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right).$$

Je suppose en outre, que les forces agissant sur les points situés à l'intérieur du liquide puissent être exprimées par les dérivées partielles d'une fonction des coordonnées du point sollicité. Cela posé, on a les théorèmes suivants:

On peut toujours imaginer l'existence d'un système de courants galvaniques fermés, distribués dans l'intérieur et à la surface du liquide de telle manière, qu'ils exerceraient sur le pôle d'un aimant, situé en un point du liquide, des forces égales aux vitesses qui animent la molècule liquide passant par ce point. Les composantes de ces courants, prises parallèlement aux axes des coordonnées, sont, en chaque point de l'intérieur du liquide, proportionnelles aux quantités ξ, η, ζ.

Si l'on se représente la masse du liquide composée de fils conducteurs qui contiennent chacun un de ces courants galvaniques du système susdit, dans chaque fil conducteur l'intensité du courant restera constante pendant toute la durée du mouvement, et le fil restera composé des mêmes molécules du liquide. L'intensité des courants superficiels, au contraire, pourra être variable.

M. Bertrand reconnaîtra aisément que ces résultats ne sont nullement infirmés par ses remarques, et peut-être ne les trouvera-t-il pas moins intéressants dans leur énoncé légitime que sous la forme peu exacte qu'il leur a donnée.

VIII.

Réponse à la Note de M. S. Bertrand du 19 octobre.

Comtes rendus de l'Acad. de sciences de Paris. T. 67. p. 1034—1035. (1868.)

„Dans sa dernière Note, M. Bertrand ne conteste plus l'exactitude de mes théorèmes sur l'hydrodynamique, mais il se borne à en blâmer l'énoncé, qui, selon lui, ne serait pas conforme à l'usage, où conduirait le lecteur à croire la solution plus complète qu'elle ne l'est. Puisque nous sommes parvenus à ce point, il me semble qu'une discussion ultérieure sur l'objet en litige ne saurait présenter qu'un intérêt personel, de sorte que, de mon côté, je la terminerai par cette dernière réponse.

„Du reste, je n'ai jamais voulu exprimer le moindre doute touchant la sincérité de mon savant adversaire, ni dans mes Notes insérées aux *Comptes rendus*, ni dans la Lettre que j'ai écrite à M. le rédacteur du journal *les Mondes*, en réponse à une question concernant la traduction de mon Mémoire. Dans le seul passage de ma dernière Note qui puisse avoir donné lieu à une telle interprétation, j'ai dit expressément que je ne supposais qu'une erreur de la part de M. Bertrand, et je regrette sincèrement que les expressions que j'ai employées aient pu donner lieu à une interprétation différente.

IX.

Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen.

Aus dem „Monatsberichte der Königl. Akademie der Wissenschaften“ zu Berlin vom 23. April 1868. S. 215—228.

215 Die hydrodynamischen Gleichungen ergeben bekanntlich für das Innere einer incompressiblen Flüssigkeit, die der Reibung nicht unterworfen ist, und deren Theilchen keine Rotations-Bewegung besitzen, genau dieselbe partielle Differentialgleichung, welche für stationäre Ströme von Elektricität oder Wärme in Leitern von gleichmässigem Leitungsvermögen besteht. Man
216 könnte also erwarten, dass bei gleicher Form des durchströmten Raumes und gleichen Grenzbedingungen die Strömungsform der tropfbaren Flüssigkeiten, der Elektricität und Wärme bis auf kleine von Nebenbedingungen abhängige Unterschiede die gleiche sein sollte. In Wirklichkeit aber bestehen in vielen Fällen leicht erkennbare und sehr eingreifende Unterschiede zwischen der Stromvertheilung einer tropfbaren Flüssigkeit und der der genannten Imponderabilien.

Solche Unterschiede zeigen sich namentlich auffallend, wenn die Strömung durch eine Oeffnung mit scharfen Rändern in einen weiteren Raum eintritt. In solchen Fällen strahlen die Stromlinien der Elektricität von der Oeffnung aus sogleich nach allen Richtungen auseinander, während eine strömende Flüssigkeit, Wasser sowohl wie Luft, sich von der Oeffnung aus anfänglich in einem compacten Strahle vorwärts bewegt, der sich dann in geringerer oder grösserer Entfernung in Wirbel aufzulösen pflegt. Die der Oeffnung benachbarten, ausserhalb des Strahles liegenden Theile der Flüssigkeit des grösseren

Behälters können dagegen fast vollständig in Ruhe bleiben. Jedermann kennt diese Art der Bewegung, wie sie namentlich ein mit Rauch imprägnirter Luftstrom sehr anschaulich zeigt. In der That kommt die Zusammendrückbarkeit der Luft bei diesen Vorgängen nicht wesentlich in Betracht, und Luft zeigt hierbei mit geringen Abweichungen dieselben Bewegungsformen, wie Wasser.

Bei so grossen Abweichungen zwischen der Wirklichkeit und den Ergebnissen der bisherigen theoretischen Analyse mussten die hydrodynamischen Gleichungen den Physikern als eine praktisch sehr unvollkommene Annäherung an die Wirklichkeit erscheinen. Die Ursache davon mochte man in der inneren Reibung der Flüssigkeit vermuthen, obgleich allerlei seltsame und sprungweise eintretende Unregelmässigkeiten, mit denen wohl Jeder zu kämpfen hatte, der Beobachtungen über Flüssigkeits-Bewegungen anstellte, nicht einmal durch die jedenfalls stetig und gleichmässig wirkende Reibung erklärt werden konnten.

Die Untersuchung der Fälle, wo periodische Bewegungen durch einen continuirlichen Luftstrom erregt werden, wie zum
Beispiel in den Orgelpfeifen, liess mich erkennen, dass eine 217
solche Wirkung nur durch eine discontinuirliche, oder wenigstens einer solchen nahe kommende Art der Luftbewegung hervorgebracht werden könne, und das führte mich zur Auffindung einer Bedingung, die bei der Integration der hydrodynamischen Gleichungen berücksichtigt werden muss, und bisher, so viel ich weiss, übersehen worden ist; bei deren Berücksichtigung dagegen in solchen Fällen, wo die Rechnung durchgeführt werden kann, sich in der That Bewegungsformen ergeben, wie wir sie in Wirklichkeit beobachten. Es ist dies folgender Umstand.

In den hydrodynamischen Gleichungen werden die Geschwindigkeiten und der Druck der strömenden Theilchen als continuirliche Functionen der Coordinaten behandelt. Andererseits liegt in der Natur einer tropfbaren Flüssigkeit, wenn wir sie als vollkommen flüssig, also der Reibung nicht unterworfen betrachten, kein Grund, dass nicht zwei dicht aneinander grenzende Flüssigkeitsschichten mit endlicher Geschwindigkeit

aneinander vorbeigleiten könnten. Wenigstens diejenigen Eigenschaften der Flüssigkeiten, welche in den hydrodynamischen Gleichungen berücksichtigt werden, nämlich die Constanz der Masse in jedem Raumelement und die Gleichheit des Druckes nach allen Richtungen hin, bilden offenbar kein Hinderniss dafür, dass nicht auf beiden Seiten einer durch das Innere gelegten Fläche tangentielle Geschwindigkeiten von endlichem Grössenunterschiede stattfinden könnten. Die senkrecht zur Fläche gerichteten Componenten der Geschwindigkeit und der Druck müssen dagegen natürlich an beiden Seiten einer solchen Fläche gleich sein. Ich habe schon in meiner Arbeit über die Wirbelbewegungen[1]) darauf aufmerksam gemacht, dass ein solcher Fall eintreten müsse, wenn zwei vorher getrennte und verschieden bewegte Wassermassen mit ihren Oberflächen in Berührung kommen. In jener Arbeit wurde ich auf den Begriff einer solchen *Trennungsfläche* oder *Wirbelfläche*, wie ich sie dort nannte, dadurch geführt, dass ich Wirbelfäden
218 längs einer Fläche continuirlich angeordnet dachte, deren Masse verschwindend klein werden kann, ohne dass ihr Drehungsmoment verschwindet.

Nun wird in einer zu Anfang ruhenden oder continuirlich bewegten Flüssigkeit eine endliche Verschiedenheit der Bewegung unmittelbar benachbarter Flüssigkeitstheilchen nur durch discontinuirlich wirkende bewegende Kräfte hervorgebracht werden können. Unter den äusseren Kräften kommt hierbei nur der Stoss in Betracht.

Aber es ist auch im Innern der Flüssigkeiten eine Ursache vorhanden, welche Discontinuität der Bewegung erzeugen kann. Der Druck nämlich kann zwar jeden beliebigen positiven Werth annehmen, und die Dichtigkeit der Flüssigkeit wird sich mit ihm immer continuirlich ändern. Aber so wie der Druck den Werth Null überschreiten und negativ werden sollte, wird eine discontinuirliche Veränderung der Dichtigkeit eintreten; die Flüssigkeit wird auseinander reissen.

Nun hängt die Grösse des Druckes in einer bewegten Flüssigkeit von der Geschwindigkeit ab, und zwar ist in in-

---

1) Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. LX. (S. oben Nr. V.)

compressibeln Flüssigkeiten die Verminderung des Druckes unter übrigens gleichen Umständen der lebendigen Kraft der bewegten Wassertheilchen direct proportional. Uebersteigt also die letztere eine gewisse Grösse, so muss in der That der Druck negativ werden und die Flüssigkeit zerreissen. An einer solchen Stelle wird die beschleunigende Kraft, welche dem Differential-Quotienten des Druckes proportional ist, offenbar discontinuirlich und dadurch die Bedingung erfüllt, welche nöthig ist um eine discontinuirliche Bewegung der Flüssigkeit hervorzubringen. Die Bewegung der Flüssigkeit an einer solchen Stelle vorüber kann nun nur so geschehen, dass sich von dort ab eine Trennungsfläche bildet.

Die Geschwindigkeit, welche das Zerreissen der Flüssigkeit herbeiführen muss, ist diejenige, welche die Flüssigkeit annehmen würde, wenn sie unter dem Drucke, den die Flüssigkeit am gleichen Orte im ruhenden Zustande haben würde, in den leeren Raum ausflösse. Dies ist allerdings eine verhältnissmässig bedeutende Geschwindigkeit; aber es ist wohl zu bemerken, dass, wenn die tropfbaren Flüssigkeiten continuirlich
wie Elektricität fliessen sollten, die Geschwindigkeit an jeder 219
scharfen Kante, um welche der Strom herumbiegt, unendlich gross werden müsste.[1]) Daraus folgt, dass *jede geometrisch vollkommen scharf gebildete Kante, an welcher Flüssigkeit vorbeifliesst, selbst bei der mässigsten Geschwindigkeit der übrigen Flüssigkeit, dieselbe zerreissen und eine Trennungsfläche herstellen muss.* An unvollkommen ausgebildeten, abgerundeten Kanten dagegen wird dasselbe erst bei gewissen grösseren Geschwindigkeiten stattfinden. Spitzige Hervorragungen an der Wand des Strömungscanales werden ähnlich wirken müssen.

Was die Gase betrifft, so tritt bei ihnen derselbe Umstand wie bei den Flüssigkeiten ein, nur dass die lebendige Kraft der Bewegung eines Theilchens nicht direct der Verminderung des Druckes p, sondern mit Berücksichtigung der Abkühlung der

---

1) In der sehr kleinen Entfernung ϱ von einer scharfen Kante, deren Flächen unter dem Winkel α zusammenstossen, werden die Geschwindigkeiten unendlich wie ϱ^{-m}, wo $m = (\pi - \alpha)/(2\pi - \alpha)$.

Luft bei ihrer Ausdehnung der Abnahme von p^m proportional ist, wo $m = 1 - 1/\gamma$, und γ das Verhältniss der specifischen Wärme bei constantem Druck zu der bei constantem Volumen bezeichnet. Für atmosphärische Luft hat der Exponent m den Werth 0,291. Da er positiv und reel ist, so kann p^m, wie p, bei hohen Werthen der Geschwindigkeit nur bis Null abnehmen, und nicht negativ werden. Anders wäre es, wenn die Gasarten einfach dem Mariotte'schen Gesetze folgten und keine Temperaturveränderungen erlitten. Dann würde statt p^m die Grösse $\log p$ eintreten, welche negativ unendlich werden kann, ohne dass p negativ wird. Unter dieser Bedingung wäre ein Zerreissen der Luftmasse nicht nöthig.

Es gelingt sich von dem thatsächlichen Bestehen solcher Discontinuitäten zu überzeugen, wenn man einen Strahl mit Rauch imprägnirter Luft aus einer runden Oeffnung oder einem cylindrischen Rohre mit mässiger Geschwindigkeit, so dass kein Zischen entsteht, hervortreten lässt. Unter günstigen Umständen
220 kann man dünne Strahlen der Art von einer Linie Durchmesser in einer Länge von mehreren Fussen erhalten. Innerhalb der cylindrischen Oberfläche ist die Luft dann in Bewegung mit constanter Geschwindigkeit, ausserhalb dagegen selbst in allernächster Nähe des Strahles gar nicht oder kaum bewegt. Sehr deutlich sieht man diese scharfe Trennung auch, wenn man einen ruhig fliessenden cylindrischen Luftstrahl durch die Spitze einer Flamme leitet, aus der er dann ein genau abgegrenztes Stück herausschneidet, während der Rest der Flamme ganz ungestört bleibt, und höchstens eine sehr dünne Lamelle, die den durch Reibung beeinflussten Grenzschichten entspricht, ein wenig mitgenommen wird.

Was die mathematische Theorie dieser Bewegungen betrifft, so habe ich die Grenzbedingungen für eine innere Trennungsfläche der Flüssigkeit schon angegeben. Sie bestehen darin, dass der Druck auf beiden Seiten der Fläche gleich sein muss, und ebenso die normal gegen die Trennungsfläche gerichtete Componente der Geschwindigkeit. Da nun die Bewegung im ganzen Innern einer incompressiblen Flüssigkeit, deren Theilchen keine Rotationsbewegung haben, vollständig bestimmt ist, wenn die Bewegung ihrer ganzen Oberfläche und ihre in-

neren Discontinuitäten gegeben sind, so handelt es sich bei äusserer fester Begrenzung der Flüssigkeit der Regel nach nur darum, die Bewegung der Trennungsfläche und die Veränderungen der Discontinuität an derselben kennen zu lernen.

Es kann nun eine solche Trennungsfläche mathematisch gerade so behandelt werden, als wäre sie eine Wirbelfläche, das heisst, als wäre sie mit Wirbelfäden von unendlich geringer Masse, aber endlichem Drehungsmoment continuirlich belegt. In jedem Flächenelement einer solchen wird es eine Richtung geben, nach welcher genommen die Componenten der tangentiellen Geschwindigkeiten gleich sind. Diese giebt zugleich die Richtung der Wirbelfäden an der entsprechenden Stelle. Das Moment dieser Fäden ist proportional zu setzen dem Unterschiede, welchen die dazu senkrechten Componenten der tangentiellen Geschwindigkeit an beiden Seiten der Fläche zeigen.

Die Existenz solcher Wirbelfäden ist für eine ideale nicht reibende Flüssigkeit eine mathematische Fiction, welche die Integration erleichtert. In einer wirklichen der Reibung unter- 221
worfenen Flüssigkeit wird jene Fiction schnell eine Wirklichkeit, indem durch die Reibung die Grenztheilchen in Rotation versetzt werden, und somit dort Wirbelfäden von endlicher, allmählig wachsender Masse entstehen, während die Discontinuität der Bewegung dadurch gleichzeitig ausgeglichen wird.

Die Bewegung einer Wirbelfläche und der in ihr liegenden Wirbelfäden ist nach den in meiner Arbeit über die Wirbelbewegungen festgestellten Regeln zu bestimmen. Die mathematischen Schwierigkeiten dieser Aufgabe lassen sich freilich erst in wenigen der einfacheren Fälle überwinden. In vielen andern Fällen kann man dagegen aus der angegebenen Betrachtungsweise Schlüsse wenigstens auf die Richtung der eintretenden Veränderungen ziehen.

Namentlich ist zu erwähnen, dass gemäss dem für Wirbelbewegungen erwiesenen Gesetze, die Fäden und mit ihnen die Wirbelfläche im Innern einer nicht reibenden Flüssigkeit nicht entstehen und nicht verschwinden können, vielmehr jeder Wirbelfaden constant das gleiche Rotationsmoment behalten muss; ferner, dass die Wirbelfäden längs einer Wirbelfläche selbst fortschwimmen mit einer Geschwindigkeit, welche das Mittel

aus den an beiden Seiten der Fläche bestehenden Geschwindigkeiten ist. Daraus folgt, dass eine Trennungfläche sich immer nur nach der Richtung hin verlängern kann, nach welcher der stärkere von den beiden in ihr sich berührenden Strömen gerichtet ist.

Ich habe zunächst gesucht, Beispiele von unverändert bestehenden Trennungsflächen in stationären Strömungen zu finden, bei denen die Integration ausführbar ist, um daran zu prüfen, ob die Theorie Stromesformen ergiebt, die der Erfahrung besser entsprechen, als wenn man die Discontinuität der Bewegung unberücksichtigt lässt. Wenn eine Trennungsfläche, die ruhendes und bewegtes Wasser voneinander scheidet, stationär bleiben soll, so muss längs derselben der Druck in der bewegten Schicht derselben sein, wie in der ruhenden, woraus folgt, dass die tangentielle Geschwindigkeit der Wassertheilchen in ganzer Ausdehnung der Fläche constant sein muss; ebenso die Dichtigkeit der fingirten Wirbelfäden. Anfang und
222 Ende einer solchen Fläche können nur an der Wand des Gefässes oder in der Unendlichkeit liegen. Wo ersteres der Fall ist, müssen sie die Wand des Gefässes tangiren, vorausgesetzt, dass diese hier stetig gekrümmt ist, weil die zur Gefässwand normale Geschwindigkeitscomponente gleich Null sein muss.

Die stationären Formen der Trennungsflächen zeichnen sich übrigens, wie Versuch und Theorie übereinstimmend erkennen lassen, durch einen auffallend hohen Grad von Veränderlichkeit bei den unbedeutendsten Störungen aus, so dass sie sich Körpern, die in labilem Gleichgewicht befindlich sind, einigermassen ähnlich verhalten. Die erstaunliche Empfindlichkeit eines mit Rauch imprägnirten cylindrischen Luftstrahls gegen Schall ist, von Hrn. Tyndall schon beschrieben worden; ich habe dieselbe bestätigt gefunden. Es ist dies offenbar eine Eigenschaft der Trennungsflächen die für das Anblasen der Pfeifen von grösster Wichtigkeit ist.

Die Theorie lässt erkennen, dass überall, wo eine Unregelmässigkeit an der Oberfläche eines übrigens stationären Strahls gebildet wird, diese zu einer fortschreitenden spiraligen Aufrollung des betreffenden (übrigens am Strahle fortgleitenden) Theils der Fläche führen muss. Dies Streben nach spiraliger

Aufrollung bei jeder Störung ist übrigens an den beobachteten Strahlen leicht zu bemerken. Der Theorie nach könnte ein prismatischer oder cylindrischer Strahl unendlich lang sein. Thatsächlich lässt sich ein solcher nicht herstellen, weil in einem so leicht beweglichen Elemente, wie die Luft ist, kleine Störungen nie ganz zu beseitigen sind.

Dass ein solcher unendlich langer cylindrischer Strahl, der aus einer Röhre von entsprechendem Querschnitt in ruhende äussere Flüssigkeit austritt, und überall mit gleichmässiger Geschwindigkeit seiner Axe parallel bewegte Flüssigkeit enthält, den Bedingungen des stationären Zustandes entspricht, ist leicht einzusehen.

Ich will hier nur noch die mathematische Behandlung eines Falles entgegengesetzter Art, wo der Strom aus einem weitem Raum in einen engen Canal übergeht, skizziren, um daran auch gleichzeitig ein Beispiel zu geben für eine Methode, durch welche einige Probleme der Lehre von den Potential- 223
functionen gelösst werden können, die bisher Schwierigkeiten machten.

Ich beschränke mich auf den Fall, wo die Bewegung stationär ist und nur von zwei rechtwinkligen Coordinaten x, y abhängig, wo ferner von Anfang an in der reibungsfreien Flüssigkeit keine rotirenden Theilchen vorhanden sind, und sich also auch keine solchen bilden können. Bezeichnen wir für das im Punkte (x, y) befindliche Flüssigkeitstheilchen die den x parallele Geschwindigkeitscomponente mit u, die den y parallele mit v, so lassen sich bekanntlich zwei Functionen von x und y in der Weise finden, dass:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\psi}{dy} \ldots\ldots \\ v &= \frac{d\varphi}{dy} = -\frac{d\psi}{dx} \ldots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Durch diese Gleichungen wird auch unmittelbar im Innern der Flüssigkeit die Bedingung erfüllt, dass die Masse in jedem Raumelement constant bleibe, nämlich:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} = \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} = 0 \ldots\ldots \Big\} \quad (1\text{a})$$

Der Druck im Innern wird bei der constanten Dichtigkeit h,

und wenn das Potential der äusseren Kräfte mit V bezeichnet wird, gegeben durch die Gleichung:

$$V - \frac{p}{h} + C = \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2\right] = \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2\right] \cdots \Big\} \quad (1b)$$

Die Curven:

$$\psi = \text{Const.}$$

sind die Strömungslinien der Flüssigkeit, und die Curven:

$$\varphi = \text{Const.}$$

sind orthogonal zu ihnen. Letztere sind die Curven gleichen Potentials, wenn Elektricität, oder gleicher Temperatur, wenn
224 Wärme in Leitern von constantem Leitungsvermögen in stationärem Strome fliesst.

Aus den Gleichungen (1) folgt als Integralgleichung, dass die Grösse $\varphi + \psi i$ eine Function sei von $x + y\,i$ (wo $i = \sqrt{-1}$). Die bisher gefundenen Lösungen drücken in der Regel φ und ψ als eine Summe von Gliedern aus, die selbst Functionen von x und y sind. Aber auch umgekehrt kann man $x + y\,i$ als Function von $\varphi + \psi\,i$ betrachten und entwickeln. Bei den Aufgaben über Strömung zwischen zwei festen Wänden ist ψ längs der Grenzen constant, und stellt man also φ und ψ als rechtwinklige Coordinaten in einer Ebene dar, so hat man in einem von zwei parallelen graden Linien $\psi = c_0$ und $\psi = c_1$ begrenzten Streifen dieser Ebene die Function $x + y\,i$ so zu suchen, dass sie am Rande der Gleichung der Wand entspricht, im Innern gegebene Unstetigkeit annimmt.

Ein Fall dieser Art ist, wenn wir setzen:

$$x + y\,i = A\left\{\varphi + \psi\,i + e^{\varphi + \psi i}\right\} \ldots\ldots \quad (2)$$

oder:

$$x = A\,\varphi + A\,e^{\varphi}\cos\psi$$
$$y = A\,\psi + A\,e^{\varphi}\sin\psi.$$

Für den Werth $\psi = \pm\,\pi$ wird y constant und

$$x = A\,\varphi - A\,e^{\varphi}.$$

Wenn φ von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft, geht x gleichzeitig von $-\infty$ bis $-A$ und dann wieder zurück zu $-\infty$. Die Stromcurven $\psi = \pm\,\pi$ entsprechen also der Strömung längs zweier gerader Wände für die $y = \pm\,A\,\pi$ und x zwischen $-\infty$ und $-A$ läuft.

Die Gleichung (2) entspricht also, wenn wir ψ als Ausdruck der Stromescurven betrachten, der Strömung aus einem durch zwei parallele Ebenen begrenzten Canal in den unendlichen Raum hinein. Am Rande des Canals aber, wo $x = -A$ und $y = \pm A\pi$ wo ferner:

$$\varphi = o \text{ und } \psi = \pm \pi$$

ist, wird:

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = 0,$$ 225

also:

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 = \infty$$

Elektricität und Wärme können so strömen; tropfbare Flüssigkeit muss aber zerreissen.

Sollen vom Rande des Canales stationäre Trennungslinien ausgehen, welche natürlich Fortsetzungen der längs der Wand verlaufenden Strömungslinien $\psi = \pm \pi$ werden, und soll ausserhalb dieser Trennungslinien, die die strömende Flüssigkeit begrenzen, Ruhe stattfinden, so muss der Druck auf beiden Seiten der Trennungslinien gleich sein. Das heisst, es muss längs derjenigen Theile der Linien $\psi = \pm \pi$, welche den freien Trennungslinien entsprechen, gemäss 1*b* sein:

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 = \text{Const.} \ldots\ldots \tag{3}$$

Um nun die Grundzüge der in Gleichung (2) gegebenen Bewegung beizubehalten, setzen wir zu obigem Ausdrucke von $x + yi$ noch ein Glied $\sigma + \tau i$ hinzu, welches ebenfalls eine Function von $\varphi + \psi i$ ist.

Wir haben dann:

$$\left.\begin{aligned} x &= A\varphi + Ae^{\varphi} \cos\psi + \sigma \ldots\ldots \\ y &= A\psi + Ae^{\varphi} \sin\psi + \tau \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

und müssen $\sigma + \tau i$ so bestimmen, dass längs des freien Theiles der Trennungsflächen wo $\psi = \pm \pi$, werde:

$$\left(A - Ae^{\varphi} + \frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{d\tau}{d\varphi}\right)^2 = \text{Const.}$$

Diese Bedingung wird erfüllt, wenn wir eben daselbst machen, dass:

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = 0 \text{ oder } \sigma = \text{Const.} \ldots\ldots \tag{3b}$$

226 und:

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = \pm A\sqrt{2e^{\varphi} - e^{2\varphi}} \ldots\ldots \tag{3c}$$

Da ψ längs der Wand constant ist, können wir die letzte Gleichung nach φ integriren, und das Integral in eine Function von $\varphi + \psi i$ verwandeln, indem wir statt φ überall setzen $\varphi + i(\psi + \pi)$. So erhalten wir bei passender Bestimmung der Integrationsconstante:

$$\begin{aligned}\sigma + \tau i = Ai\Big\{&\sqrt{-2e^{\varphi+\psi i} - e^{2\varphi+2\psi i}} \\ &+ 2\,\text{arc. sin}\left[\frac{i}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}(\varphi+\psi i)}\right]\Big\} \ldots\end{aligned} \tag{3d}$$

Die Verzweigungspunkte dieses Ausdruckes liegen, wo $e^{\varphi+\psi i} = -2$, das heisst, wo $\psi = \pm(2\mathfrak{a}+1)\pi$ und $\varphi = \log 2$ ist. Also liegt keiner im Innern des Intervalles von $\psi = +\pi$ bis $\psi = -\pi$. Die Function $\sigma + \tau i$ ist hier continuirlich.

Längs der Wand wird:

$$\sigma + \tau i = \pm Ai\left\{\sqrt{2e^{\varphi} - e^{2\varphi}} - 2\,\text{arc. sin}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2}\varphi}\right]\right\}.$$

Wenn $\varphi < \log 2$, so ist dieser ganze Werth rein imaginär, also $\sigma = o$, während $d\tau/d\varphi$ den oben in 3^c vorgeschriebenen Werth erhält. Dieser Theil der Linien $\psi = \pm\pi$ entspricht also dem freien Theile des Strahles.

Wenn $\varphi > \log 2$ wird der ganze Ausdruck bis auf den Summanden $\pm Ai\pi$ reell, welcher letztere sich zum Werthe von τi, beziehlich yi hinzufügt.

Die Gleichungen 3^a und 3^d entsprechen also der Ausströmung aus einem unbegrenzten Becken in einen durch zwei Ebenen begrenzten Canal, dessen Breite $4A\pi$ ist, dessen Wände von $x = -\infty$ bis $x = -A(2 - \log 2)$ reichen. Die freie Trennungslinie der strömenden Flüssigkeit krümmt sich von der Kante der Oeffnung zunächst noch ein wenig gegen die Seite
227 der positiven x hin, wo sie für $y = o$, $x = -A$ und für $y = \pm A.(\frac{3}{2}\pi + 1)$ ihre grössten x-Werthe erreicht, um sich dann in das Innere des Canales hineinzuwenden, und zuletzt asymptotisch den beiden Linien $y = \pm A\pi$ zu nähern, sodass schliesslich die Breite des ausfliessenden Strahles nur der halben Breite des Canales gleich wird.

Die Geschwindigkeit längs der Trennungsfläche und im

geraden Ende des ausfliessenden Strahles ist $1/A$. Längs der festen Wand und im Innern der Flüssigkeit ist sie überall kleiner als $1/A$, sodass diese Bewegungsform bei jeder Grösse der Ausflussgeschwindigkeit stattfinden kann.

Ich hebe an diesem Beispiele namentlich hervor, wie es zeigt, dass die Form des Flüssigkeitsstromes in einer Röhre auf sehr lange Strecken hin durch die Form des Anfangsstückes bestimmt sein kann.

Zusatz, elektrische Vertheilung betreffend. Wenn man in der Gleichung (2) die Grösse ψ als das Potential von Elektricität betrachtet, so ergiebt sich hier die Vertheilung der Elektricität in der Nähe des Randes zweier ebener und sehr naher Scheiben, vorausgesetzt, dass ihr Abstand als verschwindend klein gegen den Krümmungshalbmesser ihrer Randcurven betrachtet werden kann. Es ist das eine sehr einfache Lösung der Aufgabe, welche Hr. Clausius [1]) behandelt hat. Sie ergiebt übrigens dieselbe Vertheilung der Electricität, wie er sie gefunden hat, wenigstens soweit dieselbe von der Krümmung des Randes unabhängig ist.

Ich will noch hinzufügen, dass dieselbe Methode genügt, um auch auf zwei parallelen unendlich langen ebenen Streifen, deren vier Kanten im Querschnitte die Ecken eines Rechteckes bilden, die Vertheilung der Elektricität zu finden. Die Potentialfunction ψ derselben wird gegeben durch eine Gleichung von der Form:

$$x + yi = A(\varphi + \psi i) + B \frac{1}{H(\varphi + \psi i)} \cdots\cdots \quad (4)$$ 228

wo $H(u)$ die von Jacobi in den Fundamenta nova p. 172 als Zähler von *sin am u* entwickelte Function bezeichnet. Die belegten Streifen entsprechen nach dortiger Bezeichnung dem Werthe $\varphi = \pm 2K$, wobei $x = \pm 2AK$ den halben Abstand der Streifen ergiebt, während vom Verhältniss der Constanten A und B die Breite der Streifen abhängt.

Die Form der Gleichungen 2 und 4 lässt erkennen, dass φ und ψ als Functionen von x und y nur durch äusserst complicirte Reihenentwickelungen auszudrücken sein können.

1) Poggendorff's Annalen Bd. LXXXVI.

X.

Ueber ein Theorem, geometrisch ähnliche Bewegungen flüssiger Körper betreffend, nebst Anwendung auf das Problem, Luftballons zu lenken.

„Monatsberichte der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin“
vom 26. Juni 1873. S. 501—514.

501 Die Bewegungsgesetze der tropfbaren und gasigen Flüssig-
keiten sind hinreichend gut bekannt in Form von Differential-
gleichungen, welche nicht blos den Einfluss aus der Ferne wir-
kender äusserer Kräfte, so wie den des Druckes der Flüssigkeit,
sondern auch den Einfluss der Reibung berücksichtigen. Wenn
man bei der Anwendung dieser Gleichungen beachtet, dass unter
Umständen, — nämlich da, wo eine continuirliche Bewegung
negativen Druck geben würde, — sich Trennungsflächen mit
discontinuirlicher Bewegung an beiden Seiten ausbilden müssen,
wie ich dies in einer früheren Correspondenz[1]) der Akademie
zu erweisen gesucht habe: so fallen auch die Widersprüche
fort, welche bei Nichtberücksichtigung dieses Umstandes zwi-
schen vielen scheinbaren Folgerungen der hydrodynamischen
Gleichungen einerseits und der Wirklichkeit andererseits bis-
502 her zu bestehen schienen. Es liegt in der That, so weit ich
sehe, zur Zeit kein Grund vor, die hydrodynamischen Gleichun-
gen nicht für den genauen Ausdruck der wirklich die Bewe-
gungen der Flüssigkeiten regierenden Gesetze zu halten.

Leider sind wir nur für verhältnissmässig wenige und be-

---

1) Monatsberichte der Akademie, 23. April 1868 (vorausgehende Aufsatz). — S. auch Kirchhoff in Borchardt's Journal für Mathematik, Bd. 70.

sonders einfache Fälle des Experiments im Stande aus diesen Differentialgleichungen die entsprechenden, den Bedingungen des gegebenen besonderen Falles angepassten Integrale herzuleiten, namentlich wenn der Natur des Problems nach die innere Reibung der Flüssigkeit und die Bildung von Trennungsflächen nicht unberücksichtigt bleiben dürfen. Die Trennungsflächen sind äusserst veränderlich, da sie eine Art labilen Gleichgewichtes besitzen und sich bei jeder Störung in Wirbel aufzurollen streben; dieser Umstand macht die theoretische Behandlung derselben sehr schwierig. So sind wir, wo wir es praktisch mit Flüssigkeitsbewegungen zu thun haben, fast ganz auf herumtastende Versuche angewiesen, und können oft nur Weniges und dies nur in unsicherer Weise über den Erfolg neuer Modificationen unserer hydraulischen Maschinen, Leitungen oder Fortbewegungs-Apparate aus der Theorie voraussagen.

Bei dieser Lage der Sache wollte ich auf eine Verwendung der hydrodynamischen Gleichungen aufmerksam machen, welche erlaubt Beobachtungsresultate, die an einer Flüssigkeit und an Apparaten von gewisser Grösse und Geschwindigkeit gewonnen worden sind, zu übertragen auf eine geometrisch ähnliche Masse einer anderen Flüssigkeit und Apparate von anderer Grösse und anderer Bewegungsgeschwindigkeit.

Ich bezeichne zu dem Ende mit u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit der ersten Flüssigkeit, genommen nach den Richtungen der rechtwinkeligen Coordinataxen x, y, z, mit t die Zeit, mit p den Druck, mit ε die Dichtigkeit, mit k deren Reibungsconstante. Dann sind die Bewegungsgleichungen in Euler'scher Form, mit Einführung der Reibungskräfte nach Stokes, falls keine äusseren Kräfte auf die Flüssigkeit wirken, von folgender Form:

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d(u.\varepsilon)}{dx} + \frac{d(v.\varepsilon)}{dy} + \frac{d(w.\varepsilon)}{dz} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \Big\} \qquad (1)$$

$$-\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz} - k\left\{\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right\}$$ 503

$$-\frac{k}{3}\frac{d}{dx}\left\{\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \Big\} \qquad (1a)$$

Dazu kommen noch die zwei Gleichungen, welche aus der letzteren durch Vertauschung der x und u, beziehlich mit y und v oder mit z und w entstehen.

Wenn nun für eine andere Flüssigkeit die Geschwindigkeiten mit U, V, W, der Druck mit P, die Coordinaten mit X, Y, Z, die Zeit mit T, die Dichtigkeit mit E, die Reibungsconstante mit K bezeichnet wird, mit q, r, n, dagegen drei Constanten und wir setzen:

$$K = qk \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{2}$$

$$E = r\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{2a}$$

$$U = nu \qquad X = \frac{q}{n}x,$$

$$V = nv \qquad Y = \frac{q}{n}y,$$

$$W = nw \qquad Z = \frac{q}{n}z,$$

$$P = n^2rp + \text{Const.} \qquad T = \frac{q}{n^2}t,$$

so erfüllen auch diese mit grossen Buchstaben bezeichneten Grössen die obigen Differentialgleichungen. Setzt man sie nämlich in jene Gleichungen ein, so erscheinen sämmtliche Glieder von 1 mit dem Factor rn^2/q und sämmtliche Glieder von 2 mit dem Factor n^3/q multiplicirt. Von den Constanten q, r, n sind zwei durch die Gleichungen 2 und 2a aus der Natur der Flüssigkeit bestimmt, die dritte n aber ist willkürlich, soweit die bis hierher berücksichtigten Bedingungen in Betracht kommen.

Ist die Flüssigkeit incompressibel, so ist ε als Constante zu behandeln, $d\varepsilon/dt = 0$ zu setzen, und die obigen Gleichungen genügen dann, die Bewegung im Innern zu bestimmen. Ist die Flüssigkeit compressibel, so können wir setzen:

504 $$p = a^2\varepsilon - c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{3}$$

$$p = A^2E - C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{3a}$$

worin c und C dem Drucke hinzuzufügende Constanten bedeuten, welche auf die Gleichungen 1a keinen Einfluss haben. Für Gase sind c und C gleich Null zu setzen, wenn die Bewegung unter solchen Umständen geschieht, dass die Temperatur con-

stant bleibt. Für schnelle Dichtigkeitsveränderungen von Gasen ohne Ausgleichung der Temperatur würden allerdings die Gleichungen (3) und (3a) nur für die Fälle geringer Dichtigkeitsschwankungen anwendbar sein.

Durch die oben angegebenen Werthe für P und E ist die Gleichung (3a) nur erfüllbar, wenn:

$$A^2 = a^2 n^2 .$$

Dadurch wäre also auch die dritte Constante n fest bestimmt. Die Grössen a und A sind hier die Schallgeschwindigkeiten in den betreffenden Flüssigkeiten. Diese müssen sich in demselben Verhältnisse ändern wie die anderen Geschwindigkeiten.

Wenn die Grenzen der Flüssigkeit zum Theil unendlich entfernt, zum Theil durch bewegte oder ruhende, vollkommen benetzte feste Körper gegeben sind, und die Coordinaten und Geschwindigkeits-Componenten dieser begrenzenden festen Körper von dem einen auf den anderen Fall in derselben Weise übertragen werden, wie es eben für die Flüssigkeitstheilchen geschehen ist, so sind die Grenzbedingungen für die U, V, W erfüllt, wenn sie für die u, v, w erfüllt sind. Ich setze dabei voraus, dass an vollständig benetzten Körpern die oberflächlichen Schichten der Flüssigkeit vollkommen festhaften, also die Geschwindigkeits-Componenten der Oberfläche des festen Körpers und der anhaftenden Flüssigkeit die gleichen seien.

Für unvollkommen benetzte Körper wird der Regel nach angenommen, dass eine relative Bewegung der oberflächlichen Flüssigkeitsschichten gegen die Oberfläche des festen Körpers stattfinde. In diesem Falle würde zur Anwendnng unserer Sätze ein gewisses Verhältniss zwischen den Coëfficienten der gleitenden oberflächlichen Reibung der Flüssigkeit an den betreffenden festen Körpern und der inneren Reibung der ersteren angenommen werden müssen.

Die Grenzbedingungen an der freien Oberfläche einer tropfbaren Flüssigkeit, über der der Druck constant ist, würden
ebenfalls erfüllt sein, falls keine aus der Ferne wirkenden 505
Kräfte, wie die Schwere, dabei Einfluss gewinnen. Da dieser Fall aber nur bei tropfbaren Flüssigkeiten vorkommt, welche als incompressibel betrachtet werden können, so braucht man die Gleichungen (3) und (3a) nicht zu erfüllen. Dann bleibt

die Constante n frei, und wenn man für diesen Fall die letztere so bestimmt, dass $n^3/q = 1$ wird, so kann in der Gleichung (1a) auch noch die Intensität der Schwere $-g$ auf der linken Seite als Summand hinzugesetzt werden.

An Trennungsflächen ist die Grenzbedingung, dass der Druck an beiden Seiten einer solchen Fläche gleich sei, was für P ebenfalls erfüllt ist, wenn es für p gilt.

Was die Reaction der Flüssigkeit gegen einen in ihr bewegten festen Körper betrifft, so wächst der Druck gegen die Flächeneinheit der Oberfläche wie $n^2 r$. In demselben Verhältniss wachsen die Reibungskräfte, welche proportional sind dem Product aus $k\varepsilon$ mit Differentialquotienten, wie du/dx, und ähnlichen. Für entsprechende ähnliche Flächenstücke der begrenzenden Körper aber wachsen Druck und Reibungskräfte wie:

$$\frac{q^2}{n^2} \cdot n^2 \cdot r = q^2 r.$$

Die **Arbeit**, die zur Ueberwindung dieser Widerstände gebraucht wird von Seiten des eingetauchten Körpers, für gleiche Zeiträume genommen, wächst demnach wie $nq^2 r$.

Im allgemeinen sind also die drei Constanten n, q, r für compressible Flüssigkeiten und für schwere tropfbare Flüssigkeiten mit freier Oberfläche bei vollständig genauer Uebertragung der Bewegung durch die Natur der beiden Flüssigkeiten bestimmt. Nur für incompressible Flüssigkeiten ohne freie Oberfläche bleibt eine Constante willkürlich.

Nun giebt es aber eine grosse Reihe von Fällen, wo die Zusammendrückbarkeit nicht blos bei tropfbaren, sondern auch bei gasigen Flüssigkeiten nur einen verschwindend kleinen Einfluss hat. Es lassen sich darüber folgende Betrachtungen anstellen. Lässt man die Constante n kleiner werden, während r und q unverändert bleiben, so heisst dies, dass in der zweiten Flüssigkeit die Schallgeschwindigkeit proportional mit n ab-
506 nimmt, ebenso die Geschwindigkeiten der materiellen bewegten Theile, während die Lineardimensionen dem n umgekehrt proportional zunehmen. Abnahme der Schallgeschwindigkeit entspricht bei gleichbleibendem r, das heisst bei gleichbleibender Dichtigkeit der zweiten Flüssigkeit, einer vermehrten Compressibilität derselben. Bei vermehrter Compressibilität also bleiben

sich die Bewegungen ähnlich. Daraus folgt, dass wenn wir das n verkleinern, während wir die Compressibilität der Flüssigkeit unverändert lassen, die Bewegungen derselben sich ändern und denen ähnlicher werden, welche im engeren Raume eine incompressiblere Flüssigkeit ausführen würde. Bei geringen Geschwindigkeiten also wird auch in weiten Räumen die Compressibilität ihren Einfluss verlieren; unter solchen Bedingungen werden sich auch Gase wie tropfbare incompressible Flüssigkeiten bewegen, wie das praktisch aus vielen Beispielen bekannt ist.

Sind die Geschwindigkeiten der materiellen Theile hierbei überhaupt sehr klein, wie bei den verschwindend kleinen Oscillationen, so dass der Ablauf der Bewegung bei gleichmässiger Steigerung derselben merklich unverändert bleibt, so ist es nur die Schallgeschwindigkeit, die sich hierbei ändert, und unser Satz würde dann die Form bekommen: Schallschwingungen einer compressiblen Flüssigkeit werden in weiteren Räumen mechanisch ähnlich verlaufen können, wie schnellere Oscillationen einer weniger compressiblen Flüssigkeit in engeren Räumen. Ein Beispiel für die Benutzung der besprochenen Aehnlichkeit findet sich in meinen Untersuchungen über die Schallbewegung an den Enden offener Orgelpfeiffen[1]). Bei dieser Aufgabe hing die Möglichkeit, die analytischen Bedingungen der Luftbewegung durch die einfacheren der Wasserbewegung zu ersetzen, davon ab, dass die Dimensionen des betreffenden Raumes sehr klein sein mussten im Vergleich zu den Wellenlängen der vorkommenden Schallschwingungen.

Andererseits zeigt sich auch die Reibung weniger einflussreich bei Bewegungen von Flüssigkeiten in weiten Räumen. Man behält dasselbe Verhältniss zwischen den Reibungskräften und den Druckkräften, wenn man n unverändert lässt, während q wächst. Das heisst, wenn man die Dimensionen vergrössert und die Reibungsconstante in demselben Verhältnisse, so kann die Bewegung in dem vergrösserten Systeme ähnlich bleiben, 50
während sich die Geschwindigkeiten nicht ändern. Daraus folgt, dass in einem so vergrösserten Modell, wenn man die Reibungsconstante nicht in demselben Verhältniss vergrössert,

1) Borchardt's Journal für Mathematik, Bd. 57.

sondern unverändert lässt, die Reibung bei gleichbleibender Geschwindigkeit an Einfluss verliert. Was bei unveränderten Geschwindigkeiten für grössere Dimensionen gilt, gilt auch für vermehrte Geschwindigkeiten bei unveränderten Dimensionen. Denn man kann auch gleichzeitig n proportional q wachsen lassen.

In der That macht sich auch bei den meisten praktischen Versuchen in ausgedehnten flüssigen Massen derjenige Widerstand überwiegend geltend, welcher von den Beschleunigungen der Flüssigkeit herrührt, und namentlich in Folge der Bildung von Trennungsflächen entsteht. Dessen Grösse wächst dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional, während der von der eigentlichen Reibung herrührende Widerstand, der der Geschwindigkeit einfach proportional wachsen sollte, nur bei Versuchen in ganz engen Röhren und Gefässen rein heraustritt.

Sieht man von der Reibung ab, das heisst, setzt man in den obigen Gleichungen die Constanten:

$$k = K = 0,$$

so wird auch die Constante q frei verfügbar, und man kann Dimensionen und Geschwindigkeiten in beliebigem Verhältnisse ändern.

Kommt aber die Schwere mit in Betracht, wie bei den Wellen an der freien Wasseroberfläche, so muss nach der früher gemachten Bemerkung n^3/q unverändert bleiben, also $q = n^3$ gesetzt werden. Dann wird:

$$X = n^2 x \qquad Y = n^2 y \qquad Z = n^2 z \qquad\qquad T = nt.$$

Also wenn die Wellenlänge im Verhältnisse von n^2 wächst, so wächst die Oscillationsdauer nur im Verhältnisse von n, was dem bekannten Gesetze der Fortpflanzungs-Geschwindigkeit für die Oberflächenwellen des Wassers entspricht, die wie die Wurzel der Wellenlänge wächst. So ergiebt sich dieses
503 Resultat sehr einfach und für alle Wellenformen, ohne dass man ein Integral der Wellenbewegung zu kennen braucht.

Dasselbe ist anwendbar auf die Widerstände, welche Schiffe von n^2fachen Dimensionen und $n$facher Geschwindig-

keit mit Berücksichtigung der Wellen, die sie an der Oberfläche des Wassers erregen, erleiden. Der gesammte Widerstand wächst in diesem Falle wir $q^2 r$, und da bei gleichbleibender Flüssigkeit $r = 1$, so wächst der Widerstand, wie n^6, und die Arbeit, die zu dessen Ueberwindung gebraucht wird, wie n^7, also in etwas stärkerem Verhältnisse als das Volumen des Schiffes, während der Vorrath an Brennmaterial und der Dampfkessel, welche die Arbeit liefern müssen, nur in demselben Verhältniss wie das Volumen des Schiffes, nämlich wie n^6, wachsen können. So lange also nicht leichtere Maschinen angewendet werden können (die Kohlenvorräthe eingerechnet), wird die Geschwindigkeit eines so vergrösserten Schiffes über eine gewisse Grenze hinaus auch nur in einem geringeren Verhältniss wachsen können, als das der Quadratwurzel aus der Vergrösserung der Lineardimensionen ist.

Aehnlich stellt sich die Rechnung für das Modell des Vogels in der Luft. Wenn wir einen Vogel linear vergrössern, und die Reibung berücksichtigen wollen, so müssen wir q und r gleich Eins setzen, weil das Medium, die Luft, ungeändert bleibt. Setzen wir n gleich einem ächten Bruch, so werden die Geschwindigkeiten in gleichem Maasse reducirt, wie das Volumen wächst, und der Druck gegen die gesammte Fläche des Vogels würde nur den gleichen Werth erreichen, wie bei dem kleineren Vogel, also das Gewicht des grösseren nicht zu tragen vermögen.

Erlauben wir uns die Reibung zu vernachlässigen, was wir nach den obigen Bemerkungen um so mehr thun können, je mehr wir die Dimensionen wachsen lassen, oder bei ungeänderten Dimensionen die Geschwindigkeiten vergrössern, so ist q verfügbar und es muss dann die Veränderung der Dimensionen und Geschwindigkeiten so geschehen, dass der gesammte Flächendruck wie das Gewicht des Körpers steigt, oder es muss sein $q^2 = q^3 / n^3$ oder $q = n^3$. Um die entsprechenden Bewegungen auszuführen, wäre nöthig die Arbeit:

$$q^2 n = n^7 = \left(\frac{q}{n}\right)^{\frac{7}{2}}.$$

Das Volumen des Körpers und der arbeitenden Muskeln steigt 509
aber nur im Verhältniss von $(q/n)^3$.

Daraus geht hervor, dass die Grösse der Vögel eine Grenze hat, wenn nicht die Muskeln in der Richtung weiter ausgebildet werden können, dass sie bei derselben Masse noch mehr Arbeit leisten können als jetzt. Gerade unter den grossen Vögeln, welche grosser Leistungen im Fliegen fähig sind, finden wir nur Fleisch- und Fischfresser, also Thiere, welche concentrirte Nahrung zu sich nehmen und keiner ausgedehnten Verdauungsorgane bedürfen. Unter den kleineren sind auch viele Körnerfresser, wie Tauben und die kleinen Singvögel, gute Flieger. Es erscheint deshalb wahrscheinlich, dass im Modell der grossen Geier die Natur schon die Grenze erreicht hat, welche mit Muskeln, als arbeitsleistenden Organen, und bei möglichst günstigen Bedingungen der Ernährung für die Grösse eines Geschöpfes erreicht werden kann, welches sich durch Flügel selbst heben und längere Zeit in der Höhe erhalten soll.

Unter diesen Umständen ist es kaum als wahrscheinlich zu betrachten, dass der Mensch auch durch den allergeschicktesten flügelähnlichen Mechanismus, den er durch seine eigene Muskelkraft zu bewegen hätte, in den Stand gesetzt werden würde, sein eigenes Gewicht in die Höhe zu heben und dort zu erhalten.

Was die Frage über die Möglichkeit, Luftballons relativ zu der sie umgebenden Luft vorwärts zu treiben, betrifft, so erlauben uns unsere Sätze diese Aufgabe zu vergleichen mit der praktisch in vielfachen Formen durchgeführten anderen Aufgabe, ein Schiff mittels ruderähnlicher oder schraubenförmiger Bewegungsorgane im Wasser vorwärts zu treiben. Wir müssen dabei freilich von der Bewegung an der Oberfläche absehen, vielmehr uns ein unter der Oberfläche fortgetriebenes Schiff vorstellen. Doch wird ein solches, welches etwa nach oben und unten eine Fläche kehrte, die der eingetauchten Fläche eines gewöhnlichen Schiffes congruent ist, sich in seiner Bewegungsfähigkeit kaum wesentlich von einem gewöhnlichen Schiffe unterscheiden.

Beziehen wir nun die kleinen Buchstaben der beiden obigen Systeme hydrodynamischer Gleichungen auf Wasser,

die grossen auf Luft, so ist für 0^{0} und 760 mm Barometerstand:

$$\frac{1}{r} = 773.$$

Nach den Bestimmungen von O. E. Meyer und Cl. Maxwell ist: 510

$$q = 0{,}8082.$$

Die Schallgeschwindigkeit ergiebt für n den Werth:

$$n = 0{,}2314.$$

Daraus ergiebt sich die Vergrösserung der Lineardimensionen:

$$\frac{q}{n} = 3{,}4928,$$

die des Volumens:

$$\left(\frac{q}{n}\right)^3 = 42{,}61.$$

Die Arbeit wird hierbei sehr gering, nämlich:

$$q^2 n r = \frac{1}{5114{,}3}.$$

Das Schiff incl. Besatzung und Belastung muss so viel Gewicht haben, als das von ihm verdrängte Wasservolumen. Der Ballon, mit Wasserstoff gefüllt, müsste um ein gleiches Gewicht zu tragen 837 mal grösseres Volumen haben, als das Schiff. Wird er mit Leuchtgas vom specifischen Gewichte 0,65 (bezogen auf Luft) gefüllt, so muss er 2208,5 mal grösseres Volumen haben als das Schiff. Dadurch bestimmt sich nun auch das Gewicht, welches der Ballon bei den angegebenen Dimensionen haben müsste. Das des Wasserstoffballons würde sein 42,6 / 837 = 1 / 19,6, das des Leuchtgasballons 42,6 / 2208,5 von dem des Schiffs.

Die Arbeit, welche zur Fortbewegung des Ballons unter solchen Umständen nöthig wäre, würde indessen, wie die obige Angabe über den Werth von $q^2 n r$ zeigt, für die angenommene geringe Geschwindigkeit in viel höherem Maasse reducirt sein, als das Gewicht des Ballons gegen das des Schiffes, so dass die hier verlangte Arbeit, bei den gegebenen Gewichtsverhältnissen, in dem Ballon leicht zu leisten wäre. Denn selbst, wenn wir das Schiff so wählten, dass seine übrige Belastung gegen die der Kraftmaschine (beziehlich die als solche fungirenden Menschen) ganz verschwände, würde das Gewicht des 511

Leuchtgasballons nur $\frac{1}{32}$ desjenigen von dieser Kraftmaschine sein dürfen, aber die von ihm getragene Kraftmaschine würde auch nur $\frac{1}{5114}$ von der Arbeit der Schiffsmaschine zu leisten haben, würde also auch ungefähr in diesem letzteren Verhältnisse geringeres Gewicht haben dürfen. Namentlich würde dies letztere der Fall sein, wenn wir Menschen als Kraftmaschinen anwenden, deren Arbeit und Gewicht beide ihrer Anzahl proportional wachsen.

Soweit können wir also die Uebertragung vom Schiff auf den Ballon mit voller Berücksichtigung der in Betracht kommenden abweichenden Eigenschaften von Luft und Wasser anstellen. Als Maxima der Geschwindigkeit für schnelle Schiffe (grössere Kriegsdampfer) werden in dem Ingenieurtaschenbuche des Vereins „Die Hütte“ angegeben 18 Fuss in der Secunde (2,7 deutsche Meilen oder 21 Kilometer in der Stunde). Etwa ein Viertel dieser Geschwindigkeit würden analog gebaute Ballons mit relativ sehr schwach wirksamen oder kleinen Kraftmaschinen erreichen können.

Schiffe von vorgeschriebener Grösse finden die Grenze ihrer Leistungsfähigkeit gezogen durch die Grenzen der Kraft der Maschine (einschliesslich Brennmaterial), welche sie tragen können. Indessen erlauben uns die bisher gemachten praktischen Erfahrungen für grosse schnelle Schiffe den Einfluss der Reibung zu vernachlässigen, und somit über die Constante q willkürlich zu verfügen, ebenso auch über n, wenn wir die Bewegungen an der Oberfläche vernachlässigen dürfen. Lassen wir q proportional n wachsen, so bleiben die Dimensionen ungeändert, die Geschwindigkeiten wachsen wie n, der Widerstand wie n^2, die Arbeit wie n^3. Wären wir also im Stande, eine Schiffsmaschine von demselben Gewichte aber grösserer Arbeitsleistung zu bauen als die bisherigen, so würden wir auch grössere Geschwindigkeiten erreichen können.

Mit einem solchen, bisher freilich noch nicht construirten Schiffe müssten wir den Ballon vergleichen, um eine hinreichende Ausnutzung der ihm mitgegebenen Kraftmaschine zu erreichen. Auch bei ihm würde bei unveränderter Grösse, wenn die Geschwindigkeit wie n wächst, die Arbeit wie n^3 wachsen müssen.

Nun wird das Verhältniss zwischen Gewicht und Arbeitsgrösse für Menschen, die von einem Ballon fortgetragen werden, nur bei sehr riesigen Dimensionen des Ballons sich vielleicht günstiger stellen können, als für einen Kriegsdampfer und seine Maschine. Für den letzteren berechne ich aus den technischen 512
Angaben, dass er für die Geschwindigkeit von 18 Fuss eine Pferdekraft braucht auf 4636,1 kg Gewicht.[1]) Dagegen ein Mensch, der unter günstigen Umständen bei 200 Pfund Gewicht 8 Stunden täglich 75 Fusspfund Arbeit per Secunde leisten kann, giebt im Durchschnitt des Tages auf 1920 kg eine Pferdekraft. Wenn also der Ballon etwa anderthalbmal so viel wiegt, als die arbeitenden Menschen, die er trägt, so ist das Verhältniss dasselbe, wie bei dem Schiffe. Herr Dupuy de Lôme hat unter einem weniger günstigen Verhältnisse seine Versuche ausgeführt; im Ballon waren 14 Mann Besatzung, deren Gewicht ein Viertel des Ganzen betrug, von denen aber nur acht arbeiteten. Danach wird es schon eine verhältnissmässig günstige Annahme sein, wenn wir beim Ballon das Verhältniss zwischen Gewicht und Arbeit dem der Kriegsdampfer gleich setzen. Wir können demnach für den Leuchtgasballon das Verhältniss zwischen Arbeit und Gewicht $51{,}831/5114\ n^3$ so steigern durch Vergrösserung von n, dass es gleich 1 wird, das heisst, gleich dem des Schiffes. Dann muss werden:

$$n = 4{,}6208.$$

Da nun die Geschwindigkeit U des Ballons, die wir oben unter Voraussetzung voller geometrischer Aehnlichkeit der Bewegungen berechnet haben, nur 0,2314 von der Geschwindigkeit u des Schiffes war, so ergiebt sich nun:

$$U = 0{,}2314 \,.\, nu = 1{,}06925\, u.$$

1) Die speciellen Angaben, auf denen die Rechnung beruht, sind folgende:

L Länge des Linienschiffes 230 Fuss preussisch.
B Breite „ „ 54 „ „
H Ganze Höhe des „ 24 „ „
T Tiefe unter Wasser $= H - \frac{1}{8} B$.
V Verdrängtes Wasservolumen $= 0{,}46\ L.\ B.\ T.$
1 Kubikfuss Seewasser wiegt: 63,343 Pfund.
A Fläche des eingetauchten Hauptspants, 1000 Quadratfuss.
Arbeit $= \zeta A v^3$, worin $\zeta = 0{,}46$.

Für den Wasserstoffballon könnte die Geschwindigkeit unter denselben Voraussetzungen etwas grösser werden, da hier:

513 $$\frac{19,6}{5114}\, n^3 = 1$$

zu setzen wäre. Also:

$$n = 6,390$$
$$U = 0,2314 \,.\, nu = 1,4786\, u,$$

was beinahe das anderthalbfache von der bisher erreichten Geschwindigkeit des Kriegsdampfers wäre. Die letzte Geschwindigkeit eines Wasserstoffballons würde schon ausreichen, um langsam gegen eine „frische Briese“ vorwärts zu gehen.

Aber es ist wohl zu bemerken, dass diese Rechnungen sich auf colossale Ballons beziehen, deren lineare Dimensionen etwa $3\frac{1}{2}$mal grösser sind als die des untergetauchten Theils eines grossen Linienschiffes, und dass der Leuchtgasballon 60220 kg wiegen würde, während der von Herrn Dupuy de Lôme nur 3799 kg wog. Um zu Dimensionen zurückzukehren, die sich eher in der Ausführung erreichen lassen, muss man q und n so verkleinern, dass das Verhältniss der Arbeit zum Gewichte unverändert bleibt, also:

$$q^2 n : \left(\frac{q}{n}\right)^3 = 1,$$

das heisst: $$q = n^4.$$

Dabei würde sich die Geschwindigkeit n wie die dritte Wurzel aus den Lineardimensionen, oder wie die neunte Wurzel aus dem Volumen oder dem Gewicht vermindern. Diese Reduction ist verhältnissmässig unbedeutend. Gehen wir zum Beispiel von unserem idealen Ballon auf einen von dem Gewichte des Herrn Dupuy zurück, so ergiebt sich eine Reduction der Geschwindigkeit im Verhältniss von 1,36 : 1; dies gäbe eine Geschwindigkeit von 14,15 Fuss für die Secunde, oder 16,5 km für die Stunde. Die Lineardimensionen des Ballons würden dabei im Verhältniss 1,4 : 1 die des mit ihm verglichenen Schiffes übertreffen.

Die Verhältnisse zwischen Arbeit und Belastung haben in Hrn. Dupuy's Versuch den oben vorausgesetzten nahehin entsprochen. Die acht Männer, welche bei ihm arbeiteten, sind allerdings nach unserem obigen Anschlage mit 800 kg anzu-

setzen, was etwas mehr als ein Fünftel des Gesammtgewichts ist. Da aber der Versuch nur kurze Zeit dauerte, konnten diese die ganze Zeit hindurch mit ganzer Energie arbeiten, 514
während oben nur der Durchschnittswerth achtstündiger Arbeit für den ganzen Tag berechnet ist. Also sind diese acht Männer gleich 24 dauernd arbeitenden zu setzen, wodurch die Differenz mehr als ausgeglichen wird. Herr Dupuy giebt an, für die Dauer 8 km in der Stunde und bei angestrengterer Arbeit 10¼ km unabhängig vom Winde erreicht zu haben. Er ist also nicht allzuweit hinter der Grenze zurückgeblieben, welche meine Berechnungen, als die mit einem Ballon solcher Grösse erreichbaren, anzeigen.

In der vorstehenden Berechnung haben wir aber allein Rücksicht genommen auf das Verhältniss zwischen Arbeitskraft und Gewicht, und vorausgesetzt die Form eines solchen Ballons und seines Motors lasse sich mit den uns gegebenen Materialien herstellen. Hier scheint mir aber eine Hauptschwierigkeit der praktischen Ausführung zu liegen. Denn die aus festen Körpern bestehenden Maschinentheile behalten bei geometrisch ähnlicher Vergrösserung ihrer Lineardimensionen nicht die nöthige Festigkeit; sie müssen dicker und deshalb schwerer gemacht werden. Will man aber dieselbe Wirkung mit kleineren Motoren von grösserer Geschwindigkeit erreichen, so verschwendet man Arbeit. Der Druck gegen die ganze Fläche eines Motors (Schiffsschraube, Ruder) wächst wie $q^2 r$. Soll dieser Druck, welcher die forttreibende Kraft giebt, unverändert bleiben, so kann man die Dimensionen nur verkleinern, indem man n, also auch die Geschwindigkeiten, wachsen lässt; dann wächst aber auch die Arbeit, wie $q^2 n r$, also proportional n. Man kann also sparsam nur arbeiten mit verhältnissmässig langsam bewegten grossflächigen Motoren. Und diese in den nöthigen Dimensionen ohne zu grosse Belastung des Ballons herzustellen, wird eine der grössten praktischen Schwierigkeiten sein.

XI.

Ueber Reibung tropfbarer Flüssigkeiten.

Von

H. Helmholtz und **G. v. Piotrowski.**

Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der k. k. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Bd. XL. S. 607. Sitzung vom 12. April 1860. (2 Tafeln.)

---

607 In den meisten Fällen von Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten, welche bei physiologischen Untersuchungen oder technischen Aufgaben vorkommen, hat die Reibung der Flüssigkeitstheilchen untereinander und an den Wänden des Gefässes einen so bedeutenden Einfluss auf die Form der Bewegung, dass wenn man in den theoretischen Untersuchungen solcher Fälle die Reibung vernachlässigen wollte, sich die allergröbsten Differenzen zwischen Theorie und Experiment ergeben würden. Nun sind die Bewegungsgleichungen für eine Flüssigkeit, die der Reibung unterworfen ist, allerdings schon vor längerer Zeit aufgestellt worden von Poisson[1]), von Navier[2]) und Stokes[3]), und zwar sind alle drei Mathematiker, indem sie von ganz verschiedenen zu Grunde gelegten Hypothesen ausgingen, zu denselben Bewegungsgleichungen für tropfbare Flüssigkeiten gelangt, während für gasförmige allerdings eine Differenz zwischen Navier und den beiden anderen besteht. Indessen ist bisher nur eine einzige Form des Experimentes gefunden worden, für

---

1) Journal de l'école Polytechnique. Cahier XX.

2) Mémoires de l'Institut de France T. VI.

3) Cambridge Philosophical Transactions T. VIII, p. 287.

welche die vollständige Theorie aus jenen Bewegungsgleichungen hergeleitet werden kann, es ist das die Bewegung einer Flüssigkeit in sehr engen und sehr langen Röhren. Ueber diese hat bekanntlich Poiseuille[1]) genaue und eingehende Untersuchungen gemacht, deren Resultate mit der mathematischen Theorie in guter Uebereinstimmung sind. Dabei hat sich aber gleichzeitig 608 gezeigt, dass wenn man von sehr engen Röhren zu weiteren übergehen will, die Länge der Röhren in viel grösserem Verhältnisse zunehmen muss, als ihr Durchmesser, wenn dieselbe einfache Theorie gültig bleiben soll. Auch ergeben die erwähnten hydrodynamischen Gleichungen, dass wenn man Länge und Durchmesser der Röhre auf das $n$fache vergrössert, die Geschwindigkeiten auf $1/n$ verringert werden müssen, der Druck auf $1/n^2$, wenn die Bewegung der früheren ähnlich bleiben soll. Es wird also die Länge der Röhre etwa wie n^3 wachsen müssen, wenn man gleiche Drucke anwenden will, ohne die Störungen der linearen Bewegung einen grösseren Einfluss auf das Resultat gewinnen zu lassen. Dadurch wird es unausführbar, ähnliche mit der Theorie vergleichbare Versuche an anderen als capillaren Röhren anzustellen. Dazu kommt noch, dass jede Ungleichförmigkeit an der Röhrenwand, namentlich jede Oeffnung, die zur Einsetzung eines Druckmessers dient, bedeutende Störungen der Bewegung hervorbringt[2]), sodass man die unter solchen Bedingungen gewonnenen Ergebnisse zwar zur Ableitung praktischer Approximationsformeln, aber nicht zur Vergleichung mit der mathematischen Theorie gebrauchen kann.

Da es nun übrigens in dem verwirrenden Labyrinth von Erscheinungen, welche bei den Flüssigkeitsbewegungen vorkommen, von der grössten Wichtigkeit wäre, eine durchgreifende und strenge Theorie als Leitfaden zu haben, welche wenigstens erkennen liesse, welcher Theil der Erscheinungen erklärbar, welcher vor der Hand noch zu verwickelt sei: so beschlossen wir einen zweiten Fall von Flüssigkeitsbewegung zu untersuchen, dessen Theorie vollständig aus den hydrodynamischen

1) Memoires des Savants étrangers IX, 433.

2) S. Ludwig und Stefan, Sitzungsberichte der kais. Akademie zu Wien, Bd. XXXII, 1858, 29. April.

Gleichungen für reibende Flüssigkeiten hergeleitet werden kann, namentlich um zu sehen, ob die daraus gewonnenen Werthe der Reibungsconstanten für das Wasser übereinstimmten mit denen, die aus Poiseuille's Versuchen berechnet werden können. Ein solcher Fall ist die Bewegung des Wassers in einer Hohlkugel, und zwar liessen wir das kugelförmige Gefäss drehende Schwingungen um einen seiner Durchmesser machen. Es konnte aus diesen Beobachtungen die Kraft experimentell
609 bestimmt werden, welche die in dem Gefässe enthaltene Flüssigkeit auf die Wände des Gefässes ausübt, und konnte mit der aus der mathematischen Theorie der Flüssigkeitsbewegung hergeleiteten Kraft verglichen werden.

Leider zeigte der Erfolg, dass die gewöhnlich gemachte Annahme, welche durch Poiseuille's Versuche bestätigt zu sein schien, wonach die oberflächlichste Schicht der Flüssigkeit den Wänden des Gefässes fest anhaftet, für die wässerigen Flüssigkeiten in Metallgefässen mit polirter und vergoldeter Oberfläche, wie sie von uns, um die Unveränderlichkeit der Oberfläche zu sichern, angewendet waren, nicht zutrifft, während sie andererseits für Alkohol und Aether auch in solchen Metallgefässen nahehin zutrifft. Der Einfluss der Oberfläche wurde durch Versuche mit einem Glasgefässe, welches erst mit natürlicher, dann mit versilberter Oberfläche zu den Schwingungsversuchen diente, direct erwiesen. Dadurch entstand eine grössere Complication des Erfolges als vorher erwartet wurde, und es reichte die unter den obwaltenden Umständen erreichbare Genauigkeit der Messungen nicht aus, um die strenge Uebereinstimmung der aus unserem Verfahren abgeleiteten Werthe der Reibungsconstanten mit denen von Poiseuille ganz festzustellen. Es liegt nämlich im Wesen der angewendeten Methode, dass sie genaue Bestimmungen des inneren Reibungscoëfficienten der eingeschlossenen Flüssigkeiten hauptsächlich dann ergiebt, wenn die oberflächliche Schicht der Flüssigkeit gar keine oder nur eine kleine Gleitung längs der Metallfläche ausführt. Sollen dagegen diese Bestimmungen im Falle grösserer Gleitung mit ähnlicher Genauigkeit ausgeführt werden, so ist eine sehr genaue Bestimmung der Schwingungsdauer bis mindestens zu den Hunderttheilen einer Secunde nöthig. Diese

ist in dem vielfachen Erschütterungen und Temperaturwechseln ausgesetzten Locale, wo die Versuche angestellt werden mussten, nicht immer erreicht worden. Leider hat dieser Umstand gerade beim reinen Wasser, wo die Vergleichung mit den früheren Versuchen von Poiseuille möglich war, grossen Einfluss gehabt, sodass der Werth der Reibungsconstante, der aus den Versuchen des letzteren Beobachters folgt, zu dem aus den vorliegenden Versuchen berechneten sich wie 4:5 verhält. Es erscheint immerhin schon als ein Resultat von einigem Interesse, dass sich mittels der Theorie eine solche Uebereinstimmung herstellt zwischen Zahlen, die von zwei so durchaus verschiedenen Versuchsmethoden geliefert worden sind, und 610
die übrigens der Natur der Sache nach jeden beliebigen Werth zwischen Null und Unendlich annehmen könnten.

A. Experimenteller Theil.

Von **Dr. G. v. Piotrowski.**

Auf Vorschlag des Hrn. Prof. Helmholtz unternahm ich es, die Reibung der tropfbaren Flüssigkeiten an starren Gefässwänden zu studiren, und zwar durch Beobachtung der Schwingungen eines mit Flüssigkeit vollgefüllten Gefässes.

Vor Allem lag es mir daran zu ermitteln, ob die Annahme, dass die Reibung im Inneren der bewegten Flüssigkeiten und an einer starren Gefässwand der Geschwindigkeit dieser Bewegung direct proportional sei, eine gerechtfertigte wäre.

Dies zu ermitteln hing ich ein Fläschchen, wie solche zur Aufbewahrung von chemischen Reagentien üblich sind, bifilar an dünnen übersilberten Kupferdrähten auf, in der Weise, dass ich um den Hals des Fläschchens eine dicke Stahlnadel schlang, die Enden dieser Nadel nach aufwärts, dann nach einwärts und endlich nach abwärts bog, und so das Fläschchen mittelst der Enden der Nadel, die spitz zugeschliffen waren, auf einer Kupferplatte balanciren liess; in Einkerbungen dieser Kupferplatte und einer ähnlichen an der Zimmerdecke liefen die Drähte.

Vorne am Fläschchen befestigte ich einen plan-parallelen Spiegel, an dem Boden des Fläschchens in der Richtung seines, dem magnetischen Meridiane parallelen Durchmessers einen kleinen Magnetstab, und umgab das Ganze mit einem Gehäuse von Pappe, das dem Spiegel gegenüber eine mit einem plan-parallelen Glase verschlossene Oeffnung besass. Indem ich nun einen galvanischen Strom durch Drahtspiralen, welche möglichst nahe an dem Magnete passend angebracht waren, leitete, konnte ich den Magnet und mit ihm das Fläschchen aus ihrer Ruhelage ablenken; unterbrach ich nun den Strom, so schwang das Fläschchen um seine verticale Hauptaxe. Die Weite dieser Schwingungen beobachtete ich mittels Scale und Fernrohr.

611 Abgesehen von der Reibung der Flüssigkeit mussten die Weiten der Schwingungsbögen in geometrischer Progression abnehmen, d. h. die logarithmischen Decremente derselben mussten constant sein[1]; ist die Reibung der Flüssigkeit an der Gefässwand der Geschwindigkeit der Bewegung proportional, so darf durch sie die Abnahme der Schwingungsbögen in geometrischer Progression nicht gestört werden (s. theoretischen Theil). Den fraglichen Satz zu beantworten brauchte ich also blos die aufeinander folgenden Elongationen des schwingenden Fläschchens zu beobachten, und aus den so gewonnenen Daten die logarithmischen Decremente zu berechnen. Diese erwiesen sich als constant.

Beifolgende Tabelle mag dies näher darthun. Die Scale war 1175 mm von der Umdrehungsaxe entfernt, der Spiegel 22 mm. Die Scalentheile sind Millimeter; die Ruhelage vor dem Versuche war 500,00.

---

1) S. Gauss, Anleitung zur Bestimmung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel, in den Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereines im Jahre 1837.

 612

A	B	C	D	E	F	G	H
25,0	497,25	913,50	456,75	434,92	2,638 409 4	0,013 292 5	
954,0	497,65	883,30	441,65	421,81	2,625 116 9	0,013 521 0	
56,0	497,72	853,75	426,87	408,88	2,611 595 9	0,013 079 0	
924,6	498,80	826,20	413,10	396,75	2,598 516 9	0,012 650 3	
85,7	498,87	800,65	400,32	385,36	2,585 866 6	0,012 855 7	
899,2	499,20	775,60	387,80	374,12	2,573 010 9	0,013 156 4	0,013 039 7
111,4	499,30	751,00	375,50	363,04	2,559 954 5	0,013 103 5	
874,8	499,30	727,20	363,60	352,25	2,546 851 0	0,012 951 9	
136,2	499,25	704,50	352,25	341,90	2,533 899 1	0,012 813 3	
852,0	500,22	682,85	341,42	331,96	2,521 085 8	0,012 973 7	
158,8	500,47	661,65	330,82	322,19	2,508 112 1	0,013 150 9	
831,3	500,95	640,90	320,45	312,58	2,494 961 2	0,013 017 2	
180,5	500,97	621,05	310,52	303,35	2,481 944 0	0,013 139 0	
811,5	501,25	601,70	300,85	294,31	2,468 805 0	0,013 153 3	
200,4	501,20	583,00	291,50	285,53	2,455 651 7	0,013 015 2	
792,7	501,55	565,10	282,55	277,10	5,442 636 5	0,012 932 7	0,013 058 7
219,0	501,55	547,90	273,95	268,97	2,429 703 8	0,013 013 4	
775,5	501,72	531,15	265,57	261,03	2,416 690 4	0,012 969 5	
236,2	501,70	515,00	257,50	253,35	2,403 720 9	0,0 3 033 0	
759,2	501,85	499,30	249,65	245,86	2,390 687 9	0,013 163 1	
252,2	501,82	483,95	241,97	238,52	2,377 524 8	0,012 898 8	
743,8	502,20	469,40	234,70	231,54	2,364 626 0	0,012 849 0	
267,5	502,32	455,35	227,67	224,79	2,351 777 0	0,013 081 5	
730,0	502,55	441,50	220,75	218,12	2,338 695 5	0,012 995 2	
281,8	502,50	428,20	214,10	211,69	2,325 700 3	0,012 994 2	
716,6	502,65	415,30	207,65	205,45	2,312 706 1	0,013 068 1	0,013 014 1
295,0	502,62	402,75	201,37	199,36	2,299 638 0	0,013 136 6	
704,0	502,75	390,50	195,25	193,42	2,286 501 4	0,013 152 8	
307,5	502,67	378,65	189,32	187,65	2,273 348 6	0,012 967 1	
692,0	502,85	367,30	183,65	182,13	2,260 381 5	0,012 997 5	
319,2	502,85	356,30	178,15	176,76	2,247 384 0	0,012 993 3	
681,0	503,02	345,65	172,82	171,55	2,234 390 7	0,013 080 8	
330,2	503,07	335,25	167,62	166,46	2,221 309 9	0,013 245 0	
670,7	503,22	325,05	162,52	161,46	2,208 064 9	0,013 051 3	
340,7	503,15	315,30	157,65	156,68	2,195 013 6	0,012 684 6	
660,8	503,35	306,10	153,05	152,17	2,182 329 0	0,012 625 2	0,013 045 0
350,5	503,37	297,25	148,62	147,81	2,169 703 8	0,012 973 0	
652,0	503,40	288,40	144,20	143,46	2,156 730 8	0,013 341 2	
359,2	503,40	279,60	139,80	139,12	2,143 389 6	0,012 798 5	
643,2	503,70	271,40	135,70	135,08	2,130 591 1	0,012 657 3	
368,0	503,82	263,55	131,77	131,20	2,117 933 8	0,013 310 1	
635,6	503,87	255,55	127,77	127,24	2,104 623 7	0,013 097 4	
376,1	503,75	247,90	123,95	123,46	2,091 526 3	0,012 924 5	
627,7	503,77	240,55	120,27	119,84	2,078 601 8	0,013 320 9	
383,5	503,77	233,25	116,62	116,22	2,065 280 9	0,013 588 3	0,013 142 4
620,4	503,80	226,00	113,00	112,64	2,051 692 6	0,013 271 2	
390,8	503,62	219,15	109,57	109,25	2,038 421 4	0,012 501 4	
613,2	503,75	212,90	106,45	106,15	2,025 920 0	0,012 872 0	
397,3	503,87	206,65	103,32	103,05	2,013 048 0	0,013 395 6	
607,2	503,97	200,35	100,17	99,92	1,999 652 4		
403,8							

613 Die Columne A enthält die unmittelbar abgelesenen Scalentheile, die Columne B enthält die aus den Elongationen berechneten Ruhelagen; die Zahlen sind aus A berechnet nach der Formel $\frac{1}{4}(a+2b+c)$, wenn a, b, c drei aufeinander folgende Zahlen der Columne A bedeuten. Die Zahlen der Columne C sind aus A berechnet nach der Formel $\pm\frac{1}{2}(a-2b+c)$, wenn a, b, c dieselbe Bedeutung wie vorhin haben; sie stellen die doppelten Tangenten der Schwingungsbögen dar. D enthält die einfachen Tangenten der Schwingungsbögen, E die Schwingungsbögen selbst, nach einer eigens zu diesem Zwecke berechneten Tabelle gefunden. F enthält die (gemeinen) Logarithmen von E, G die Unterschiede der aufeinander folgenden Zahlen in F, also das logarithmische Decrement für die halbe Schwingung in gemeinen Logarithmen ausgedrückt. H endlich die Mittel aus je 10 aufeinander folgenden logarithmischen Decrementen.

Die Zahlen der Columne H lassen keinen Zweifel über die Constanz des logarithmischen Decrementes; die geringen Schwankungen in der Columne G erklären sich leicht daraus, dass nur noch die Zehntel-Millimeter berücksichtigt sind, und auch diese nicht direct abgelesen, sondern geschätzt wurden; diese Fehlerquelle muss sich um so mehr geltend machen, je kleiner die Schwingungsbögen werden.

Alle übrigen Versuchsreihen sind der angeführten ähnlich.

Nachdem ich mich so überzeugt habe, dass die Reibung, wenigstens des Wassers, an starren Gefässwänden bei einer Bewegung beider gegeneinander der Geschwindigkeit dieser Bewegung wirklich direct proportional sei, suchte ich zu ermitteln, ob die Natur der Gefässwand auf die Grösse dieser Reibung von merklichem Einfluss ist, oder nicht.

Ein Fläschchen, für welches ich fand:

	Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement
	23,933 3	0,062 218 2
	23,933 3	0,062 846 7
Mittel	23,933 3	0,062 532 5

wenn ich den eben beschriebenen Versuchen ähnliche damit anstellte, versilberte ich inwendig nach der Liebig'schen Me-

thode; der Silberüberzug, wiewohl er die Innenfläche des Fläschchens ganz gleichmässig bedeckte, war doch so dünn, dass ein Unterschied zwischen der Wassermenge (143 590 mg) 614
die das Fläschchen vor und nach dem Versuche fasste, mittels einer Wage, die noch 5 mg ausschlug, nicht zu entdecken war. Bei dem versilberten Fläschchen fand ich:

	Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement
	24,008 8	0,060 030 5
	24,007 6	0,059 962 2
Mittel	24,008 2	0,059 996 4

folglich wäre das Verhältniss der Reibung am Glase zur Reibung am Silber wie:

$$1:0{,}956\,45,$$

d. h. die Reibungsconstante um 4,355 $^0/_0$ kleiner beim Silber, wenn wir die beobachteten Unterschiede nicht jenen unbekannten Einflüssen zuschreiben wollen, welche, wie wir im Verfolge sehen werden, sowohl die Schwingungsdauer als das logarithmische Decrement selbst bei ganz gleichen und unmittelbar aufeinander folgenden Versuchen nicht ganz constant erscheinen lassen. Nun ging ich an die Aufgabe, die Constanten dieser Reibung für ein Gefäss von regelmässiger Begrenzung zu bestimmen.

Der Apparat, den ich zu diesem Behufe anwandte, war von Herrn Mechaniker Fessel in Cöln angefertigt.

Das Gefäss zur Aufnahme der Flüssigkeit war eine Hohlkugel (Fig. I, *A* in der Seitenansicht, *B* im Durchschnitte) oder vielmehr zwei hohle Halbkugeln, die mittels breiter Leisten (a), welche wieder ineinander griffen, sehr genau aneinander gelegt, und dann mittels sechs Schrauben (*b*) aneinander geschraubt werden konnten; die Schrauben so wie die Schraubengänge waren mit Zahlen bezeichnet, um die Genauigkeit des Verschlusses zu sichern.

Die eine, beim Versuche untere Halbkugel hatte am Scheitel eine Eingussöffnung, die mittels eines genau eingepassten kegelförmigen Zapfens (*c*) verschliessbar war, die innere Fläche des Zapfens bildete einen integrirenden Bestandtheil der inneren hohlkugelförmigen Fläche.

Die andere Halbkugel trug an ihrem Scheitel eine Schraube (*d*), mittels deren sie an den Rahmen des darüber befindlichen Spiegels angeschraubt werden konnte.

615 Die Innenfläche der Kugel war im Feuer vergoldet.

Der Spiegel (Fig. 2 stellt denselben sammt der später beschriebenen Stange mit den Laufgewichten dar) war in einem Rahmen von Messing (*a*) enthalten, und hing mit diesem blos oben durch eine Schraube (*b*) zusammen, so dass er um seine verticale Axe mit Reibung beweglich war.

Der Rahmen hatte unten eine Oeffnung (*c*) zur Aufnahme der Schraube der Kugel, die daran mittels einer Schraubenmutter (*d*) befestigt werden konnte, und oben zwei senkrechte Balken, durch einen Querbalken verbunden (*e*); zwischen diesen senkrechten Balken lief auf zwei Spitzen ein Cylinder (*f*) frei beweglich um seine horizontale Hauptaxe. Der Cylinder hatte in seiner Mitte eine Einkerbung zur Aufnahme des Aufhängungsdrahtes. Der Durchmesser des Cylinders an der Einkerbung betrug 5,20 mm.

Der Aufhängungsdraht, ein übersilberter Kupferdraht, war um diesen Cylinder geschlungen, und lief von da auf beiden Seiten des obersten kleinen Querbalkens, ohne jedoch diesen zu berühren, nach aufwärts.

Die Enden des Drahtes liefen in Einschnitten keilförmiger Aufsätze (Fig. 3*a*), (*A* Seitenansicht, *B* Durchschnitt), dann in einer Rinne schief nach oben und aussen, wo sie um einen Zapfen (*b*) geschlungen waren; durch Drehen dieser Zapfen konnte der Spiegel nach Belieben gesenkt oder gehoben werden. Die letzten Enden des Drahtes waren endlich mittels Schrauben festgeklemmt.

Die keilförmigen Aufsätze und die Zapfen sammt den Schranben waren an einer Platte (*c*) befestigt, welche in beschränktem Maasse um eine verticale Axe, die gerade die Mitte zwischen den Drähten hielt, an einer darüber befindlichen grösseren Platte (*d*) beweglich war. Um die Platte nach Belieben drehen zu können, war dieselbe mit zwei Armen versehen; an dem einen (*e*) war eine Schnur befestigt, durch deren Anziehung die Drehung erfolgte; die Weite dieser Bewegung konnte mittelst Schrauben (*f*) verändert werden. An dem

anderen Arme (g) war eine federnde Drahtspirale (h) angebracht, welche beim Nachlassen des Zuges an der Schnur die Platte in ihre frühere Lage wieder zurückbrachte.

Diese ganze Vorrichtung diente dazu die aufgehängten festen Theile des Apparates in eine rotirende Bewegung um ihre verticale Hauptaxe zu versetzen, ohne der Beihilfe eines Magneten zu bedürfen, wie dies bei den Vorversuchen der Fall 616
war, und wodurch die Versuche nothwendig unrein werden müssen.

Die grössere Platte war an einem dicken Brette, und dieses wieder an der Decke des Zimmers befestigt. Die vorhin erwähnte Schnur lief über eine Rolle an der Zimmerdecke zu dem Platze, wo das Fernrohr stand.

Dass beim Versuche die Bewegung eine rein rotirende war, also kein Pendeln des Apparates den Versuch trübte, überzeugte ich mich durch Beobachtung des Zapfens, der die Eingussöffnung der Kugel verschloss; beobachtete ich nämlich diesen mittels des Fernrohres, so schien er in Ruhe zu sein.

Schwieriger war es die Innenfläche der Kugel genau auf ihre Gestalt zu prüfen; ich begnügte mich da vorerst einen Stearinabguss zu machen, welcher mir zeigte, dass die Zusammensetzung aus zwei Halbkugeln die Gestalt nicht beeinträchtige; dann legte ich eine planparallele Glasplatte, an deren untere Fläche ich einen schwarzen Punkt anbrachte, auf die Halbkugeln, verschob diese so lange, bis der Punkt die Pupille des Spiegelbildes meines beobachtenden Auges verdeckte (dabei musste der Punkt im Centrum der Kugel sich befinden), und sah zu, ob bei allen Bewegungen der Halbkugel sammt der Glasplatte die Pupille verdeckt blieb. So entdeckte ich eine sehr geringe und begrenzte Abweichung von der Kugelgestalt an der oberen Kugelschale; die übrigen Theile der Kugel schienen ganz genau gearbeitet; für die Genauigkeit der Kugelgestalt spricht endlich noch der Umstand, dass der Durchmesser der Kugel aus dem Wassergewichte, welches dieselbe fasst, berechnet 49,272 mm betragen müsste, und die directe Messung wirklich 49,3 mm ergiebt.

Selbstverständlich waren Kugel und Spiegel beim Versuche in einem Kasten, ähnlich dem bei den Vorversuchen,

eingeschlossen, um den störenden Einfluss der Luftströmungen zu vermindern.

Bevor ich mit Flüssigkeiten zu experimentiren beginnen konnte, musste ich das Drehungsmoment der bifilaren Aufhängung, das Torsionsmoment des Drahtes, endlich das Trägheitsmoment der aufgehängten Theile kennen.

Diese Bestimmungen machte ich nach einer Methode die von Neumann herrührt[1]); sie besteht darin, dass man zwei
617 Gewichte, für die man die Lage des Schwerpunktes kennt, nach und nach in verschiedenen Entfernungen von der Umdrehungsaxe anbringt, und die gesuchten Grössen aus den beobachteten Schwingungsdauern berechnet.

Statt der Kugel befestige ich also an den Spiegel eine eiserne Stange, oder vielmehr ein Schraubengewinde von Eisen (Fig. 2*g*), an diesem liefen vier cylindrische Gewichte von Messing (*h*), möglichst gleich gearbeitet, je zwei dieser Gewichte an einer Seite von der Umdrehungsaxe, und fest aneinander geschraubt: der Spalt zwischen diesen Gewichten gab die Lage des Schwerpunktes der Belastung an; die Entfernung des Spaltes von der Umdrehungsaxe konnte leicht mittels eines Zirkels gemessen werden.

Diesen Apparat versetzte ich nach der vorhin erwähnten Methode in Schwingungen; die Differentialgleichung dieser Bewegung ist:

$$M\frac{d^2w}{dt^2} = -\left(aG + \frac{2b}{L}\right)w,$$

wenn w den Ablenkungswinkel (von der Ruhelage), t die Zeit, a das Drehungsmoment der bifilaren Aufhängung, G das Gewicht der aufgehängten festen Theile, b das Torsionsmoment des Drahtes für die Längeneinheit, L die Länge jedes der beiden Aufhängungsdrähte, oder vielmehr die Länge des Stückes des Aufhängungsdrahtes zwischen dem Cylinder am Spiegelrahmen und dem keilförmigen Aufsatze, M das Trägheitsmoment der schwingenden festen Theile bedeutet.

---

1) Ich verdanke sie einer mündlichen Mittheilung des Hrn. Prof. Helmholtz.

Das vollständige Integral dieser Gleichung ist:

$$w = A \sin t \sqrt{\frac{aG + \frac{2b}{L}}{M}} + B . \cos t \sqrt{\frac{aG + \frac{2b}{L}}{M}},$$

wo A und B die beiden willkürlichen Constanten sind.

Fangen wir die Zeit zu zählen an von dem Augenblicke, wo der Apparat die Ruhelage passirt, wo dann t und w zugleich verschwinden müssen, so wird die Constante $B = o$ und es ist:

$$w = A \sin t \sqrt{\frac{aG + \frac{2b}{L}}{M}}.$$

Stellt uns T die ganze Schwingungsdauer vor, so ergiebt sich daraus:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{aG + \frac{2b}{L}}}, \qquad (1)$$ 618

wo π in der gewöhnlichen Bedeutung gebraucht ist.

Nennen wir nun M das Trägheitsmoment, welches der Apparat hätte, wenn die Schwerpunkte beider (Doppel-)Gewichte in der Umdrehungsaxe lägen, und entfernen wir eines dieser Gewichte so weit, dass sein Schwerpunkt jetzt um R von der Umdrehungsaxe absteht, so wird jetzt $M + mR^2$ das Trägheitsmoment sein, wenn m die Masse dieses Gewichtes bezeichnet, und $M + 2mR^2$, wenn wir beide Gewichte (natürlich nach der entgegengesetzten Seite, um die Gleichgewichtslage nicht zu verändern) um R von der Umdrehungsaxe entfernen, und ebenso $M + 2mr^2$, wenn wir ein andermal die Schwerpunkte beider Doppelgewichte um r von der Umdrehungsaxe entfernt haben.

Die entsprechenden Schwingungsdauern T'' und T' werden dann sein:

$$T'' = 2\pi \sqrt{\frac{M + 2mR^2}{aG + \frac{2b}{L}}},$$

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{M + 2mr^2}{aG + \frac{2b}{L}}},$$

woraus sich ergiebt:

$$aG + \frac{2b}{L} = 4\pi^2 \frac{2m(R^2 - r^2)}{T''^2 - T'^2},$$

Habe ich daher m, T'', T', R und r durch Versuche gefunden, so lässt sich daraus leicht die complicirte Grösse $aG + 2b/L$ berechnen.

Bei den Versuchen, die ich anstellte, waren die einzelnen Gewichte:

1. 32 520,5 mg
2. 32 520,0 „
3. 32 514,8 „
4. 32 510,0 „

Ich nahm die beiden ersten Gewichte zu dem einen, die beiden letzteren zu dem anderen Doppelgewichte zusammen
619 und werde unter Anordnung A diejenige verstehen, wo das 1. und 4., unter Anordnung B diejenige, wo das 2. und 3. Gewicht von der Umdrehungsaxe entfernter waren.

Ferner hatte ich:

$$2m = 13{,}259\,84$$ [1]).

Die Resultate der angestellten Versuche sind:

Nr. des Versuches	Anordnung der Gewichte	Entfernung der Schwerpunkte der Gewichte von der Umdrehungsaxe	Beobachtete Schwingungsdauer[2])
I.	A.	24,69	24,270 0
II.	A.	55,21	40,731 6
III.	A.	41,67	32,889 6
IV.	B.	24,61	24,301 8
V.	B.	56,67	41,792 4
VI.	B.	39,10	31,487 8

Daraus ergiebt sich:

$aG + \frac{2b}{L} = 1\,192{,}98$	aus II. und I.	
$= 1\,189{,}38$	„ II. „ III.	
$= 1\,197{,}20$	„ III. „ I.	
$= 1\,179{,}99$	„ V. „ IV.	
$= 1\,166{,}49$	„ V. „ VI.	
$= 1\,205{,}40$	„ VI. „ IV.[3]),	

1) Die Gravitationsconstante zu 9 808,96 angenommen.

2) Die Schwingungsdauern sind alle nach Gauss' Methode, l. c. bestimmt, und selbstverständlich auf unendlich kleine Schwingungen reducirt. Zur Bestimmung selbst wandte ich ein genau gehendes Chronometer an, welches 0,″4 schlägt. Die Zahlen bedeuten Millimeter und Secunden.

3) Vergleichbar sind nur die Versuche bei der nämlichen Anordnung. Worin die Schwankungen ihre Begründung finden, war ich nicht im

im Mittel ist also:

$$aG + \frac{2b}{L} = 1\,188{,}57. \qquad (2)$$

Die Constanten a und b bestimmte ich nun einzeln in der 620
Weise, dass ich die Stange sammt den Gewichten ganz ebenso bei unifilarer Aufhängung schwingen liess.

Die Gleichung der Bewegung ist hier:

$$M\frac{d^2 w}{d t^2} = -\frac{b}{l}w,$$

wo l die Länge des Drahtes bei unifilarer Aufhängung bedeutet.

Die Bedeutung der übrigen Buchstaben ist dieselbe wie früher.

Das vollständige Integral dieser Gleichung ist:

$$w = A\sin t\sqrt{\frac{b}{lM}} + B\cos t\sqrt{\frac{b}{lM}},$$

wo A und B die willkürlichen Constanten sind, und der zweite Theil wieder verschwindet, wenn wir die Zeit von dem Zeitpunkte zu zählen beginnen, wo der Apparat die Ruhelage passirt.

Es bleibt somit:

$$w = A\sin t\sqrt{\frac{b}{lM}},$$

und wenn $\mathfrak{T}$ die Schwingungsdauer bezeichnet, so ist:

$$\mathfrak{T} = 2\pi\sqrt{\frac{b}{lM}}, \qquad (3)$$

woraus wir für zwei verschiedene Entfernungen der Schwerpunkte der Gewichte von der Umdrehungsaxe, genau so wie vorhin, finden:

$$b = 4\pi^2 . 2ml\,\frac{R^2 - r^2}{\mathfrak{T}''^2 - \mathfrak{T}'^2}.$$

Die Bedeutung der Buchstaben ist an sich klar.

Stande zu ermitteln; dass eine nicht allzugrosse Verschiedenheit des Abstandes der Schwerpunkte beider Gewichte die Schwingungsdauer nicht wesentlich ändert, davon überzeugte ich mich in der Art, dass ich nach dem Versuche absichtlich die Gewichte derart verschob, dass das eine der Umdrehungsaxe um 0,5 mm näher stand als das andere, ohne dass sich der Abstand der Gewichte von einander geändert hätte.

Bei den Versuchen war:

$$l = 978{,}0 \text{ mm}$$

ferner:

Nr. des Versuches	Anordnung der Gewichte	Entfernung der Schwerpunkte der Gewichte von der Umdrehungsaxe	Beobachtete Schwingungsdauer
I.	*B*.	39,10	61,762 6
II.	*B*.	24,69	46,969 4

621 Daraus folgt:

$$b = 292\,572{,}8.$$

Diesen Werth für B in die Gleichung (2) substituirt, finden wir:

$$a = 0{,}003\,161\,97,$$

da:

$$L = \quad 2143{,}2 \text{ mm},$$
$$G = 289\,549{,}2 \text{ mg}$$

waren.

Eine andere Methode A und B einzeln zu bestimmen, ist die Vergleichung des Versuches I bei unifilarer Aufhängung mit dem correspondirenden Versuch VI bei bifilarer Aufhängung, sowie mit dem Resultate der ganzen Versuchsreihe bei bifilarer Aufhängung; denn dividiren wir die Gleichung (1) durch die Gleichung (3) und substituiren für $\mathfrak{T}$ und T die Werthe aus den genannten Versuchen, bei welchen beiden das Trägheitsmoment denselben Werth hat, so fällt M weg und es bleibt:

$$\frac{T}{\mathfrak{T}} = \sqrt{\frac{\frac{b}{l}}{aG + \frac{2b}{L}}},$$

woraus folgt:

$$b = \frac{T^2}{\mathfrak{T}^2} \cdot l \left(aG + \frac{2b}{L}\right),$$

wobei wir den Werth der Grösse $aG + 2b/L$ schon kennen.

In Zahlen ergiebt sich:

$$b = 302\,132{,}2$$

und somit:

$$a = 0{,}003\,131\,26.$$

Als Mittel aus beiden Bestimmungen ergiebt sich:

$$a = 0{,}003\,146\,62$$
$$b = 297\,352{,}5.$$

Diese Zahlen werde ich den künftigen Rechnungen zu 622
Grunde legen.

Nachdem ich so das Torsionsmoment der Drähte, und das Drehungsmoment der bifilaren Aufhängung bestimmt hatte, suchte ich den Werth des Trägheitsmomentes meiner Kugel zu finden. Zu diesem Zwecke vertauschte ich nun die Stange gegen meine Kugel, und bestimmte die Schwingungsdauer, so wie das logarithmische Decrement, welches wir in der Folge werden kennen müssen, der leer schwingenden Kugel.

Hier gilt noch immer die Formel (1):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{aG + \frac{2b}{L}}}$$

woraus sich ergiebt:

$$M = \frac{\left(aG + \frac{2b}{L}\right) T^2}{4\pi^2}$$

G hatte jetzt den Werth 355 629,7 mg; L hatte seinen vorigen Werth.

Die Versuche ergaben:

	Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement[1]
	24,5458	0,006 754 0
	24,5338	0,006 531 8
	24,5550	0,006 597 4
	24,4010	0,005 984 4
Mittel:	24,5089	0,006 466 9.

Darnach ergiebt sich:

$$M = 21\,248{,}9.$$

Ich will jetzt die Versuche folgen lassen, die ich mit einer Reihe verschiedenartiger Flüssigkeiten angestellt habe. In dem theoretischen Theile ist entwickelt, wie man aus der Abnahme der Schwingungen und aus der Aenderung der Schwingungsdauer die Kraft P berechnen könne, welche von

1) Für die ganze Schwingungsdauer in natürlichen Logarithmen ausgedrückt.

der reibenden Flüssigkeit auf die Wand des Gefässes ausgeübt wird. Die Kraft P ist dort gesetzt:

623 $$P = -Ke^{-\beta t} \cos\,[\sigma R + \gamma t + 2\varepsilon + \delta_1]$$

und die Winkelgeschwindigkeit der schwingenden Kugel:

$$\psi = Be^{-\beta t} \cos\,[\sigma R + \gamma t + \varepsilon + \delta + \eta],$$

so dass der Bruch K/B, welchen wir im folgenden mit $\mathfrak{K}$ bezeichnen wollen, das Verhältniss des Maximum der Reibungskraft zum Maximum der Drehungsgeschwindigkeit angiebt, und der Winkel $\varepsilon + \delta_1 - \delta - \eta$, den wir mit ϑ bezeichnen wollen, den Phasenunterschied misst zwischen der Geschwindigkeit und der Kraft.

Diese beiden Grössen können aus den Beobachtungen unmittelbar abgeleitet werden ohne Beziehung auf irgend eine Theorie der Wasserreibung, und sie finden sich im Folgenden bei den einzelnen Versuchsreihen berechnet. Die Kraft $\mathfrak{K}$ wird im Allgemeinen um so grösser, je grösser die innere Reibung ist, wird aber durch stattfindende Gleitung an der Oberfläche vermindert. Der Winkel ϑ beträgt bei den am schwächsten reibenden und nicht gleitenden Flüssigkeiten 45^0, und wächst bis 90^0 bei den stark reibenden. Er wird ebenfalls kleiner, wenn Gleitung stattfindet. Werthe unter 45^0 können nur im Falle der Gleitung vorkommen, während keine erhebliche Gleitung da sein kann, wenn dieser Winkel nahe an 90^0 beträgt[1]).

Es ist ausserdem die Grösse $\mathfrak{K} \cos \vartheta$ angegeben, weil diese der am genauesten zu messende Theil der Kraft $\mathfrak{K}$ ist.

Versuche stellte ich an vorerst mit gewöhnlichem Brunnenwasser, welches jedoch nur ganz geringe Spuren fester Substanzen gelöst enthielt. Die Resultate dieser Versuche waren:

1) Ich verfertigte mir Kügelchen aus Kork und Siegellack von nahezu dem specifischen Gewichte des Wassers, und liess sie suspendirt in einem schwingenden mit Wasser gefüllten Gefässe; die Korkkügelchen machten nur kleine Excursionen im Sinne der Bewegung des Gefässes; hatte ich dabei vor der Bewegung mehrere Kügelchen in einer Geraden, die durch die Schwingungsaxe ging, so bildeten sie auch während des Schwingens fortwährend eine Gerade, zum Beweise, dass der Phasenunterschied in den tieferen Theilen nicht merklich variire.

Zahl des Versuches	Schwingungs-dauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur in ° C.
I.	23,059 4	0,054 533 6	25,4
II.	23,060 0	0,054 654 0	25,5
III.	23,030 4	0,054 069 0	25,9
IV.	23,042 4	0,054 017 0	24,0
V.	23,044 2	0,053 142 4	25,6
VI.	23,043 2	0,054 062 0	23,6
VII.	23,015 6	0,053 232 6	25,0
VIII.	23,033 4	0,053 267 2	24,4
IX.	23,034 2	0,054 089 6	23,0
X.	23,033 4	0,053 863 2	22,4
Mittel:	23,039 2	0,053 892 1	24,48.

Aus diesen Daten berechnen sich nach den im theore- 624
tischen Theile angegebenen Regeln:

$$\mathfrak{K} \cos \vartheta = 88{,}190 \qquad \mathfrak{K} = 99{,}860 \qquad \vartheta = 27^0\,58'\,37''.$$

Eine zweite Versuchsreihe stellte ich mit ausgekochtem Wasser an, welches ich nach dem Auskochen vor Luftzutritt möglichst geschützt hatte. Die Resultate waren:

Zahl des Versuches	Schwingungs-dauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur in ° C.
I.	22,960 1	0,052 821 4	22,0
II.	22,969 8	0,053 331 6	21,8
III.	22,978 8	0,053 738 0	21,8
IV.	22,970 8	0,055 189 8	21,6
V.	22,981 8	0,054 892 6	22,0
VI.	22,977 2	0,055 503 4	21,1
VII.	22,981 8	0,055 746 2	21,7
VIII.	22,975 6	0,056 117 8	21,8
Mittel:	22,974 5	0,054 667 6	21,72.

Jetzt ergiebt sich:

$$\mathfrak{K} \cos \vartheta = 89{,}9064 \qquad \mathfrak{K} = 90{,}7087 \qquad \vartheta = 7^0\,38'\,26''$$[1]).

Was die Schwankungen der Zahlwerthe bei den einzelnen Versuchen anlangt, so sind dieselben unmöglich den Temperaturunterschieden zuzuschreiben. Die Temperaturangaben beziehen

1) Nur die Versuche mit ungekochtem Wasser, mit Aether, Alkohol und Schwefelkohlenstoff sind genau nach den im zweiten Theile entwickelten Regeln berechnet; doch sind die Resultate der übrigen Versuche nur äusserst wenig von diesen verschieden, die wir durch die angeführte Berechnungsweise erhalten hatten.

sich zwar nicht auf die Flüssigkeit selbst; denn ein Thermometer innerhalb der Kugel anzubringen war weder thunlich, noch wäre dies zweckentsprechend gewesen, da sich ja die Versuche auf ein Gefäss von regelmässiger Form beziehen sollten; ich musste mich daher begnügen die Temperatur zu messen, die innerhalb des Kastens, in dem die Kugel eingeschlossen
525 war, herrschte. Es konnte daher die Temperatur des Wassers eine etwas verschiedene von der angegebenen sein; aber es konnte die Temperatur des Wassers nicht steigen, während die der Umgebung sank, wie dies bei den Versuchen IX und X mit lufthaltigem Wasser z. B. der Fall hätte sein müssen; diese Versuche liegen $^1/_2$ Stunde etwa auseinander, während welcher Zeit die Temperatur der Umgebungen 0,6° C. abnahm — (eine Temperaturerhöhung wie sie die Reibung hervorbringen kann, hatte sich während dieser halben Stunde wohl ausgleichen müssen) — denn Erhöhung der Temperatur bringt Abnahme des logarithmischen Decrementes mit sich — davon überzeugten mich meine Vorversuche.

Ich goss ein Fläschchen, wie ich diese bei den Versuchen gebrauchte, voll mit siedendem Wasser, und machte in unmittelbarer Aufeinanderfolge (innerhalb $^3/_4$ Stunden) drei Bestimmungen des logarithmischen Decrementes; ich fand dasselbe:

0,054 837 9
0,058 186 5
0,061 728 4.

Nach Beendigung des Versuches hatte das Wasser noch 45,6° C.; bei 12,1° C. war das logarithmische Decrement bei demselben Fläschen 0,069 077 6.

Die beobachteten Schwankungen glaube ich dem räthselhaften Einflusse der meteorologischen Verhältnisse, deren schon Gauss[1]) erwähnt, zuschreiben zu müssen.

Ferner untersuchte ich den Einfluss, den ein grösserer oder geringerer Gehalt des Wassers an gelösten festen Theilen ausübt; ich stellte mir eine gesättigte Kochsalzlösung dar, und nahm sie zu meinen Versuchen:

---

1) L. c. p. 70.

I. Die gesättigte Kochsalzlösung.

Specifisches Gewicht: 1,192 23.[1])

Das Resultat war:

	Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
	22,946 4	0,077 656 8	24,2
	22,964 4	0,073 329 2	24,6
	22,957 6	0,076 693 2	24,7
Mittel:	22,956 1	0,075 893 1.	

Darnach ergiebt sich: 626

$$\mathfrak{R} \cos \vartheta = 129{,}285 \quad \mathfrak{R} = 184{,}89 \quad \vartheta = 45^0\, 38' 0''.$$

II. Drei Theile gesättigter Kochsalzlösung und ein Theil Wasser.

Specifisches Gewicht: 1,131 47.

Das Resultat war:

	Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
	22,961 0	0,068 631 8	24,7
	22,983 2	0,062 933 6	24,6
	22,952 4	0,064 430 6	24,6
Mittel:	22,965 5	0,065 332 0.	

Darnach ergiebt sich:

$$\mathfrak{R} \cos \vartheta = 113{,}934 \quad \mathfrak{R} = 150{,}61 \quad \vartheta = 40^0\, 50' 33''.$$

III. Einen Theil gesättigter Kochsalzlösung und einen Theil Wasser.

Specifisches Gewicht: 1,097 01.

Das Resultat war:

	Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
	23,015 4	0,062 669 2	23,0
	23,000 4	0,063 161 8	23,2
	22,997 8	0,064 141 4	23,4
Mittel:	23,004 5	0,063 324 1.	

---

1) Die Bestimmungen des specifischen Gewichtes sind nicht genau gemacht; die Zahlen, welche ich für dasselbe anführe, sind die Quotienten aus dem Gewichte des Wassers in das Gewicht der anderen untersuchten Flüssigkeiten, welche die Kugel fasste. Die Füllung geschah fast immer bei derselben Temperatur, doch war die Wage, deren ich mich bediente wegen des grossen Gewichtes der Kugel, keine chemische.

Darnach ergiebt sich:

$$\mathfrak{K} \cos \vartheta = 105{,}769 \quad \mathfrak{K} = 138{,}93 \quad \vartheta = 40^0\, 25'\, 12''.$$

IV. Einen Theil gesättigter Kochsalzlösung und drei Theile Wasser.

Specifisches Gewicht: 1,051 29.

Das Resultat war:

	Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
	23,010 2	0,056 548 8	23,4
	23,000 7	0,056 541 1	23,5
	23,010 4	0,058 667 8	23,6
Mittel:	23,007 1	0,057 252 6.	

Darnach ergiebt sich:

$$\mathfrak{K} \cos \vartheta = 94{,}541 \quad \mathfrak{K} = 112{,}35 \quad \vartheta = 32^0\, 42'\, 8''.$$

627 Wir sehen also mit zunehmendem Salzgehalte die Schwingungsdauer sich vermindern, das logarithmische Decrement wachsen; Folgen davon sind Wachsen der Grösse $\mathfrak{K} \cos \vartheta$, ebenso Wachsen des Phasenunterschiedes, sowie von $\mathfrak{K}$; alles Erscheinungen, die a priori zu vermuthen waren.

Die angewandten Salzlösungen waren mit Luft in Berührung gelassen; die Resultate sind daher mit jenen, welche die Versuche mit nicht ausgekochtem Wasser ergaben, vergleichbar.

Ausser den Salzlösungen untersuchte ich noch sehr leicht bewegliche Flüssigkeiten und zwar reinen und wasserfreien:

Schwefelkohlenstoff.

Specifisches Gewicht: 1,262 70.

	Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
	22,689 6	0,040 927 6	21,8
	22,651 0	0,041 379 8	21,9
Mittel:	22,670 3	0,041 153 7.	

Darnach ergiebt sich:

$$\mathfrak{K} \cos \vartheta = 65{,}747 \quad \mathfrak{K} = 80{,}242 \quad \vartheta = 34^0\, 58'\, 43''.$$

Ferner reinen wasserfreien

Aether.

Specifisches Gewicht: 0,715 372.

Das Resultat war:

	Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
	23,450 0	0,029 301 4	21,5
	23,443 0	0,030 405 2	21,7
Mittel:	23,446 5	0,029 353 3	

Darnach ergiebt sich:

$$\mathfrak{R} \cos \vartheta = 42{,}696 \quad \mathfrak{R} = 60{,}284 \quad \vartheta = 44^0\,54'\,26''.$$

Endlich wenn nicht wasserfreien, so doch jedenfalls sehr concentrirten

Alkohol.

Specifisches Gewicht: 0,830 919.

Das Resultat war:

	Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
	23,439 2	0,058 025 4	24,2
	23,448 0	0,057 104 2	23,9
Mittel:	23,443 6	0,057 564 8.	

Darnach ergiebt sich: 628

$$\mathfrak{R} \cos \vartheta = 93{,}968 \quad \mathfrak{R} = 156{,}39 \quad \vartheta = 53^0\,4'\,4''.$$

Die Erhöhung der Schwingungsdauer, und beim Schwefelkohlenstoff die Erniedrigung des logarithmischen Decrementes sowie des Reibungscoëfficienten, lassen sich leicht begreifen.

Ferner untersuchte ich sehr schwer bewegliche Flüssigkeiten, und zwar:

Glycerin.

Specifisches Gewicht: 1,210 69.

Das Resultat war:

	Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
	23,469 8	0,036 662 2	24,8
	23,444 6	0,030 863 4	24,8
Mittel:	23,4572	0,033 762 8.	

Darnach ergiebt sich:

$$\mathfrak{R} \cos \vartheta = 49{,}955\,3 \quad \mathfrak{R} = 339{,}17 \quad \vartheta = 81^0\,31'\,49''.$$

Olivenöl.

Specifisches Gewicht: 0,907 258.

Das Resultat war:

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
23,905 2	0,022 443 8	23,1.

Darnach ergiebt sich:

$$\mathfrak{K} \cos \vartheta = 27{,}631\,6 \quad \mathfrak{K} = 313{,}58 \quad \vartheta = 84^0\,56'\,41''$$

Ferner einen überaus zähflüssigen

Zuckersyrup.

Specifisches Gewicht: 1,381 93.

Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
23,460 4	0,007 641 0	23,7.

Darnach ergiebt sich:

$$\mathfrak{K} \cos \vartheta = 2{,}627\,98 \quad \mathfrak{K} = 102{,}17 \quad \vartheta = 88^0\,31'\,34''.$$

629 Die Resultate, welche uns die dickflüssigen Substanzen liefern, sind sehr leicht zu begreifen; sie bewegen sich fast ganz mit dem Gefässe; daher ist der Reibungscoëfficient und das logarithmische Decrement klein: denn wenn auch die Reibung an derselben Fläche grösser sein muss, als bei den leichtflüssigen Substanzen, so ist die Fläche, an der sich die Flüssigkeit reibt, nur eine sehr kleine.

Ueberdies untersuchte ich den Einfluss, den feste in einer Flüssigkeit suspendirte Theilchen auf die Reibung üben; zu diesem Zwecke verdünnte ich Hühnereiweiss mit Wasser, filtrirte die Flüssigkeit und setzte Kalilösung hinzu. Ich fand für diese

Eiweisslösung.

Specifisches Gewicht: 1,016 24.

	Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
	23,218 2	0,073 728 4	23,0
	23,148 6	0,073 682 8	21,0
Mittel:	23,183 4	0,073 705 6.	

Woraus sich ergiebt:

$$\mathfrak{K} \cos \vartheta = 123{,}891 \quad \mathfrak{K} = 137{,}51 \quad \vartheta = 44^0\,18'\,17''.$$

Hierauf emulgirte ich Oel in dieser Eiweislösung, und fand nun für die so erhaltene

Emulsion.

Specifisches Gewicht (dieselbe als Ganzes betrachtet): 1,005 04.

	Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
	23,305 0	0,080 643 6	21,5
	23,309 4	0,076 971 2	21,6
	23,303 6	0,078 452 8	21,8
Mittel:	23,306 0	0,078 689 2.	

Darnach ist:

$$\mathfrak{K}\cos\vartheta = 132{,}270 \quad \mathfrak{K} = 216{,}03 \quad \vartheta = 52^0\,14'\,48''.$$

Wir sehen also, das durch die suspendirten festen Theilchen (Oeltröpfchen mit Haptogenmembranen), die Reibung vergrössert wurde.

Endlich untersuchte ich noch einige für den Physiologen 630
wichtige Substanzen. Ich will mich begnügen diese Untersuchungen einfach anzuführen.

Blutserum (vom Rind).

Specifisches Gewicht: 1,026 00.

	Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
	23,141 8	0,067 080 4	23,5
	23,155 6	0,071 388 0	23,6
	23,145 0	0,069 077 6	23,5
Mittel:	23,147 5	0,069 182 0.	

$$\mathfrak{K}\cos\vartheta = 115{,}802 \quad \mathfrak{K} = 159{,}83 \quad \vartheta = 43^0\,34'\,18''$$

Defibrinirtes Blut vom Rind.

Specifisches Gewicht: 1,052 89.

	Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
	23,288 0	0,101 780 8	24,0
	23,233 2	0,092 244 4	24,0
Mittel:	23,260 6	0,097 012 6.	

$$\mathfrak{K}\cos\vartheta = 166{,}031 \quad \mathfrak{K} = 248{,}86 \quad \vartheta = 48^0\,9'\,10''.$$

Milch.

Specifisches Gewicht: 1,026 56.

	Schwingungsdauer	Logarithmisches Decrement	Temperatur
	23,174 2	0,070 988 6	24,0
	23 145 8	0,064 940 0	24,0
Mittel:	23,160 0	0,067 964 3.	

$\mathfrak{K} \cos \vartheta = 113{,}499 \quad \mathfrak{K} = 162{,}35 \quad \vartheta = 45^0\,38'\,48''.$

Die gefundenen Constanten sind nur für mein kugelförmiges Gefäss, für Wandungen von Gold und mittlere Sommertemperatur gültig.

631

B. Theoretischer Theil.

Von H. Helmholtz.

§ 1. Die Bewegung im Innern einer schwingenden Kugel.

Die Bewegungsgleichungen für das Innere einer tropfbar flüssigen Masse, welche der Reibung unterworfen ist, wie sie von Poisson, Navier und Stokes gleichlautend aufgestellt worden sind, sind folgende:

Es seien x, y, z die rechtwinkeligen Coordinaten eines Punktes im Innern der bewegten Wassermasse, t die Zeit, u, v, w die den Coordinataxen parallelen Componenten der Geschwindigkeit des im Punkte x, y, z zur Zeit t befindlichen Wassers, p der Druck und h die constante Dichtigkeit, ferner dP/dx, dP/dy und dP/dz die den drei Coordinataxen parallelen Componenten der äusseren Kräfte, welche auf das Innere der Wassermasse wirken, wobei u, v, w, p und P als Functionen der unabhängigen Variablen x, y, z und t dargestellt sein, so ist:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dP}{dx} - \frac{1}{h}\frac{dp}{dx} &= \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz} - k^2\left[\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{du}{dz^2}\right]\\
\frac{dP}{dy} - \frac{1}{h}\frac{dp}{dy} &= \frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz} - k^2\left[\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right]\\
\frac{dP}{dz} - \frac{1}{h}\frac{dp}{dz} &= \frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz} - k^2\left[\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$0 = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Big\} (1a)$$

Die Grösse k^2 ist die **Reibungsconstante** für das Innere der Flüssigkeit, ihr Werth also nach der Natur der Flüssigkeit und ihrer Temperatur verschieden.

In unserem Falle der schwingenden Kugel können wir nun die Schwingungen so klein machen, dass die Glieder, welche die zweiten Dimensionen der Geschwindigkeit enthalten, gegen die erste Dimension verschwinden. Von äusseren Kräften wirkt auf das Innere unserer Wassermasse nur die Schwere, deren Richtung der z-Axe parallel sein mag, im Sinne der negativen z, so dass wir setzen:

$$\frac{dP}{dz} = -g, \qquad \frac{dP}{dy} = \frac{dP}{dx} = 0.$$ 632

Die Gleichungen (1) erhalten nun folgende vereinfachte Form:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{h}\frac{dp}{dx} &= \frac{du}{dt} - k^2\left[\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right] \cdots\cdots \\ -\frac{1}{h}\frac{dp}{dy} &= \frac{dv}{dt} - k^2\left[\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right] \cdots\cdots \\ -g - \frac{1}{h}\frac{dp}{dz} &= \frac{dw}{dt} - k^2\left[\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}\right] \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (1b).$$

Es sei ϱ die Entfernung vom Anfangspunkt der Coordinaten, also:

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

und ψ eine Function von ϱ und t, welche der Differentialgleichung genügt:

$$\frac{1}{k^2}\frac{d\psi}{dt} = \frac{d^2\psi}{d\varrho^2} + \frac{4}{\varrho}\frac{d\psi}{d\varrho} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

Dann lässt sich zeigen, dass nach Elimination von p aus den Gleichungen (1b), die hieraus resultirenden Gleichungen und (1a) erfüllt werden durch folgende particuläre Integralgleichungen:

$$u = -y\psi, \quad v = x\psi, \quad w = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2a).$$

Die Form der Bewegung, welche diesen Integralgleichungen entspricht, ist so zu beschreiben, wie sich aus den Gleichungen (2a) leicht ergiebt, dass die Wassermasse in concentrische Kugelschalen zerfällt, deren jede gleichsam wie eine feste Kugelschale drehende Bewegungen um die Z-Axe ausführt; ψ ist die Winkelgeschwindigkeit dieser Bewegung.

Aus (2a) folgt, dass:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{yx}{\varrho}\frac{d\psi}{d\varrho}$$
$$\frac{dv}{dy} = \frac{yx}{\varrho}\frac{d\psi}{d\varrho}$$
$$\frac{dw}{dz} = 0.$$

633 Daraus ergiebt sich, dass die Gleichung (1a) durch die Annahmen (2a) erfüllt ist.

Aus den Gleichungen (1b) eliminiren wir p, indem wir die erste nach y, die zweite nach x differentiiren, und die zweite von der ersten abziehen. Das giebt:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d}{dy}\left[\frac{du}{dt} - k^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2}\right)\right] - \\ \frac{d}{dx}\left[\frac{dv}{dt} - k^2\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{dv^2}{dz^2}\right)\right] = 0 \ldots\ldots\end{array}\right\} \quad (2b)$$

und ebenso eliminiren wir p aus der ersten und dritten der Gleichungen (1b), wobei wir aber gleich bemerken wollen, dass w in (2a) gleich Null gesetzt ist, also erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d}{dz}\left[\frac{du}{dt} - k^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right)\right] = 0 \ldots\ldots \\ \frac{d}{dz}\left[\frac{dv}{dt} - k^2\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right)\right] = 0 \ldots\ldots\end{array}\right\} \quad (2c).$$

Setzt man nun die Werthe von u und v aus (2a) in (2b), so erhält man zunächst, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} = \zeta = 2\psi + \frac{x^2+y^2}{\varrho}\frac{d\psi}{d\varrho}$$
$$\frac{d\zeta}{dt} - k^2\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} + \frac{d^2\zeta}{dz^2}\right) = 0,$$

oder:

$$\left.\begin{array}{l}2\left[\frac{d\psi}{dt} - k^2\left(\frac{d^2\psi}{d\varrho^2} + \frac{4}{\varrho}\frac{d\psi}{d\varrho}\right)\right] + \\ \frac{x^2+y^2}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}\left[\frac{d\psi}{dt} - k^2\left(\frac{d^2\psi}{d\varrho^2} + \frac{4}{\varrho}\frac{d\psi}{d\varrho}\right)\right] = 0 \ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} \quad (2e).$$

Die Gleichungen (2c) geben aber beide gemeinsam die Gleichung:

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{d\psi}{dt} - k^2\left(\frac{d^2\psi}{d\varrho^2} + \frac{4}{\varrho}\frac{d\psi}{d\varrho}\right)\right] = 0,$$

oder weil die hier zu differentiirende Function unmittelbar nur

von ϱ abhängt und $d\psi/dz = (z/\varrho)\,.\,(d\psi/d\varrho)$ ist, folgt, indem man den Factor z/ϱ weglässt:

$$\frac{d}{d\varrho}\left[\frac{d\psi}{dt} - k^2\left(\frac{d^2\psi}{d\varrho^2} + \frac{4}{\varrho}\frac{d\psi}{d\varrho}\right)\right] = 0 \;.\;.\;.\;.\;. \Big\} \qquad (2f)$$ 634

Mit Berücksichtigung von (2f) aber verwandelt sich die Gleichung (2e) in die Gleichung (2), nämlich:

$$\frac{d\psi}{dt} - k^2\left(\frac{d^2\psi}{d\varrho^2} + \frac{4}{\varrho}\frac{d\psi}{d\varrho}\right) = 0 \;.\;.\;.\;.\;. \Big\} \qquad (2)$$

und wenn diese erfüllt ist, ist wie man sieht, auch (2f) erfüllt, so dass also in der That die Gleichungen (2) und (2a) sich als Integralgleichungen der Gleichungen (1a) und (1b) erweisen.

Setzen wir $\psi = \varphi\, e^{at}$, wobei wir unter φ eine Function von ϱ allein verstehen, die von t unabhängig ist, so liefert die Gleichung (2) für φ folgende Differentialgleichung:

$$a\varphi - k^2\left(\frac{d^2\varphi}{d\varrho^2} + \frac{4}{\varrho}\frac{d\varphi}{d\varrho}\right) = 0 \;.\;.\;.\;.\;. \Big\} \qquad (3)$$

Die Gleichung (3) können wir durch zwei Reihen, die nach ganzen Potenzen von ϱ fortschreiten, nach den gewöhnlichen Regeln integriren:

$$\left.\begin{aligned}\varphi = A_0\Big\{1 &+ \frac{a\varrho^2}{k^2}\cdot\frac{1}{2\,.\,5} + \left(\frac{a\varrho^2}{k^2}\right)^2\frac{1}{2\,.\,4\,.\,5\,.\,7}\\ &+ \left(\frac{a\varrho^2}{k^2}\right)^3\frac{1}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,5\,.\,7\,.\,9}\text{ etc.} + \frac{B_0}{\varrho^3}\Big\{1 + \frac{a\varrho^2}{k^2}\cdot\frac{1}{(-1)\,.\,2}\\ &+ \left(\frac{a\varrho^2}{k^2}\right)^2\frac{1}{(-1)(+1)\,.\,2\,.\,4} + \left(\frac{a\varrho^2}{k^2}\right)^3\frac{1}{(-1)\,1\,.\,3\,.\,2\,.\,4\,.\,6}\text{ etc.}\Big\}\end{aligned}\right\} \qquad (3a)$$

Diese Reihen sind bequem, wenn φ für kleine Werthe der Grösse $a\varrho^2/k^2$ berechnet werden soll, für grössere Werthe derselben ist es vortheilhafter φ in folgender geschlossener Form auszudrücken. Man setze nämlich:

$$\varphi = \frac{1}{\varrho}\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{e^{n\varrho}}{\varrho}\right)$$

oder:

$$\varphi = \left(\frac{n}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho^3}\right)e^{n\varrho} \qquad (3b)$$

so ist:

$$\frac{d\varphi}{d\varrho} = \left(\frac{n^2}{\varrho^2} - \frac{3n}{\varrho^3} + \frac{3}{\varrho^4}\right)e^{n\varrho}$$ 635

$$\frac{d^2\varphi}{d\varrho^2} = \left(\frac{n^3}{\varrho^2} - \frac{5n^2}{\varrho^3} + \frac{12n}{\varrho^4} - \frac{12}{\varrho^5}\right)e^{n\varrho},$$

also:

$$a\varphi - k^2 \frac{d^2\varphi}{d\varrho^2} - \frac{4k^2}{\varrho}\frac{d\varphi}{d\varrho} = \left[\frac{an - k^2n^3}{\varrho^2} - \frac{a - k^2n^2}{\varrho^3}\right] e^{n\varrho}.$$

Setzen wir also in dem Ausdrucke (3b):

$$n = \pm \frac{1}{k}\sqrt{a},$$

so ist die Differentialgleichung (3) durch (3b) erfüllt, und sie wird auch erfüllt durch einen Ausdruck von der Form:

$$\varphi = A\left(\frac{\sqrt{a}}{k\varrho^2} - \frac{1}{\varrho^3}\right) e^{\frac{\sqrt{a}}{k}\varrho} + B\left(\frac{\sqrt{a}}{k\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^3}\right) e^{-\frac{\sqrt{a}}{k}\varrho}. \qquad (3c).$$

In unserem Falle der schwingenden Hohlkugel darf die Bewegung für $\varrho = 0$ nicht discontinuirlich werden. Dadurch bestimmt sich das Verhältniss der Constanten A und B zu einander in den beiden Ausdrücken für φ in (3a) und (3c). In (3a) wird nämlich die mit B_0 multiplicirte Reihe für $\varrho = 0$ unendlich, also muss $B_0 = 0$ sein, und der Ausdruck reducirt sich dann auf die erste Reihe. In (3c) müssen wir $B = +A$ setzen, wie man sieht, wenn man nach Potenzen von ϱ zu entwickeln anfängt, und wir haben also schliesslich für unseren Zweck folgende beiden einander gleichen Ausdrücke für φ:

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \frac{2n^3A}{3}\left\{1 + \frac{n^2\varrho^2}{2.5} + \frac{n^4\varrho^4}{2.4.5.7} + \frac{n^6\varrho^6}{2.4.6.5.7.9}\text{ etc.}\right\} = \\ &= A\frac{n}{\varrho^2}\left(e^{n\varrho} + e^{-n\varrho}\right) - \frac{A}{\varrho^3}\left(e^{n\varrho} - e^{-n\varrho}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (3d)$$

worin:

$$n = +\frac{1}{k}\sqrt{a}.$$

Der letztere Ausdruck führt unmittelbar zu folgendem Ausdrucke für ψ:

636 $$\psi = \varphi e^{at} = A\frac{n}{\varrho^2}\left(e^{n\varrho + at} + e^{-n\varrho + at}\right) - \frac{A}{\varrho^3}\left(e^{n\varrho + at} - e^{-n\varrho + at}\right) \qquad (4).$$

In den Fällen unserer Beobachtung ist nun ψ von der Form:

$$\psi = \varphi e^{-\beta t}\cos\gamma t,$$

wir müssen also der Grösse a in den bisherigen Ausdrücken den complexen Werth:

$$\left.\begin{aligned}a &= -\beta + i\gamma \\ i &= \sqrt{-1}\end{aligned}\right\} \qquad (4a)$$

beilegen, oder wenn wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} m &= \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} \\ -\frac{\gamma}{\beta} &= \operatorname{tang} 2\varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad (4\,b)$$

so ist:

$$\alpha = m \cos 2\varepsilon + i m \sin 2\varepsilon = m e^{2\varepsilon i},$$

wobei zu bemerken ist, dass der Winkel 2ε, weil seine Tangente negativ ist, grösser als ein Rechter sein muss. Der Winkel ε liegt also zwischen 45° und 90°.

Daraus folgt weiter:

$$n = \frac{1}{k}\sqrt{\alpha} = \frac{\sqrt{m}}{k} e^{\varepsilon i} = \frac{\sqrt{m}}{k}\left(\cos\varepsilon + i \sin\varepsilon\right).$$

Setzen wir:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{\sqrt{m}}{k} \sin\varepsilon \\ \tau &= \frac{\sqrt{m}}{k} \cos\varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad (4\,c)$$

also:

$$n = \tau + \sigma i$$

und führen die in (4a), (4b), (4c) angezeigten Substitutionen in den Werth von ψ ein, so wird:

$$\begin{aligned} \psi = {} & \frac{A\sqrt{m}}{k\varrho^2} e^{-\beta t}\left[e^{\tau\varrho + i(\sigma\varrho + \gamma t + \varepsilon)} + e^{-\tau\varrho + i(\gamma t - \sigma\varrho + \varepsilon)}\right] \\ & - \frac{A}{\varrho^3} e^{-\beta t}\left[e^{\tau\varrho + i(\gamma t + \varrho\sigma)} - e^{-\tau\varrho + i(\gamma t - \sigma\varrho)}\right] \end{aligned}$$

ψ ist eine complexe Grösse; ihr reeller, wie ihr imaginärer Theil für sich genommen, müssen der Differentialgleichung (2) genügen. Wir brauchen für unseren Zweck nur einen von beiden hier anzuwenden, und wollen den reellen nehmen. So wird endlich:

$$\psi = \frac{A\sqrt{m}}{k\varrho^2}\left[e^{\tau\varrho - \beta t}\cos(\sigma\varrho + \gamma t + \varepsilon) + e^{-\tau\varrho - \beta t}\cos(\sigma\varrho - \gamma t - \varepsilon)\right]$$ 637

$$\left.- \frac{A}{\varrho^3}\left[e^{\tau\varrho - \beta t}\cos(\sigma\varrho + \gamma t) - e^{-\tau\varrho - \beta t}\cos(\sigma\varrho - \gamma t)\right]\right\} \quad (4\,d).$$

Da ψ die Winkelgeschwindigkeit der schwingenden Wassertheilchen bezeichnet, so wird ihre Tangentialgeschwindigkeit $\psi\varrho . \sin\omega$ sein, unter ω den Winkel zwischen ϱ und der Rotationsaxe verstanden. Die Glieder, welche $\cos(\sigma\varrho + \gamma t)$ enthalten,

entsprechen einem Zuge von Wellen, welche von der Peripherie der Kugel gegen ihren Mittelpunkt laufen, und zwar mit schnell abnehmender Intensität, weil sie mit $e^{\tau\varrho}$ multiplicirt sind. Uebrigens führen dabei die Wassertheilchen Schwingungen aus, die gegen ihre Fortpflanzungsrichtung transversal sind, wie die Lichtschwingungen. Die Glieder, welche $\cos(\sigma\varrho - \gamma t)$ enthalten, entsprechen dagegen Wellen, welche vom Mittelpunkte gegen die Peripherie laufen, auch mit abnehmender Intensität, weil sie mit $e^{\tau\varrho}$ multiplicirt sind. Im Mittelpunkte selbst, werden zwar diese Glieder scheinbar unendlich gross, weil sie mit negativen Potenzen von ϱ multiplicirt sind, in Wahrheit aber heben sich die unendlich werdenden Glieder hier gegenseitig auf, wie man sieht, wenn man sich die andere Form von φ in (3d), wo es nach ganzen Potenzen von ϱ entwickelt ist, in derselben Weise zurecht macht:

$$\psi = \frac{2m\sqrt{m}}{3k^3} A e^{-\beta t} \left\{ \cos(3\varepsilon + \gamma t) + \frac{m\varrho^2}{k^2} \cdot \frac{\cos(5\varepsilon + \gamma t)}{2.5} + \frac{m^2\varrho^4}{k^4} \cdot \frac{\cos(7\varepsilon + \gamma t)}{2.4.\quad 5.7} + \text{etc.} \right\} \tag{4e}$$

638 Da wir vorausgesetzt haben, dass keine Kräfte ausser der Schwere auf das Innere der Wassermasse wirken, und in ihrem Innern alle Werthe der Geschwindigkeit endlich und continuirlich ausfallen, so können die Kräfte, welche sie in Bewegung setzen, nur auf die äusserste Schicht wirken. Diese ist bei unseren Versuchen in der That mit dem Gefässe in Berührung, und wird von diesem durch Reibung bewegt. Wir können uns also die ganze Bewegung so vorstellen, dass von dieser Oberfläche aus Rotationswellen nach innen laufen, aber mit schnell abnehmender Intensität, und im Mittelpunkte reflectirt wieder zurückkehren. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Wellen ist gleich $\gamma/\sigma = 2\sqrt{m}\cos\varepsilon$, oder wenn wir die Schwingungen der Oberfläche constante Amplitude behalten lassen, also $\beta = 0$ setzen, und $T = 2\pi/\gamma = 2\pi/m$ die Schwingungsdauer nennen:

$$\frac{\gamma}{\sigma} = k\sqrt{2m} = 2k\sqrt{\frac{\pi}{T}}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist also von der Schwingungsdauer abhängig. Die Wellenlänge ist $2k\sqrt{\pi T}$, also nicht

wie bei den Schall- und Lichtwellen der Schwingungsdauer selbst, sondern ihrer Quadratwurzel proportional. Während die Welle eine Wellenlänge durchläuft, wird ihre Amplitude von 1 auf $e^{-\pi}$, d. h. von 1 auf $\frac{1}{535}$ verkleinert. Beispielsweise beträgt sie in den Versuchen von **Piotrowski** mit Wasser etwa 16 mm bei einer Schwingungsdauer von 23 Secunden. Daraus geht hervor, wie schnell sich die Bewegung in kleiner Entfernung von der Oberfläche bis zum Verschwinden schwächt. Je grösser dagegen der Reibungscoëfficient ist, desto grösser ist die Wellenlänge, und auf desto grössere Strecken pflanzt sich daher auch die Bewegung in der Flüssigkeit merklich fort.

§ 2. Bedingungen für die Oberfläche der Flüssigkeit.

Aus den theoretischen Betrachtungen der genannten Mathematiker folgt, dass die Componenten X, Y, Z der Kraft, mit welcher die bewegte Flüssigkeit auf eine oberflächliche Schicht wirkt, wenn α, β, γ die Winkel sind, welche die nach der 630
Flüssigkeit hin gerichtete Normale der Oberfläche mit den positiven Coordinataxen bildet, folgende Werthe für die Einheit der Fläche haben:

$$X = hk^2\left[2\frac{du}{dx}\cos\alpha + \left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)\cos\beta + \left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right)\cos\gamma\right]$$

$$Y = hk^2\left[\left(\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}\right)\cos\alpha + 2\frac{dv}{dy}\cos\beta + \left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)\cos\gamma\right]$$

$$Z = hk^2\left[\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)\cos\alpha + \left(\frac{dw}{dy}+\frac{dv}{dz}\right)\cos\beta + 2\frac{dw}{dz}\cos\gamma\right] \quad (5).$$

An der Kugeloberfläche ist:

$$\cos\alpha = \frac{-x}{\varrho}, \quad \cos\beta = \frac{-y}{\varrho}, \quad \cos\gamma = \frac{-z}{\varrho};$$

daraus ergiebt sich, wenn man die Werthe von u, v, w aus (2a) hier einsetzt:

$$\left.\begin{aligned} X &= hk^2 y\frac{d\psi}{d\varrho} \\ Y &= -hk^2 x\frac{d\psi}{d\varrho} \\ Z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (5a)$$

Diese Kraft wirkt also in Richtung der Rotationsbewegung der Oberfläche mit der Intensität:

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = -hk^2 \frac{d\psi}{d\varrho} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dieser Kraft, welche das bewegte Wasser auf seine äusserste Schicht ausübt, muss nun das Gleichgewicht gehalten werden durch die Kraft, welche die Gefässwand auf die äusserste Wasserschicht ausübt. Wenn wir die Componenten der Geschwindigkeit der Gefässwand mit U, V, W bezeichnen, so ist der theoretische Ausdruck für die Componenten der Kraft, welche von der Wand auf die äusserste Wasserschicht ausgeübt werden, und die mit $-X$, $-Y$ bezeichnet werden können, da sie den Kräften der Gleichungen (5) und (5a) das Gleichgewicht halten müssen:

$$-X = \frac{hk^2}{\lambda}(U - u)$$

640 $$-Y = \frac{hk^2}{\lambda}(V - v) \qquad (5b)$$

$$-Z = \frac{hk^2}{\lambda}(W - w)$$

worin λ eine von der Natur der Flüssigkeit und des Gefässes abhängige Constante bezeichnet.

Setzen wir die Rotationsgeschwindigkeit des Gefässes in unserem Falle gleich Ψ, und demgemäss:

$$U = -y\,\Psi, \qquad V = x\,\Psi, \qquad W = 0,$$

so wird:

$$\begin{aligned} X &= hk^2 y \frac{d\psi}{d\varrho} = \frac{hk^2}{\lambda} y (\Psi - \psi), \\ -Y &= hk^2 x \frac{d\psi}{d\varrho} = \frac{hk^2}{\lambda} x (\Psi - \psi), \\ Z &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass sein muss:

$$\lambda \frac{d\psi}{d\varrho} = (\Psi - \psi) \ldots\ldots \Big\} \qquad (5d)$$

als Grenzbedingung für die Oberfläche der Flüssigkeit. Diese Gleichung bezeichnet zugleich den Sinn der Constante λ. Sie ist eine Länge, welche angiebt, in welcher Entfernung jenseits der Wand die Bewegung des Wassers der der Wand gleich

sein würde, wenn $d\psi/d\varrho$ constant bliebe, wie man sieht, wenn man schreibt:

$$\Psi = \psi + \lambda \frac{d\psi}{d\varrho}.$$

Eine zweite Grenzbedingung, die im allgemeinen aufgestellt werden muss, dass die Bewegung der oberflächlichsten Flüssigkeitstheile sich der Bewegung der Oberfläche anpasse, ist in unserem Falle jedenfalls erfüllt, da alle Theilchen der Flüssigkeit wie der Wand concentrische Kreisbahnen beschreiben.

Um die Gleichung (5d) zu erfüllen, berechnen wir den 641
Werth von $d\psi/d\varrho$, welcher ist:

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{d\varrho} &= \frac{Am}{k^2\varrho^2} e^{-\beta t}[e^{\tau\varrho}\cos(\sigma\varrho + \gamma t + 2\varepsilon) - e^{-\tau\varrho}\cos(\sigma\varrho - \gamma t - 2\varepsilon)] \\ &- \frac{3A\sqrt{m}}{k\varrho^3} e^{-\beta t}[e^{\tau\varrho}\cos(\sigma\varrho + \gamma t + \varepsilon) + e^{-\tau\varrho}\cos(\sigma\varrho - \gamma t - \varepsilon)] \\ &+ \frac{3A}{\varrho^4} e^{-\beta t}[e^{\tau\varrho}\cos(\sigma\varrho + \gamma t) - e^{-\tau\varrho}\cos(\sigma\varrho - \gamma t)] \dots\dots\Big\} \quad (6)\end{aligned}$$

oder zur Berechnung für kleine Werthe von $\sigma\varrho$:

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{d\varrho} = \frac{2m^2}{15k^4} A e^{-\beta t}\Big\{\frac{\sqrt{m\varrho}}{k}\cos(5\varepsilon + \gamma t) + \left(\frac{\sqrt{m\varrho}}{k}\right)^3 \frac{\cos(7\varepsilon + \gamma t)}{2.} \\ + \left(\frac{\sqrt{m\varrho}}{k}\right)^5 \frac{\cos(9\varepsilon + \gamma t)}{2.4.7.9} \text{ etc.} \dots\dots\Big\} \quad (6\text{a}).\end{aligned}$$

Der Kürze wegen wollen wir uns den Werth von ψ für die Oberfläche der Flüssigkeit aus (4d) genommen, geschrieben denken:

$$\psi = Ce^{-\beta t}\cos(\sigma R + \gamma t + \varepsilon + \delta) \dots\dots\Big\} \quad (6\text{e})$$

und den von $d\psi/d\varrho$ in (6) und (6a):

$$\frac{d\psi}{d\varrho} = C_1 e^{-\beta t}\cos(\sigma R + \gamma t + 2\varepsilon + \delta_1) \dots\dots\Big\} \quad (6\text{f})$$

wo C, C_1, δ und δ_1 Functionen von R sind, welches der Werth von ϱ an der Oberfläche der Kugel sei.

Die Grenzbedingung (5d) erfordert also, dass die Rotationsgeschwindigkeit des Gefässes folgende sei:

$$\Psi = Ce^{-\beta t}\cos(\sigma R + \gamma t + \varepsilon + \delta) + \lambda C_1 e^{-\beta t}\cos(\sigma R + \gamma t + 2\varepsilon + \delta_1),$$

oder:

$$\begin{aligned}e^{\beta t}\Psi = [C + \lambda C_1\cos(\varepsilon + \delta_1 - \delta)]\cos(\sigma R + \gamma t + \varepsilon + \delta) \\ - \lambda C_1 \sin(\varepsilon + \delta_1 - \delta)\sin(\sigma R + \gamma t + \varepsilon + \delta_1) \dots\dots\Big\} \quad (6\text{b})\end{aligned}$$

oder wenn wir setzen der Kürze wegen:

642
$$\left.\begin{aligned} B^2 &= C^2 + 2\lambda C C_1 \cos(\varepsilon + \delta_1 - \delta) + \lambda^2 C_1{}^2 \\ \operatorname{tang} \eta &= \frac{\lambda C_1 \sin(\varepsilon + \delta_1 - \delta)}{C + \lambda C_1 \cos(\varepsilon + \delta_1 - \delta)} \end{aligned}\right\} \qquad (6c)$$

woraus folgt:

$$B = \frac{C \sin(\varepsilon + \delta_1 - \delta)}{\sin(\varepsilon + \delta_1 - \delta - \eta)},$$

so wird:

$$\Psi = B e^{-\beta t}(\sigma R + \gamma t + \varepsilon + \delta + \eta)\} \qquad (6d)$$

Hat also die Bewegung des Gefässes den letzteren Werth, so ist die Bewegung des Wassers in demselben durch die Gleichungen (2a) und (4d) vollständig gegeben, und es sind alle Bedingungen der Aufgabe, so weit sie die Bewegung des Wassers betreffen, erfüllt.

§ 3. Bewegung des Gefässes.

Wir müssen uns schliesslich überzeugen, ob die in der Gleichung (6d) vorgeschriebene Bewegung des Gefässes den Bedingungen von Piotrowski's Versuchen genügt.

Die Kräfte, welche auf das Gefäss wirken, sind erstens die durch seine Aufhängung bedingten richtenden Kräfte. Wenn wir den Ablenkungswinkel des Gefässes von der Gleichgewichtslage mit Ω bezeichnen, sei das Moment dieser Kräfte $-f^2\,\Omega$, wo also nach den oben von Piotrowski angewendeten Bezeichnungen:

$$f^2 = a(G + g) + \frac{2b}{L};$$

ausserdem wirkt die Kraft der Reibung, und zwar des Wassers, deren Drehungsmoment wir P nennen wollen, und die der Luft, welche P_1 sei.

Ist also M das Trägheitsmoment des Gefässes mit dem daran befestigten Spiegel und der mitschwingenden Luft zusammengenommen, so ist:

$$M \frac{d^2\Omega}{dt^2} = -f^2\,\Omega + P + P_1 \;\ldots\;\} \qquad (7)$$

643 Bestimmen wir jetzt das Drehungsmoment P der Wasserreibung.

Die Kräfte, welche vom Wasser auf das Gefäss wirken, sind gleich den oben gefundenen Werthen der Kräfte, welche die bewegte Wassermasse auf ihre äusserste Schicht ausübt (Gleichung 5c). Es ist also, wenn do das Element der Oberfläche bezeichnet:

$$P = -\int (Xy - Yx)\, do = -hk^2 \int (x^2 + y^2) \frac{d\psi}{d\varrho}\, do.$$

Wenn wir ω den Winkel nennen, den ϱ mit der z-Axe bildet, ist:

$$x^2 + y^2 = R^2 \sin^2 \omega, \qquad do = 2\pi R^2 \sin \omega\, d\omega$$

$$P = -2\pi hk^2 R^4 \frac{d\psi}{d\varrho} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \omega d\omega = -\frac{8}{3} \pi hk^2 R^4 \frac{d\psi}{d\varrho} \ldots . \Big\} \quad (7\,a)$$

oder wenn gesetzt wird:

$$\frac{8}{3} \pi hk^2 R^4 C_1 = K,$$

$$P = -Ke^{-\beta t} \cos(\sigma R + \gamma t + 2\varepsilon + \delta_1) \ldots . \Big\} \quad (7\,b)$$

Was den Widerstand der Luft betrifft, so zerfällt er in zwei Theile. Der eine Theil, welcher von Bewegung der Luft herrührt, so weit sie auch ohne Reibung der Oberfläche des schwingenden Apparates eintreten würde, ist unabhängig von der Schwingungsdauer, und hat, wie Bessel gezeigt hat, nur denselben Einfluss, welchen eine Vermehrung des Trägheitsmomentes haben würde. Da übrigens in unseren Versuchen das Trägheitsmoment durch die Schwingungsdauer bestimmt ist, so enthält es schon das der mitschwingenden Luft in sich. Dann aber wirkt die Luft durch ihre Reibung an der äusseren Fläche des Apparates in derselben Weise, wie das Wasser an der inneren Fläche, und bringt dadurch einen zweiten Theil des Widerstandes hervor, der, wie Stokes für schwingende Pendel gezeigt hat, von der Schwingungsdauer abhängig ist, und ebenso in Form einer periodischen Kraft erscheint, wie 644
die Wasserreibung, sodass wir setzen können:

$$P_1 = K_1 e^{-\beta t} \cos(\sigma R + \gamma t + 2\varepsilon + \delta_{,,}) \ldots . \Big\} \quad (7\,c)$$

Die Grösse Ω endlich in der Gleichung 7 ist dadurch gegeben, dass:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \Psi = Be^{-\beta t}\cos(\sigma R + \gamma t + \varepsilon + \delta + \eta)$$

ist, daraus folgt:

$$\Omega = \frac{1}{m} Be^{-\beta t}\cos(\sigma R + \gamma t - \varepsilon + \delta + \eta) \ldots . \quad (7\,d)$$

und:

$$\frac{d^2\Omega}{dt^2} = mBe^{-\beta t}\cos(\sigma R + \gamma t + 3\varepsilon + \delta + \eta) \ldots . \quad (7\,e).$$

Wenn man nun aus (7 b), (7c), (7 d) und (7e) die Werthe in (7) einträgt, und gleichzeitig die einzelnen Glieder zerlegt in solche, welche mit cos $(\sigma\varrho + \gamma\tau - \varepsilon + \delta + \eta)$ multiplicirt sind, und solche, welche mit dem Sinus desselben Winkels multiplicirt sind, so hat man einzeln die mit dem Cosinus multiplicirten Glieder gleich Null zu setzen, und ebenso die mit dem Sinus multiplicirten, und erhält folgende zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} MmB\cos 4\varepsilon + f^2\frac{1}{m}B &= -K\cos(3\varepsilon + \delta_1 - \eta - \delta) - \\ &\quad - K_{,}\cos(3\varepsilon + \delta_{,,} - \delta) \\ MmB\sin 4\varepsilon &= -K\sin(3\varepsilon + \delta_1 - \eta - \delta) - \\ &\quad - K_{,}\sin(3\varepsilon + \delta_{,,} - \delta) \end{aligned}\right\} (8)$$

Durch diese beiden Gleichungen werden schliesslich die Werthe von m und ε, oder die davon abhängigen von β und γ (Gleichungen 4b) bestimmt. Von letzteren hängt die Grösse der Schwingungsabnahme und Schwingungsdauer ab. Uebrigens ist zu bemerken, dass die Gleichungen (8), wenn sie nach m und ε aufgelöst werden sollen, ausserordentlich verwickelt sind, da das Verhältniss $K_{,}/B$ und $K_{,,}/B$, ebenso die Winkel δ, $\delta_{,,}$ $\delta_{,,}$ und η wieder von ε und m und zwar meist durch transcendente Gleichungen abhängen.

645 Damit ist denn vollständig erwiesen, dass das in den Gleichungen (2a) und (4d) hingestellte particuläre Integral der hydrodynamischen Gleichungen (1) und (1a) bei passender Bestimmung der constanten Grössen allen Bedingungen unserer Aufgabe genügt.

§ 4. Berechnung der Versuche.

Bei den Versuchen ist uns ausser dem Drehungsmomente f^2 das logarithmische Decrement des Schwingungsbogens Δ und die Schwingungsdauer T gegeben. Wenn Ω_0 und Ω_1 zwei aufeinander folgende Maxima der Ablenkung nach derselben Seite hin sind, so ist:

$$\Omega_1 = \Omega_0 e^{\beta T}$$

und wenn man auf beiden Seiten die natürlichen Logarithmen nimmt:

$$\Delta = \log.\text{nat}.\Omega_0 - \log.\text{nat}.\Omega_1 = \beta T,$$

also:

$$\beta = \frac{\Delta}{T} \dots \Big\} \qquad (9).$$

Da in dem Ausdrucke für Ω unter dem Cosinuszeichen t mit γ multiplicirt ist, so ist:

$$\gamma = \frac{2\pi}{T} \dots \Big\} \qquad (9a).$$

Dadurch ist weiter gegeben mittelst der Gleichungen (4b):

$$m = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$$

$$\text{tang}\, 2\varepsilon = -\frac{\beta}{\gamma}.$$

Es ist 2ε ein Winkel zwischen 90^0 und 180^0, weil seine Tangente negativ ist.

Aus diesen müssen nun mittels der Gleichungen (8) die Reibungsconstanten k und λ berechnet werden. Da die hierin vorkommende Grösse M selbst nur aus Schwingungsversuchen mit Luftreibung genommen ist, können wir zu ihrer Elimination noch zwei ähnliche Gleichungen hinzunehmen, die sich auf die 646 Versuche mit der leeren Kugel beziehen.

Diese Rechnung ist nun ziemlich complicirt wegen der transcendenten Gleichungen, welche den Werth von ψ und $d\psi/d\varrho$ ausdrücken.

Man bringe zunächst die Gleichungen (8), indem man die unter (6c) angegebenen Werthe von B berücksichtigt, und $K_{,} = K_{,,} B\sqrt{m}$ setzt, in folgende Form:

$$\left.\begin{aligned}-\frac{K}{C}\,\frac{\cos(3\varepsilon+\delta_1-\eta-\delta)\sin(\varepsilon+\delta_1-\eta-\delta)}{\sin(\varepsilon+\delta_1-\delta)} &= Mm\cos 4\varepsilon+\frac{1}{m}f^2\\ &\quad+K_{\prime\prime}\sqrt{m}\,(\cos 3\varepsilon+\delta_{\prime\prime}-\delta)\\ -\frac{K}{C}\,\frac{\sin(3\varepsilon+\delta_1-\eta-\delta)\sin(\varepsilon+\delta_1-\eta-\delta)}{\sin(\varepsilon+\delta_1-\delta)} &= Mm\sin 4\varepsilon\\ &\quad+K_{\prime\prime}\sqrt{m}\,\sin(3\varepsilon+\delta_{\prime\prime}-\delta)\end{aligned}\right\}(9\,b)$$

Auf der rechten Seite sind nun noch näher die von der Luftreibung herrührenden mit $K_{\prime\prime}$ multiplicirten Ausdrücke zu bestimmen. In solchen Räumen, gegen deren Dimensionen die Wellenlänge der vorhandenen Luftschwingungen sehr gross ist, unterscheiden sich die Bewegungen der Luft nicht von denen einer incompressiblen Flüssigkeit. Die Luftreibung wird also im Innern der Kugel auf die schwingende Kugel einen ganz ähnlichen Einfluss haben, wie die Bewegung der eingeschlossenen Flüssigkeiten. Da übrigens ihr Einfluss sehr klein ist, und nur eine Correction für die Werthe der Wasserreibung bildet, so wird es genügen, wenn wir das grösste Glied ihres Einflusses allein berücksichtigen, indem wir $1/\sigma\varrho$, welches für die beweglichen Flüssigkeiten eine kleine Grösse ist, auch für die Luftreibung als eine solche annehmen. Dann reducirt sich in den Versuchen mit leerer Kugel der Werth von ψ an der inneren Oberfläche auf:

$$\left.\begin{aligned}\psi &= \frac{A\sqrt{m}}{kR^2}\,e^{-\beta t+\tau R}\cos(\sigma R+\gamma t+\varepsilon)\\ \frac{d\psi}{d\varrho} &= \frac{Am}{k^2R^2}\,e^{-\beta t+\tau R}\cos(\sigma R+\gamma t+\varepsilon)\end{aligned}\right\}(9\,c)$$

Da wir nun weiter für diesen Fall gesetzt haben:

$$\psi = Ce^{-\beta t}\cos(\sigma R+\gamma t+\varepsilon+\delta)$$

$$\frac{d\psi}{d\varrho} = C_1e^{-\beta t}\cos(\sigma R+\gamma t+2\varepsilon+\delta_1)$$

647 so wird in diesem Falle $\delta=\delta_1=0$ und:

$$C_1=\frac{\sqrt{m}}{k}\,C.$$

Für die Luftreibung ist nun weiter die Constante λ der Oberflächenreibung nach den Untersuchungen von Stokes über den Luftwiderstand bei Pendelschwingungen gleich Null zu

setzen. Wenn diese gleich Null ist, wird auch $\eta = 0$ und $B = C$ und man erhält aus (7a):

$$K_1 = \frac{8}{3} \pi h k \sqrt{m} R^4 B.$$

Es findet sich also für diese Reibung das Verhältniss K_1/B der Grösse $\sqrt{m}$ proportional, und nicht proportional m, wie es sein würde, wenn man, wie gewöhnlich bisher geschehen ist, die Reibung einfach der Winkelgeschwindigkeit proportional setzen würde. Die Constante $K_{,,}$ welche wir gleich $K_{,}/B\sqrt{m}$ gesetzt haben, wird also unabhängig von der Schwingungsdauer. Dieselbe Annahme wird nun für die Luftreibung im allgemeinen zu machen sein, denn sie bestätigt sich sowohl, wenn man aus den Gleichungen (3b) sich das zweite Integral für die Reibung an der äusseren Fläche der Kugel herleitet, als auch in den von Stokes ausgeführten Untersuchungen über die Luftreibung an Pendeln, sobald wie in unserem Falle die Dimensionen des schwingenden Körpers und seines Gehäuses gross gegen die Wellenlänge der bei der Reibung entstehenden transversalen Wellen sind. Der von der Reibung der Luft unabhängige Theil des Luftwiderstandes erscheint, wie schon bemerkt wurde, nur als eine Vergrösserung des Trägheitsmomentes.

Die Constante $K_{,,}$ müssen wir aus den Schwingungsversuchen an der leeren Kugel bestimmen. Es werden für diese Versuche die Gleichungen (8), indem wir den Winkel $\delta_{,,}$, der dem $\delta_1 - \eta$ bei der Wasserreibung entspricht, gleich Null setzen:

$$\begin{aligned} M m_0^2 \cos(4\varepsilon_0) + f_0^2 &= - K_{,,} m_0 \sqrt{m_0} \cos(3\varepsilon_0) \\ M m_0 \sin 4\varepsilon_0 &= - K_{,,} \sqrt{m_0} \sin(3\varepsilon_0). \end{aligned}$$

Es sind hier die Grössen, deren Werth bei den Schwingungen der gefüllten Kugel ein anderer ist, durch den Index o unterschieden. Aus diesen Gleichungen ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} M m_0^2 \sin \varepsilon_0 &= f_0^2 \sin(3\varepsilon_0) \\ K_{,,} m_0 \sqrt{m_0} \sin \varepsilon_0 &= f_0^2 \sin(4\varepsilon_0) \end{aligned}\right\} \qquad (9d).$$ 648

Aus diesen beiden Gleichungen sind die Grössen M und $K_{,,}$ zu finden, und ist in (9b) ebenfalls der Winkel $d_{,,}$ zu vernachlässigen.

Bezeichnen wir nun der Abkürzung wegen die bekannten auf der rechten Seite der Gleichung (9b) stehenden Grössen durch besondere Buchstaben, setzen also:

$$F_{,} = \frac{3}{8\pi h R^4}\left\{ Mm\cos 4\varepsilon + \frac{1}{m} f^2 + K_{,,}\sqrt{m}\cos 3\varepsilon \right\}$$

$$F_{,,} = \frac{3}{8\pi h R^4}\left\{ Mm\sin 4\varepsilon + K_{,,}\sqrt{m}\sin 3\varepsilon \right\},$$

so ist:

$$\left. \begin{aligned} -k^2\frac{C_1}{C}\frac{\cos(3\varepsilon+\delta_1-\eta-\delta)\sin(\varepsilon+\delta_1-\eta-\delta)}{\sin(\varepsilon+\delta_1-\delta)} &= F_{,} \\ -k^2\frac{C_1}{C}\frac{\sin(3\varepsilon+\delta_1-\eta-\delta)\sin(\varepsilon+\delta_1-\eta-\delta)}{\sin(\varepsilon+\delta_1-\delta)} &= F_{,,} \end{aligned} \right\} \quad (9\text{e}).$$

Hierbei ist zu bemerken, dass der Werth von $F_{,,}$ aus den Versuchen mit ziemlicher Genauigkeit zu finden ist, da er hauptsächlich von m und ε, d. h. den ganzen Werthen der Schwingungsdauer und des logarithmischen Decrements abhängt, und beide sehr genau bestimmt werden konnten.

In dem Ausdrucke, welcher $F_{,,}$ gleichgesetzt ist in (9e), hat der Winkel η einen verhältnissmässig geringen Einfluss, weil 2ε nahehin gleich einem Rechten ist, und daher nahehin:

$$\sin(3\varepsilon+\delta_1-\eta-\delta)\sin(\varepsilon+\delta_1-\eta-\delta)$$
$$= \frac{1}{2}\sin 2(\varepsilon+\delta_1-\eta-\delta).$$

Wenn nun aber die Winkel δ_1 δ und η klein sind, wie es bei beweglichen Flüssigkeiten mit den beiden ersten wenigstens der Fall ist, so ist der doppelte Winkel rechts nahehin gleich einem Rechten, und der Sinus eines solchen Winkels ist immer wenig von Eins unterschieden.

Somit verschwindet der Einfluss des Winkels η fast ganz aus dieser Gleichung, und man hat Gelegenheit aus ihr die innere Reibungsconstante ziemlich genau zu finden, selbst wenn der Werth η ungenau gefunden worden wäre, vorausgesetzt nur, dass η klein bleibe.

649 Dagegen hängt der Werth von $F_{,}$ ab von den ziemlich kleinen Unterschieden der Schwingungsdauer. Nämlich wenn man die Luftreibung vernachlässigt, und ε gleich 45^0 annimmt, ist:

$$F_1 = \frac{3}{8\pi h R^4}\frac{M}{m}\left\{\frac{f^2}{M} - m^2\right\}.$$

Nun ist aber f^2/M gleich dem Werthe von m^2, welcher ohne Wasserreibung eintreten würde, und der aus der Schwingungsdauer der leeren Kugel berechnet werden muss. Es haben hier Unterschiede in den Hunderttheilen der Secunde bei Bestimmung der beiden Schwingungsdauern schon einen sehr namhaften Einfluss auf die Grösse der Differenz, welche selbst nur wenige Zehntel beträgt, sodass $F_{,}$ und damit der Werth von η ziemlich unsicher wird.

Nach diesen Vorbereitungen schreiten wir zur Auflösung der Gleichungen (9e). Wir finden zunächst:

$$\operatorname{tang}\,(3\varepsilon + \delta_1 - \eta - \delta) = \frac{F_{,,}}{F_{,}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9\text{f}),$$

können daraus die Sinus und Cosinus desselben Winkels, und des um 2ε verminderten Winkels finden, und erhalten somit einen Werth J des Ausdruckes:

$$\frac{k^2 C_1}{C \sin\,(\varepsilon + \delta_1 - \delta)} = J \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10),$$

welche Gleichung nur noch k als Unbekannte enthält.

Wenn $\sigma R = (\sqrt{m}/k) . \sin \varepsilon R$ sehr gross ist, ist, wie wir gesehen in (9c):

$$\delta_1 = \delta = 0, \qquad C_1 = \frac{\sqrt{m}}{k}\, C,$$

also:

$$k\sqrt{m} = J \sin \varepsilon,$$

woraus ein erster angenäherter Werth für k erhalten werden kann, der dann dazu dient, C'/C, δ' und δ zu berechnen, um dann durch Gleichung (10) einen neuen genaueren Werth von k zu erhalten, und so fort, bis eine genügende Uebereinstimmung erreicht ist. Zur logarithmischen Rechnung dient folgendes System von Formeln, wenn k' den ungenaueren, k'' den genaueren Werth von k bezeichnet:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tang} \delta &= \frac{\frac{k_1}{\sqrt{m}} \sin \varepsilon}{1 - \frac{k_1}{\sqrt{m}} \cos \varepsilon} \\
\operatorname{tang}\,(\varepsilon + \delta_1 - \delta &= \frac{(\operatorname{tang} \varepsilon - \delta)}{1 - \frac{3 \sin \delta \sin \varepsilon}{\cos\,(\varepsilon - \delta) \sin^2 (\varepsilon + \delta)}} \\
k_{,,} &= J \frac{\sin \varepsilon \,.\, \sin^2 (\varepsilon + \delta_1 - \delta)}{\sqrt{m} \sin\,(\varepsilon - \delta) \sin\,(\varepsilon + \delta)}
\end{aligned}\right\} \quad (10\text{a}).$$ 650

Diese Formeln sind berechnet aus den Gleichungen (4d), (6) und (10) mit Berücksichtigung der in (6e) und (6f) eingeführten Bezeichnungen. Doch sind in (4d) und (6) die mit $e^{-\tau R}$ multiplicirten Glieder weggelassen, da diese bei den beweglicheren Flüssigkeiten an der Peripherie der Kugel verschwindend klein werden. Hat man endlich einen Werth von k gefunden, der beim Durchrechnen der Gleichungen (10a) kein davon verschiedenes $k_{,,}$ mehr liefert, so erhält man λ, den Gleitungscoëfficienten, aus (6e):

$$\lambda = \frac{k^2 \sin \eta}{J \sin(\varepsilon + \delta_1 - \delta - \eta) \sin(\varepsilon + \delta_1 - \delta)} \cdots\cdots \Big\} \quad (10b).$$

Der Winkel η wird aus dem in (9f) bei der Berechnung von J gefundenen Winkel $(3\varepsilon + \delta' - \eta - \delta)$ hergeleitet.

Bei den beweglicheren Flüssigkeiten kommt man mit zwei- bis dreimaliger Durchrechnung der Gleichungen (10a) zum Ziele. Je grösser aber der Reibungscoëfficient k ist, desto weitläufiger wird die Rechnung. Für sehr steife Flüssigkeiten würde man auch nicht mehr die mit $e^{-\tau\varrho}$ multiplicirten Glieder im Werthe von ψ und $d\psi/d\varrho$ vernachlässigen dürfen. Dann würde es vortheilhafter sein, die nach Potenzen von ϱ entwickelten Ausdrücke beider Grössen zu benutzen.

§ 5. Vergleichung mit älteren Versuchen.

Es ist von vielen Seiten die Ansicht aufgestellt worden, dass die äusserste Schicht der Flüssigkeit, welche zunächst die Gefässwand berührt, dieser fest und unbeweglich anhafte, d. h. dass unser Gleitungscoëfficient λ gleich Null zu setzen sei. Dass die Flüssigkeiten mit ziemlicher Kraft an benetzten festen Körpern haften und von ihnen angezogen werden, lehren die
651 Capillarerscheinungen und die Schwierigkeit, mit der sich die dünne benetzende Schicht von dem Körper trennt, dem sie anhaftet. Aber bei den Bewegungen innerhalb eines Gefässes ist der Fall doch insofern ein anderer, als die Wand fortdauernd gleichmässig mit Flüssigkeit benetzt bleibt, und durch die Bewegung die Flüssigkeit vom festen Körper nicht überhaupt getrennt wird, sondern stets neue Flüssigkeitstheile an die Stelle derer treten, welche sich von einem Flächenelemente

der Wand trennen. Die Anziehungskraft der Wand auf die berührenden Flüssigkeitsschichten kann diese nicht verhindern längs der Wand hinzufliessen, ebensowenig, als die Anziehungskraft der Erde das Wasser hindert ihrer Oberfläche parallel zu fliessen. Um das Haften der Wandschicht zu erklären, müsste man entweder annehmen, dass Flüssigkeitsatome sich oberflächlich zwischen die des festen Körpers einfügen, wie dies etwa bei Wänden aus aufquellenden thierischen Membranen der Fall sein könnte, oder dass die Reibung zwischen dem Wasser und den Wandtheilen unendlich gross sei, verglichen mit der im Innern der Flüssigkeit.

Schon ältere Versuche scheinen dafür zu sprechen, dass sowohl Fälle vorkommen, in denen λ gleich Null ist, als solche, wo es von Null verschieden ist. Unter den von Piotrowski ausgeführten Versuchen spricht direct dafür der mit der innen versilberten Glasflasche, welcher zeigte, dass nach der Versilberung der Einfluss der Reibung auf die Schwingungen geringer war als vorher, wonach λ für die Berührung von Wasser mit Silber einen grösseren Werth haben muss, als für die Berührung von Wasser mit Glas.

Dafür dass λ bei der Berührung von Wasser mit glatten und gereinigten Glasflächen gleich Null sei, sprechen namentlich die Versuche von Poiseuille an gläsernen Capillarröhren. Wenn die Röhren lang genug sind, dass in dem grössten Theile derselben das Wasser sich nur der Axe der Röhre parallel fortbewegt, welche selbst der x-Axe parallel sein mag, können wir $v = w = 0$ setzen. Dann folgt aus der Gleichung (1a), dass $du / dx = 0$, d. h. dass u nach x constant, und nur von y und z abhängig sei.

Wir nehmen ferner an, dass die Geschwindigkeit des Stromes der Zeit nach constant sei, also auch $du / dt = 0$.

Ferner wenn auf die Flüssigkeit im Innern der Röhre keine äusseren Kräfte wirken, also $P = 0$, folgt aus den zwei letzten der Gleichungen (1), dass $dp / dy = dp / dz = 0$, also p 652
nur von x abhängig sei, nicht aber von y oder z. Darnach reducirt sich die erste Gleichung auf:

$$-\frac{1}{h}\frac{dp}{dx} = -k^2\left[\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right] \cdots\cdots\cdots \Big\}(11).$$

Ist die Röhre ein Cylinder von kreisförmigem Querschnitt, dessen Axe mit der der x zusammenfällt, so wird die Bewegung rings um die Axe symmetrisch sein müssen, und wir können daher, wenn wir $z^2 + y^2 = r^2$ setzen, u als eine Function von r allein betrachten, während p von r unabhängig ist. Es müssen also die Ausdrücke beider Seiten in Gleichung (11) sowohl von x als von r unabhängig sein, und wenn wir mit b eine Constante bezeichnen, können wir setzen:

$$\frac{1}{h}\frac{dp}{dx} = -bk^2 \dots\dots\dots\dots\dots \Big\} \quad (11a),$$

so wird Gleichung (11):

$$-b = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr},$$

oder:

$$-br = r\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} = \frac{d}{dr}\left[r\frac{du}{dr}\right],$$

$$-\frac{1}{2}br^2 + c = r\frac{du}{dr},$$

$$-\frac{1}{2}br + \frac{c}{r} = \frac{du}{dr},$$

$$-\frac{1}{4}br^2 + c\log r + C = u.$$

In dieser Integralgleichung muss c offenbar gleich Null sein, weil sonst u für $r = 0$ unendlich gross wird. Es wird also:

$$u = C - \frac{1}{4}br^2 \dots\dots\dots\dots \Big\} \quad (11b).$$

Die Grenzbedingung für die oberflächlichste Wasserschicht wird nun, da die Geschwindigkeit U der Wand selbst gleich Null zu setzen ist, nach den Gleichungen (5) und (5b) an der Oberfläche:

653

$$X = -hk^2\frac{du}{dr} = h\frac{k^2}{\lambda}u,$$

$$Y = Z = 0,$$

also:

$$\lambda\frac{du}{dr} = -u,$$

$$\frac{1}{2}\lambda bR = C - \frac{1}{4}bR^2.$$

Wenn wir den Radius der Röhre mit R bezeichnen, und nun den hier gefundenen Werth von C in (11b) substituiren:

$$u = \frac{b}{4}\left[R^2 + 2\lambda R - r^2\right] \ldots\ldots\ldots\ldots \Big\} \quad (11c).$$

Wenn wir die Wassermasse Q bestimmen, welche in einer Secunde durch den Querschnitt der Röhre läuft, so ist:

$$Q = 2\pi h \int_0^R u r dr = \frac{\pi b h}{8}\left[R^4 + 4\lambda R^3\right] \ldots\ldots \Big\} \quad (11d).$$

Aus der Gleichung (11a) folgt weiter, wenn wir sie integriren und die Länge der Röhre mit L, den Druck am Anfang mit p_o, den am Ende mit p_1 bezeichnen, dass:

$$\frac{1}{h}(p_0 - p_1) = b k^2 L.$$

Indem wir hieraus den Werth von b nehmen und in (11d) substituiren, folgt:

$$Q = \frac{\pi (p^o - p_1)}{8 k^2 L}\left[R^4 + 4\lambda R^3\right] \ldots\ldots \Big\} \quad (12).$$

Poiseuille[1]) giebt folgende Formel für Q, in der wir die Intensität der Schwere (9808 mm) mit g und das specifische Gewicht des Wassers bei 10° mit h_0 bezeichnen:

$$Q = K \frac{(p_0 - p_1) \cdot R^4}{g h_0 L} \ldots\ldots\ldots \Big\} \quad (12a).$$

worin der Coëfficient K als Function der Temperatur $\mathfrak{T}$, diese 654
in Centesimalgraden ausgedrückt, folgenden Werth hat:

$$K = 16{,}135\,282\,(1 + 0{,}033\,679\,3\,\mathfrak{T} + 0{,}000\,220\,993\,6\,\mathfrak{T}^2)\Big\} \quad (12b).$$

Der Druck P ist bei ihm durch eine Wassersäule von 10°, deren Länge in Millimetern gemessen ist, ausgedrückt, daher wir hier setzen mussten:

$$h_0 g P = (p_0 - p_1).$$

Wenn wir die theoretische Formel (12) mit der empirischen (12a) vergleichen, ergiebt sich, dass für Poiseuille's Versuche,

1) Mémoires des savants étrangers. IX. p. 532.

in denen sich Wasser und Glas berührten, $\lambda = 0$ gesetzt werden muss. Dann ist:

$$\frac{\pi}{8k^2} = \frac{K}{gh_0},$$
$$k^2 = \frac{\pi g h_0}{8K} \cdots \Big\} \qquad (12c)$$

wonach die Constante k^2 in Einheiten, welche Quadratmillimeter dividirt durch Secunden sind, für jede Temperatur des destillirten Wassers folgendermassen in Ziffern ausgedrückt werden kann:

$$k^2 = \frac{1{,}7790}{1 + 0{,}033\,679\,3\,T + 0{,}000\,220\,993\,6\,T^2} \cdots \Big\} \qquad (12d).$$

Girard[1]) hat mit etwas weiteren Röhren von Kupfer Versuche angestellt.

Die weiteste Röhre, für die Poiseuille sein Gesetz bestätigt hat, war von 0,65 mm Durchmesser und 383,8 mm Länge. Die engste, welche Girard gebraucht hat, war von 1,83 mm Durchmesser und bis 1790 mm Länge. Die Ausflussgeschwindigkeit fand sich hier noch der Länge und dem Drucke proportional. Allerdings ist hier schon zu bezweifeln, ob Poiseuille's Gesetz an Glasröhren sich bis zu dieser Grenze streng erwiesen haben würde, aber gross würde die Abweichung immer noch nicht haben sein können, auch würde dieser Umstand die entgegengesetzte Abweichung haben herbeiführen müssen von der, die sich wirklich vorfindet.

655 Es findet sich nämlich in der Metallröhre die Geschwindigkeit merklich grösser, als sie nach Poiseuille's Formel in einer Glasröhre hätte sein sollen.

Unter den Versuchen von Girard mit Glasröhren findet sich einer, wo die Dimensionen denen des engeren Metallrohres ziemlich ähnlich sind. Das Glasrohr hatte einen Durchmesser von 0,767 mm, eine Länge von 939 mm. Bei dem Drucke einer Wassersäule von 182,4 mm und 0° Temperatur geschah die Entleerung von einem Viertel Litre in 1036 Secunden.

---

1) Mémoires de l'Institut 1813—1815. p. 249.

Nach Poiseuille's Formel wären unter den angegebenen Umständen 976 Secunden nöthig gewesen. Die Differenz zwischen Beobachtung und Rechnung kann leicht durch einen Fehler von $\frac{3}{100}$ mm in Messung des Durchmessers der Röhre, oder durch Ellipticität derselben entstanden sein, oder sie rührt daher, dass die Röhre schon zu weit war, um sich dem Gesetze der Capillarröhren streng zu fügen. Jedenfalls ist für die Glasröhre die Differenz noch eine kleine.

Dagegen brauchte $\frac{1}{4}$ Liter Wasser bei $0^0,5$, und einem Wasserdruck von 100 mm nur 624,5 Secunden Zeit, um durch eine kupferne Röhre von 1,83 mm Durchmesser und 1790 mm Länge zu fliessen, während Poiseuille's Formel hier mehr als das Vierfache der Zeit, nämlich 2 949,3 Secunden fordern würde.

Für dieselbe kupferne Röhre fand Girard in einer Reihe von Versuchen das Product:

$$\frac{g D H}{4 L u} = 2{,}8367\,,$$

(g die Intensität der Schwere, D der Durchmesser, H die Wasserdruckhöhe, L die Länge der Röhre, u die mittlere Geschwindigkeit, alles auf Millimeter reducirt). Wenn wir die Zahl 2,8367 mit e bezeichnen, wird in unseren Maassen ausgedrückt:

$$e = \frac{\pi R^3 (p_0 - p_1)}{2 L Q}\,.$$

Dies mit Gleichung (7) verglichen, zeigt dass

$$\lambda = \frac{k^2}{e} - \frac{1}{4} R.$$

Wenn wir aus Poiseuille's Versuchen den Werth von k^2 656
entnehmen, erhalten wir für die kupferne Röhre $\lambda = 0{,}3984$ mm.

Bei der weiteren kupfernen Röhre von Girard von 2,96 mm Durchmesser wird die Anwendung von Poiseuille's Formel schon sehr bedenklich; dieselbe Rechnung durchgeführt giebt hier einen viel kleineren Werth von λ, nämlich 0,111 mm. Diese Abweichung könnte davon herrühren, dass die Gesetze des linearen Fliessens hier nicht mehr passen. Dabei bürgt aber auch nichts für die gleiche Beschaffenheit der inneren

Oberfläche beider Röhren. Vermuthlich waren dieselben in ihrem Innern mit einer Oxydschicht bedeckt, da es nicht möglich sein möchte, das Innere so enger Röhren, welche häufig mit Wasser in Berührung kommen, metallisch polirt zu erhalten.

Aus Piotrowski's Versuchen mit ungekochtem Wasser habe ich die beiden Coëfficienten nach der angegebenen Methode berechnet und erhalten:

$$k = 1{,}1858$$
$$\lambda = 2{,}3534 \text{ mm},$$

während sich für die Temperatur von $24{,}5^0$, welche die mittlere der Versuche war, aus Poiseuille's Bestimmungen ergiebt:

$$k = 0{,}952\,06.$$

Das Verhältniss des zweiten zum ersten Werthe von k ist wie $0{,}804\,56:1$, also nahe wie $4:5$. Dass die Constante λ an der polirten Goldfläche beträchtlich grösser ist, als an den vielleicht oxydirten Kupferflächen in Girard's Versuchen, erscheint nicht als unwahrscheinlich. Auch benetzt in der That das Wasser die Goldfläche nur schwer und unvollkommen. Die Phasendifferenz zwischen der Bewegung des Gefässes und der anliegenden Flüssigkeitsschicht beträgt bei diesen Versuchen $25^0\,15''$ oder 1,616 Secunden. Um übrigens deutlich zu machen, einen wie grossen Einfluss kleine Schwankungen der beobachteten Schwingungsdauer auf die gefundenen Werthe der Constanten in solchen Fällen haben, wo λ verhältnissmässig gross ist, habe ich vorausgesetzt, dass die Schwingungsdauer der leeren Kugel T_0, deren Beobachtungswerthe unter den benutzten Elementen verhältnissmässig die grössten Schwankungen zeigen, unbekannt sei, bekannt aber ihr logarithmisches
657 Decrement, und habe dann den Werth von k aus Poiseuille's Versuchen entnommen, und damit die Formeln rückwärts durchgerechnet, indem ich λ und T_0 zu bestimmen suchte. Es fand sich $T_0 = 24{,}429$, während das Mittel der Beobachtungswerthe 24,509 beträgt, der kleinste unter den beobachteten Werthen aber 24,401 0 noch unter dem berechneten Werthe liegt. Dabei wird die Phasendifferenz zwischen dem Gefässe und der äussersten Wasserschicht $12^0\,42'$ und $\lambda = 0{,}715\,45$.

Wenn dagegen η klein ist, haben seine Grösse und die Differenzen der Schwingungsdauer fast gar keinen Einfluss auf die Bestimmungen von k. Es ist schon vorher bemerkt, dass die in den Gleichungen (9e) vorkommende Constante $F_{\prime}$ hauptsächlich abhängt von den Differenzen der Schwingungsdauer, die andere $F_{\prime\prime}$ dagegen von den logarithmischen Decrementen. Nehmen wir $F_{\prime}$ als unbekannt an, und bestimmen die Grösse I, welche zur Berechnung von k dient, aus $F_{\prime\prime}$ so ist:

$$I = \frac{k^2 C_\gamma}{C \sin(\varepsilon + \delta_1 - \delta)} = \frac{2 F_{\prime\prime}}{\cos[4\varepsilon + 2(\delta_1 - \eta - \delta)] - \cos 2\varepsilon}.$$

Nun ist in den Versuchen mit Wasser $[4\varepsilon + 2\delta_1 - 2\delta - 180^0] = 13^0\,41'$ und der Cosinus dieses Winkels ist ungefähr gleich $\frac{34}{35}$. Dagegen ist $\cos 2\varepsilon$ eine sehr kleine Grösse etwa $\frac{1}{117}$ und kann hier vernachlässigt werden. Wenn nun 2η von 0 bis $13^0\,41'$ wächst, so steigt der erste Cosinus von $\frac{34}{35}$ auf 1, und wenn 2η weiter wächst bis zur doppelten Grösse von $13^0\,41'$, so sinkt der Cosinus wieder bis auf $\frac{34}{35}$. Erst von da ab verändert sich nun mit steigendem η der Cosinus beträchtlicher, also wird auch in der Berechnung der Werth von I, und der diesem nahe proportionale von k keine grösseren Veränderungen erleiden, so lange η unter der Grösse von $13^0\,41$ bleibt. Daraus geht hervor, dass die von Piotrowski ausgeführten Messungen für die leichter beweglichen Flüssigkeiten gute Werthe für k liefern werden, selbst wenn es nicht gelingen sollte, die Schwingungsdauer viel genauer festzustellen, als bisher geschehen ist, sobald man sie anwendet, wo die Flüssigkeiten an den Gefässen fester anhaften.

Unter den untersuchten Flüssigkeiten kommen zwei vor, für welche die Werthe von η und λ so klein sind, dass sie in die Beobachtungsfehler fallen, und wobei vielleicht ein vollständiges Haften der Flüssigkeit an der Metallfläche stattfindet. Diese sind Alkohol und Aether. Die berechneten Werthe sind:

	Alkohol	Aether	Schwefelkohlenstoff	658
Innerer Reibungscoëfficient k	1,3754	0,59213	0,53401	
Oberflächlicher Gleitungscoëfficient λ . .	0,1096	0,1243	0,4430	
Phasenunterschied zwischen Oberfläche der Flüssigkeit und dem Gefässe . .	$1^0,37'$	$4^0,7'$	$13^0,39'10''$	
Temperatur	$24^0,05$	$21^0,6$	$21^0,85$	

Dass der Alkohol, namentlich der nicht ganz wasserfreie, schwerer fliesst als Wasser, also einen grösseren inneren Reibungscoëfficienten haben muss, ergiebt sich schon aus den Versuchen von Poiseuille. Der Aether und Schwefelkohlenstoff dagegen zeigen ihrer Leichtbeweglichkeit entsprechend einen viel kleineren Werth von k. Das Haften des Alkohols und Aethers an den Metallflächen zeigt sich entsprechend bei den gewöhnlichen Benetzungserscheinungen, sie verhalten sich darin anders als das Wasser, welches an der Goldfläche schwer haftet.

Bei den übrigen wässerigen Flüssigkeiten zeigt die Vergleichung der von Piotrowski berechneten Winkel ϑ, wenn man sie mit den Verhältnissen beim Wasser und Alkohol vergleicht, dass eine ziemlich bedeutende Gleitung stattfand. Ich habe es desshalb unterlassen, die ziemlich mühsame Rechnung für sie durchzuführen, weil den Resultaten doch keine grosse Genauigkeit beizulegen war.

So bestätigt sich durch die hier vorliegenden Versuche, dass die chemische Beschaffenheit der Wand auf die Bewegung der Flüssigkeiten nicht in allen Fällen einflusslos ist. Was den Zahlenwerth der Reibungsconstante betrifft, so widersprechen sie wenigstens nicht denen von Poiseuille, und es scheinen die Bedingungen gefunden zu sein, welche künftig erfüllt werden müssen, um auf dem eingeschlagenen Wege eine strenge Uebereinstimmung der Theorie mit den Thatsachen nachweisen zu können.

XII.

Zur Theorie der stationären Ströme in reibenden Flüssigkeiten.

Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg. Bd. V. S. 1—7; aus der Sitzung vom 30. October 1868. Das Manuscript wurde am 5. März 1869 eingereicht.

Hr. Alexis Schklarewsky, der im letzten Sommer im hiesigen physiologischen Laboratorium eine Reihe von Versuchen über die Bewegungen und die Vertheilung feiner suspendirter fester Körperchen in Capillarröhren angestellt hat, hatte dabei gefunden, dass nicht nur in capillaren Röhren mikroskopisch kleine Körperchen immer gegen die Mitte des Stromes hinstreben, sondern dass dasselbe sich auch an viel weiteren Röhren von 1 bis 5 cm Durchmesser zeigt. Eine Kugel aus Wachs, wenig schwerer als Wasser, fällt in einer verticalen mit Wasser gefüllten Röhre der Art immer so, dass sie von den Wänden gleichsam abgestossen wird, und der Mitte des Cylinders zueilt.

Eine eben solche Kugel, welche durch einen schwachen aufwärts gehenden Wasserstrom am Sinken gehindert wird, stellt sich in die Mitte der Röhre ein, und wenn man durch Neigen und Schütteln der Röhre sie der Wand nähert, bewegt sie sich doch, sobald man damit aufhört, wieder zur Mitte der Röhre. Das erstere Phänomen steht in auffallendem Gegensatz zu einem Theorem von W. Thomson[1]), wonach ein Körper, der in einer nicht reibenden Flüssigkeit nahe einer senkrechten Wand fällt, von dieser angezogen wird, und zu ihr hineilt. Das Letztere geschieht nun auch wirklich im Wasser, wenn man

---

1) Natural Philosophy, Oxford. 1867. Vol. I. §. 332.

schwerere Kugeln, z. B. grobes Bleischrot, in einem verticalen Cylinder fallen lässt. Diese fallen schneller als die oben genannten Wachskugeln, und dadurch erhalten diejenigen Druckunterschiede, welche vom Quadrate der Geschwindigkeit abhängen, grösseren Einfluss. Man hört in der That eine solche Kugel, die man in der Nähe der Wand eines mit Wasser gefüllten verticalen Cylinders fallen lässt, mehrmals an die Wand anschlagen, ehe sie den Boden erreicht.

Es war daher zu vermuthen, dass die bei geringeren Geschwindigkeiten beobachteten Abweichungen vom Einfluss der
2 Reibung herrühren möchten. Es schien sich auf die Erscheinungen die in engen Röhren und in weiten Röhren bei geringen Geschwindigkeiten beobachtet wurden, im allgemeinen die Regel anwenden zu lassen, dass die schwimmenden Körper sich definitiv nur an solchen Orten der Flüssigkeit hielten, wo ihre Anwesenheit die geringste Vermehrung der Reibung der Flüssigkeit hervorbrachte, und in diesem Sinne stellte ich deshalb eine theoretische Untersuchung an, indem ich hoffte, dass die Berücksichtigung nur der Glieder erster Dimension der als klein vorausgesetzten Geschwindigkeiten in den hydrodynamischen Gleichungen genügen würde, um die Erklärung der gedachten Erscheinungen zu geben.

Diese Untersuchung ergab nun allerdings insofern ein Resultat, als sich nachweisen liess, dass *bei verschwindend kleinen Geschwindigkeiten und stationärem Strome die Strömungen in einer reibenden Flüssigkeit sich so vertheilen, dass der Verlust an lebendiger Kraft durch die Reibung ein Minimum wird, vorausgesetzt, dass die Geschwindigkeiten längs der Grenzen der Flüssigkeiten als fest gegeben betrachtet werden.*

Auch liess sich für das Gleichgewicht schwimmender Körper in einer solchen Flüssigkeit eine Erweiterung dieses Theorems aufstellen. Nämlich: *ein schwimmender Körper ist im Gleichgewicht in einer reibenden, in langsamem stationärem Strome fliessenden Flüssigkeit, wenn die Reibung im stationären Strome ein Minimum ist auch für den Fall, dass man längs der Oberfläche des schwimmenden Körpers die Werthe der Geschwindig-*

keiten der Wassertheilchen so variirt, wie sie verändert werden würden, wenn eine der verschiedenen möglichen Bewegungen des Körpers factisch einträte.

Dieser letzte Satz erlaubt nun leider keine directe Anwendung auf die von Hrn. Schklarewsky beobachteten Erscheinungen, wie ich gehofft hatte, vielmehr habe ich mich später überzeugt, dass dieselben ohne Berücksichtigung der quadratischen Glieder der Geschwindigkeiten nicht zu erklären seien. Da jedoch die eben hingestellten Sätze an sich von Interesse sind, erlaube ich mir hier ihren Beweis zu veröffentlichen.

§ 1. Es seien die den rechtwinkeligen Coordinaten x, y, z parallelen Componenten der Geschwindigkeit des im Punkte (x, y, z) befindlichen Flüssigkeitstheilchens beziehlich u, v, w, der Druck ebenda p, die Dichtigkeit h. Die Componenten der äusseren im Punkte (x, y, z) auf die Einheit der Flüssigkeitsmasse wirkenden Kräfte seien dV/dx, dV/dy, dV/dz.

Wir nehmen an, dass die Flüssigkeit incompressibel sei, 3
und dass die Geschwindigkeiten der Flüssigkeit und ihre Differentialquotienten hinreichend klein seien, um ihre Quadrate und Producte in den Bewegungsgleichungen vernachlässigen zu können. Die hydrodynamischen Gleichungen mit Berücksichtigung der Reibung nehmen dann folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dV}{dx} - \frac{1}{h}\frac{dp}{dx} &= \frac{du}{dt} - k^2\left[\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right] \\ \frac{dV}{dy} - \frac{1}{h}\frac{dp}{dy} &= \frac{dv}{dt} - k^2\left[\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right] \\ \frac{dV}{dz} - \frac{1}{h}\frac{dp}{dz} &= \frac{dw}{dt} - k^2\left[\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0 \; \ldots\ldots\right\} \qquad (1a)$$

An der Oberfläche der Flüssigkeit wollen wir die Winkel, welche die nach aussen gerichtete Normale dieser Fläche mit den positiven Coordinataxen bildet, mit α, β, γ bezeichnen, und die Kräfte, welche die Flüssigkeit auf das Flächenelement $d\omega$ ihrer Grenzfläche ausübt, beziehlich mit:

$$(p\cos\alpha + X)\,d\omega, \qquad (p\cos\beta + Y)\,d\omega, \qquad (p\cos\gamma + Z)\,d\omega.$$

Diese letzteren Grössen haben folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
X &= -hk^2\left[2\frac{du}{dx}\cos\alpha+\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)\cos\beta+\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right)\cos\gamma\right]\\
Y &= -hk^2\left[\left(\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}\right)\cos\alpha+2\frac{dv}{dy}\cos\beta+\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)\cos\gamma\right]\\
Z &= -hk^2\left[\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)\cos\alpha+\left(\frac{dw}{dy}+\frac{dv}{dz}\right)\cos\beta+2\frac{dw}{dz}\cos\gamma\right]
\end{aligned}\right\}\quad(1\text{b})$$

Wo die Flüssigkeit feste Körper berührt, die sie vollkommen benetzt, haftet sie an diesen fest, und die oberflächlichen Flüssigkeitstheilchen theilen dann die Bewegung dieser Körper. Wir wollen uns im folgenden auf die Betrachtung dieses Falles beschränken, weil er der gewöhnlichere und einfachere ist. Die Componenten der äusseren Kräfte, welche die festen Körper zu bewegen streben, seien $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, und die unendlich kleinen Verschiebungen ihrer Angriffspunkte parallel den x, y, z, welche bei irgend einer möglichen Bewegung des Systems eintreten können, seien $\delta\mathfrak{u}$, $\delta\mathfrak{v}$, $\delta\mathfrak{w}$, die entsprechenden Verschiebungen der Oberflächenpunkte des Körpers δu δv, δw, so ist die Bedingung des Gleichgewichtes für die den festen Körper berührenden Theile der Oberfläche:

4 $$\left.\begin{aligned}
\Sigma[\mathfrak{X}\delta\mathfrak{u}+\mathfrak{Y}\delta\mathfrak{v}+\mathfrak{Z}\delta\mathfrak{w}]+\int(X\delta u+Y\delta v+Z\delta w)\,d\omega\,+\\
+\int p(\cos\alpha\,\delta u+\cos\beta\,\delta v+\cos\gamma\,\delta w)\,d\omega=0
\end{aligned}\right\}\quad(1\text{c})$$

worin die Summe auf alle Angriffspunkte der Kräfte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, und das Integral auf die ganze Oberfläche des betreffenden Körpers zu beziehen ist.

Wenn die Grenzfläche irgend wo durch die Flüssigkeit selbst gezogen gedacht ist, sind unter $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ die Kräfte zu verstehen, welche die jenseits liegende Wassermasse auf die Grenzfläche ausübt.

An einer freien Oberfläche sind:

$$\mathfrak{X}=-\mathfrak{P}\cos\alpha,\qquad \mathfrak{Y}=-\mathfrak{P}\cos\beta,\qquad \mathfrak{Z}=-\mathfrak{P}\cos\gamma,$$

wo $\mathfrak{P}$ den ausserhalb der Flüssigkeit herrschenden Druck bezeichnet.

§ 2. Wir wollen zunächst den Verlust an lebendiger Kraft bestimmen, den die Reibung herbeiführt in einem von Flüssig-

keit erfüllten Raume S. Zu dem Ende multipliciren wir die erste der drei Gleichungen (1) mit u, die zweite mit v, die dritte mit w, addiren sie alle drei, und addiren schliesslich zur Summe noch die Gleichung welche aus (1a) fliesst:

$$o = -k^2 \left\{ u \frac{d}{dx}\left[\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right] + v \frac{d}{dy}\left[\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right] + \right.$$
$$\left. + w \frac{d}{dz}\left[\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right]\right\}$$

Die so gewonnene Gleichung integriren wir über den Raum S nach den von Green und Gauss für solche Fälle angewendeten partiellen Integrationsmethoden und mit Berücksichtigung der Gleichungen (1b). Wir erhalten:

$$h\iiint\left(u\frac{du}{dt} + v\frac{dv}{dt} + w\frac{dw}{dt}\right) dx\, dy\, dz =$$
$$\int h\, V(u \cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\, d\omega - \int[(X + p\cos\alpha)\, u +$$
$$+ (Y + p\cos\beta)\, v + (Z + p\cos\gamma)\, w]\, d\omega - Q \ldots\ldots\} \quad (2)$$

worin Q folgendes über den Raum S ausgedehntes Integral bezeichnet:

$$Q = hk^2 \iiint\left[2\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + 2\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)^2\right.$$
$$\left. + \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)^2\right] dx\, dy\, dz\} \quad (2a)$$

Wenn man beide Seiten der Gleichung (2) mit dt multi- 5
plicirt denkt, so bedeutet das Integral links vom Gleichheitszeichen die Zunahme der lebendigen Kraft in der den Raum S füllenden Flüssigkeitsmasse während des Zeittheilchens dt, das erste Integral rechts bezeichnet denjenigen Theil dieser Zunahme, welcher durch die Arbeit der äusseren Kräfte, die auf das Innere der Wassermasse wirken, geleistet worden ist. Das zweite Integral rechts, welches nach der Gleichung (1c) gleich dem Ausdrucke:

$$\Sigma[\mathfrak{X}\mathfrak{u}\, dt + \mathfrak{Y}\mathfrak{v}\, dt + \mathfrak{Z}\mathfrak{w}\, dt]$$

ist, wo $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ die Geschwindigkeitscomponenten für die Angriffspunkte der Kräfte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ bezeichnen, misst die Arbeit, welche die Kräfte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, die direct oder indirect auf die

Oberfläche der Flüssigkeit wirken, im Zeittheilchen dt geleistet haben. Daraus folgt, dass Q diejenige Menge lebendiger Kraft bezeichnet, welche durch die Reibung im Innern der Flüssigkeit vernichtet, das heisst in Wärme verwandelt worden ist.

Bezeichnen wir die lebendige Kraft der Flüssigkeit mit L, die Arbeit der äusseren Kräfte mit P, also:

$$P = h \int V (u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma)\, d\omega$$
$$+ \Sigma(\mathfrak{X} \mathfrak{u} + \mathfrak{Y} \mathfrak{v} + \mathfrak{Z} \mathfrak{w}),$$

so können wir die Gleichung (2) schreiben:

$$\frac{dL}{dt} = P - Q \ldots\ldots\ldots \tag{2b}$$

§ 3. Wir wollen jetzt nachweisen, dass bei stationärem Strome der Ausdruck:

$$P - \tfrac{1}{2} Q$$

ein Minimum wird. Wir beschränken uns dabei auf die gewöhnlich vorkommende Form der Grenzbedingung, dass nämlich, wo die Flüssigkeit einen festen Körper berührt, ihre oberflächlichen Theilchen fest an diesem haften. Wo also die Flüssigkeit eine feste Wand berührt, sei diese nun unbewegt, oder habe sie eine vorgeschriebene Bewegung, sind die Werthe von u, v, w gegeben, und ihre Variationen gleich Null. Dasselbe wird vorausgesetzt an denjenigen Theilen der Grenzfläche des Raumes S, wo die Flüssigkeit ein- und ausströmt. Dagegen können an der Oberfläche beweglicher schwimmender Körper und an einer freien Oberfläche Variationen von u, v, w und $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ eintreten, welche den Bewegungsbedingungen der etwa berührenden festen Körper entsprechen.

Da die Flüssigkeit als incompressibel angenommen wird, muss ausserdem die Gleichung (1a) überall erfüllt sein. Die Bedingung des Minimum wird demnach:

$$o = \delta P - \tfrac{1}{2} \delta Q + \delta \iiint \lambda \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) dx,\ dy,\ dz \ldots\ldots \tag{3}$$

worin λ eine beliebige Function der Coordinaten bezeichnet.

Wenn man durch partielle Integration die Differentialquotienten von δu, δv, δw entfernt, erhält man:

1) Für das Innere:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\lambda}{dx} &= hk^2\left[\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right]\\
\frac{d\lambda}{dy} &= hk^2\left[\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}\right]\\
\frac{d\lambda}{dz} &= hk^2\left[\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+\frac{d^2w}{dz^2}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (3\text{a})$$

2) Für die Oberfläche mit Benutzung der in den Gleichungen (1b) gegebenen Definitionen von X, Y, Z:

$$\left.\begin{aligned}
o = \int\{&[(hV+\lambda)\cos\alpha + X]\,\delta u\\
&+[(hV+\lambda)\cos\beta + Y]\,\delta v + [(hV+\lambda)\cos\gamma + Z]\,\delta w\}\,d\omega\\
&+\Sigma\{\mathfrak{X}\,\delta\mathfrak{u} + \mathfrak{Y}\,\delta\mathfrak{v} + \mathfrak{Z}\,\delta\mathfrak{w}\}
\end{aligned}\right\} \quad (3\text{b})$$

In dieser letzteren Gleichung sind die Variationen δu, δv, δw den vorgeschriebenen Bewegungsbedingungen der berührenden festen Körper unterworfen.

Wenn wir nun die neue Bezeichnung einführen:

$$\lambda = \mathfrak{p} - hV$$

so bekommen die Gleichungen (3a) und (3b) genau dieselbe Form, wie die Gleichung (1) und (1c) mit Berücksichtigung von (1b). Der einzige Unterschied der bestehen bleibt, ist der, dass in den letzteren die Grösse p in (3a) und (3b) dagegen statt dieser die Grösse $\mathfrak{p}$ vorkommt.

Jede Lösung der Gleichung 3 wird also Werthe von u, v, w, $\mathfrak{p}$ geben, die, statt u, v, w, p in die Gleichungen (1), (1a), (1b), (1c) gesetzt, diesen genügen.

Einen stationären Strom wird diese Art der Bewegung aber nur dann geben, wenn längs der freien und der verschiebliche Wände berührenden Theile der Oberfläche der Flüssigkeit überall:

$$u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 0,$$

d. h. wenn diese Theile der Oberfläche bei der Bewegung ihre Lage nicht ändern, sondern sich entweder gar nicht, oder nur in sich selbst verschieben.

Uebrigens folgt noch aus der Gleichung (2b) für den stationären Strom, wo u, v, w von der Zeit t unabhängig sind, dass

$$P = Q,$$

und da P gleich Null wird, wenn u, v, w rings an der Ober-

fläche gleich Null sind, Q aber eine Summe von lauter Quadraten
7 ist, welche nicht Null werden kann, ohne dass alle ihre einzelnen Summanden gleich Null werden: so müssen, wenn u, v, w längs der Oberfläche gleich Null sind, auch überall im Innern die folgenden Grössen gleich Null sein:

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} = \frac{dw}{dz} = 0$$

$$\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} = 0.$$

Deren Integralgleichungen sind:

$$u = a + fy - gz \qquad v = b + hz - fx \qquad w = c + gx - hy.$$

Die willkürlichen Constanten a, b, c, f, g, h dieser Gleichungen müssen alle gleich Null sein, wenn u, v, w längs der ganzen Oberfläche des Raumes S gleich Null sein sollen; folglich müssen diese Grössen auch in seinem Innern gleich Null sein.

Daraus folgt weiter, dass nicht zwei Systeme Grössen u_0, v_0, w_0, p_0 und u_1, v_1, w_1, p_1 existiren können, welche den Gleichungen (1) und (1a) genügen, und für welche überall an der Grenzfläche des Raumes S:

$$u_1 - u_0 = v_1 - v_0 = w_1 - w_0 = 0$$

wäre, ohne dass gleichzeitig überall im Innern:

$$u_1 - u_0 = v_1 - v_0 = w_1 - w_0 = 0$$
$$p_1 - p_0 = \text{Const.}$$

Diese letzteren Differenzen nämlich würden für u, v, w, p gesetzt unter den zuletzt betrachteten Fall kommen.

Ob bei beweglichen Wandungen verschiedene Lösungen der Aufgabe mit verschiedenen Bewegungen des beweglichen und in sich selbst verschieblichen Wandtheiles existiren können, hängt von der Natur der diesen bewegenden Kräfte ab.

Berücksichtigt man, dass nach Gleichung (2b) im stationären Strome $P = Q$ ist, welche Gleichung die der Erhaltung der Kraft ist, so ist die Grösse $P - \frac{1}{2}Q$, welche zum Minimum gemacht werden soll, unter Festhaltung jener Bedingung der Erhaltung der Kraft, auch gleich $\frac{1}{2}Q$ zu setzen. Vorausgesetzt also Incompressibilität der Flüssigkeit, ferner das Gesetz von der Erhaltung der Kraft, und vollständige Adhärenz der Flüssigkeit an die beweglichen Theile der Wandung, so kann dem Gesetze die im Anfang ausgesprochene Formulirung gegeben werden.

Schallbewegung.

Digitized by Google

XIII.

Bericht über die theoretische Akustik betreffenden Arbeiten vom Jahre 1848 und 1849.

Die Fortschritte der Physik, dargestellt von der physikalischen Gesellschaft in Berlin. Bd. IV S. 101—118; S. 124—125. Bd. V S. 93—98.

J. Challis. Theoretical determination of the velocity of sound. Phil. mag. XXXII 276*. 101

Airy. Remarks on Professor Challis's theoretical determination of the velocity of sound. ibd. 339*.

J. Challis. On the velocity of sound. ibd. 494*.

J. Challis. Additional analytical considerations respecting the velocity of sound. ibd. XXXIII 98*.

G. G. Stokes. On a difficulty in the theory of sound. ibd. 349*.

J. Challis. On the vibrations of an elastic fluid. ibd. 360*.

J. Challis. Further investigation of the nature of aërial vibrations. ibd. 462.*

R. Moon. On a difficulty suggested by Prof. Challis in the theory of sound. Proc. of the Cambridge Philos. Society 1848 Novb. — Philos. Mag. XXXIV 136*.

G. G. Stokes. On some points in the received theory of sound. ibd. 52*.

J. Challis. Continuation of researches in the mathematical theory of aërial vibrations. ibd. 88*.

Eli. W. Blake. A determination of the general law according to which pulses differing in intensity are propagated in elastic media with remarks on the received theory of the velocity of sound. Sill. Amer. Journal. vol. V. 372*.

G. Wertheim. Mémoire sur la vitesse du son dans les liquides C. R. XXVII 150*. — Ann. d. ch. et d. ph. XXIII 434*. — Inst. No. 762. p. 237*. Pogg. Ann. LXXVII 427* und 544*; Arch. d. sc. ph. et nat. IX. 52*.

Sc. Russel. On the effect of the rapid motion of the observer on sound.

Athen 1848 No. 108 b. p. 835*; Inst. No. 768 p. 288*; Arch. d. sc. ph. et nat. IX. 138*.

102 Robert-Lefebvre. Théorie mathématique des sons musicaux. C. R. XXVII 648*.

A. Seebeck. Ueber die Schwingungen gespannter und nicht gespannter Stäbe. Ber. d. Sächs. Ges. I. 159; Pogg. Ann. LXXIII 442*.

A. Seebeck. Versuche über die Töne steifer Saiten. Ber. d. Sächs. Ges. I. 365*.

Duhamel. Sur la résonnance multiple des corps. C. R. XXVII 457*. Inst. No. 775. 341. Ann. d. ch. et d. ph. XXV 45; Arch. d. sc. ph. et nat. X. 52*.

Der Unterschied der nach hydrodynamischen Principien berechneten Schallgeschwindigkeit 916,322 Fuss engl. und der beobachteten von 1089 Fuss ist bisher hergeleitet worden von der Erwärmung und Erkältung, welche die Luft bei ihrer Verdichtung und Verdünnung erleidet. Bei Berücksichtigung dieses Umstandes entspricht nämlich einer gleichen Dichtigkeitsänderung eine grössere Aenderung der Spannung, als es nach dem Mariotte'schen Gesetze der Fall sein würde, und demgemäss wird bekanntlich auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit elastischer Wellen vergrössert. Nun ist die durch directe Versuche ermittelte Grösse der Erwärmung der Gase durch Compression allerdings nicht hinreichend, um den ganzen Unterschied zu erklären, indessen haben wir auch allen Grund anzunehmen, dass die gefundenen Zahlen durch die bei solchen Versuchen nicht zu vermeidenden Verluste von Wärme zu klein ausgefallen sind.

Hr. J. Challis hat in den vorn citirten Aufsätzen im „Phil. Mag.“ diese Erklärung als ungenügend darzustellen und eine ganz neue rein hydrodynamische Theorie der Schallbewegung zu entwickeln gesucht, aus welcher sich eine grössere Geschwindigkeit der Fortpflanzung ergeben sollte, als aus der bisherigen. Der erste Einwand Bd. XXXII S. 283, dass die elastische Kraft der Luft bei Verdichtung mit Temperaturänderung zwar grösser, bei Verdünnung aber kleiner sein müsse als ohne dieselbe, während eine grössere Schallgeschwindigkeit nur durch Vermehrung der elastischen Kraft in beiden Fällen

erzeugt werden könne, beruht auf einem Missverständniss, welches
bei einem so fertigen Mathematiker überrascht. Derselbe ist 103
von Hrn. Airy ibd. 343 zurückgewiesen, indem er erinnert, dass es nicht auf die absolute Grösse der elastischen Kräfte ankomme, sondern auf ihren Unterschied von denen des Gleichgewichtszustandes, und dass dieser Unterschied in beiden Fällen vergrössert sei. In den weiteren Aufsätzen Bd. XXXII 498 und XXXIII sucht Hr. Challis dagegen aus den Gleichungen für die Schallbewegungen mit Berücksichtigung des Einflusses der Erwärmung nachzuweisen, dass dieser Einfluss nicht blos in einer Aenderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit bestehen könne, sondern auch den Charakter der Bewegung ändere. Dagegen ist zu erinnern, dass alle unsere Theorien kleiner elastischer Schwingungen nur eine Art von Bewegung darstellen sollen, welcher sich wirklich stattfindende Bewegungen immer mehr nähern, je kleiner sie sind; deshalb sind wir berechtigt in den Gleichungen die Aenderungen der Dichtigkeit gegen die ganzeDichtigkeit, die Geschwindigkeiten der schwingenden Theile gegen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu vernachlässigen, wie es auch Hr. Moon in seiner oben citirten Antwort gegen Hrn. Challis thut, und dann reducirt sich der Einfluss der Temperaturänderung wirklich auf eine blosse Aenderung der Schallgeschwindigkeit, wie es auch aus den von letzterem selbst aufgestellten Gleichungen folgt.

Um eine neue Theorie des Schalles zu gründen, sucht Hr. Challis in seinem ersten Aufsatze ein particuläres Integral der hydrodynamischen Gleichungen, durch welches eine nach einer Richtung sich fortpflanzende Bewegung dargestellt wird. Wir haben bekanntlich zweierlei Systeme von hydrodynamischen Gleichungen eines für Bewegungen von endlicher Grösse, und ein zweites einfacheres für unendlich kleine Schwingungen. Nennen wir ϱ die Dichtigkeit, p den Druck, u die Geschwindigkeit in Richtung der x, v die in Richtung der y, w die in Richtung der z für den Punkt dessen Coordinaten x, y, z sind zur Zeit t, ferner a^2 die Constante, welche der Gleichung genügt $p = a^2 \varrho$, und betrachten wir nur Fälle, in welchen sich eine Function φ von x, y, z und t so finden lässt, dass $u = d\varphi/dx$, $v = d\varphi/dy$, $w = d\varphi/dz$, so reducirt

104 sich bekanntlich das System der exacten Gleichungen für Bewegungen von Gasen, welche nicht dem Einflusse äusserer Kräfte ausgesetzt sind, auf folgende zwei:

$$\left.\begin{aligned} c - a^2 \ln. \varrho &= \frac{d\varphi}{dt} + \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right] \\ -\frac{d.\ln.\varrho}{dt} &= \frac{d.\ln.\varrho}{dx}\cdot\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d.\ln.\varrho}{dy}\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d.\ln.\varrho}{dz}\frac{d\varphi}{dz} + \frac{d^2\varphi}{dx^2} \\ &\quad + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}. \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

Die Gleichung für unendlich kleine Schwingungen erhält man hieraus, wenn man die höheren Dimensionen der Ableitung von φ weglässt, und ϱ eliminirt:

$$o = \frac{d^2\varphi}{dt^2} - a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)$$

Eine ganz ähnliche existirt für ϱ: (II)

$$o = \frac{d^2\varrho}{dt^2} - a^2\left(\frac{d^2\varrho}{dx^2} + \frac{d^2\varrho}{dy^2} + \frac{d^2\varrho}{dz^2}\right).$$

Hr. Challis benutzt zunächst nur die letzteren Gleichungen, und findet als ein seiner Forderung entsprechendes particuläres Integral:

$$\frac{d\varphi}{dz} = w = mf \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(z - at\sqrt{1 + \frac{e\lambda^2}{\pi^2}} + c\right)\right],$$

wo λ die Wellenlänge bezeichnet und f irgend eine Function von x und y, welche der Gleichung entspricht:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} + 4ef = 0.$$

Dieses Integral zeigt also Vibrationen an, parallel der Axe der z, welche sich parallel dieser selben Axe mit der Geschwindigkeit $a\sqrt{1 + e\lambda^2/\pi^2}$ fortpflanzen; letztere ist, da e in der Untersuchung als Bezeichnung einer nothwendig positiven aber noch unbestimmten Grösse eingeführt ist, stets grösser als die sonst gefundene Fortpflanzungsgeschwindigkeit a. Die Function f, welche die Vertheilung der Gleichgewichtsstörungen in Ebenen darstellt, die auf der z-Axe senkrecht stehen, muss zwei willkürliche Functionen von x und y enthalten, da sie durch eine partielle Differenzialgleichung zweiten Grades gegeben ist.

Als einfachsten Fall betrachtet Hr. Challis den, wo die Störungen nach allen Richtungen senkrecht auf der Axe der z 105
dieselben sind, also nur von der Entfernung von dieser Axe abhängen; er erhält so eine bestimmte Function für f, welche Verdichtungswellen bezeichnet von der Gestalt concentrischer Ringe, welche in der Richtung der z fortschreiten. Die Wellen nehmen bei wachsendem Durchmesser der Ringe an Intensität ab, die intensivste Welle aber schreitet längs der Axe dieser Ringe fort innerhalb einer cylindrischen Hülle; der Durchmesser dieser Hülle hängt von der Grösse e ab. Diese Art von Bewegung in einem cylindrischen Faden betrachtet Hr. Challis als die elementare, er nennt sie „nicht divergirende Wellen", und bemüht sich schliesslich nachzuweisen, dass die Grösse $e\lambda^2$, welche die grössere Fortpflanzungsgeschwindigkeit bedingt, nur von der Natur des Stoffes abhängig sei, aber dies ist die schwache Stelle seiner Untersuchung.

Hr. Airy hat darauf gezeigt, dass sich die von Hrn. Challis gefundenen Bewegungen zusammensetzen lassen aus ebenen Wellen, deren Normalen gleiche Winkel mit der Axe der z bilden, und je zwei in derselben Ebene mit dieser Axe liegen. Liegen z. B. diese Normalen in der Ebene der xz, und bilden mit ihr den Winkel a, so sind die Geschwindigkeitsgleichungen für die eine:

$$w_{\prime} = m \sin \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (x \sin\alpha + z \cos\alpha - at) \right\}$$

und für die andere:

$$w_{\prime\prime} = m \sin \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (-x \sin\alpha + z \cos\alpha - at) \right\},$$

ihre Summe:

$$w = 2m \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} x \sin\alpha \right\} \sin \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (z \cos\alpha - at) \right\},$$

die letztere Gleichung kann geschrieben werden ganz übereinstimmend mit der von Hrn. Challis gefundenen:

$$w = mf \sin \left\{ \frac{2\pi}{\lambda_1} (z - a_1 t) \right\},$$

wo $\lambda_1 = \lambda / \cos\alpha$, $a_1 = a / \cos a$ und $f = \cos\{2\pi\, x \sin\alpha / \lambda\}$. Bei einem solchen Zusammenwirken zweier ebenen Wellensysteme

laufen also die einzelnen Phasen nach der Halbirungslinie des
106 Winkels den ihre Normalen bilden mit einer grösseren Geschwindigkeit ab, als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles beträgt; dieselbe hängt aber ab von der Grösse des Winkels α, und ist keine Unveränderliche. Durch Zusammensetzung verschiedener ähnlicher Paare von verschiedener Intensität, Wellenlänge und Lage, deren Normalen aber alle denselben Winkel mit der z-Axe bilden, kann man den allgemeineren von Hrn. Challis behandelten Fall darstellen, die Ringsysteme dagegen, wenn man alle diejenigen Wellensysteme zusammensetzt, welche gebildet werden, wenn man ein solches Paar um die z-Axe rotiren lässt.

Hr. Challis verwahrt sich in seinem zweiten Aufsatze gegen diese Zerlegung seiner nicht divergirenden Wellen in ebene Wellen, indem er den particulären Integralen der allgemeinen Bewegungsgleichungen, welche die Bewegung ebener und sphärischer Wellen darstellen, alle physikalische Bedeutung abspricht, weil, wie er nachzuweisen sucht, diese Gleichungen auf physikalische Vorstellungen angewendet in Widersprüche führen. Für ebene Wellen braucht er zu diesem Behufe die vollständigen Gleichungen (I). Setzt man voraus, dass die Bewegungen nur der Axe der z parallel seien, dass Druck und Geschwindigkeit in den auf z senkrechten Ebenen gleich seien, und eliminirt man ϱ aus den Gleichungen (I), so erhält man die exacte Gleichung für ebene Wellen:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \left\{a^2 - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2\right\}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + 2\,\frac{d\varphi}{dx}\,\frac{d^2\varphi}{dx\,dt} = 0,$$

und ein entsprechendes Integral derselben ist:

$$w = \psi_{(z-(a+w)t)},$$

wo ψ eine willkürliche Function der in Parenthese beistehenden Grösse ist. Dieser Ausdruck bezeichnet eine Bewegung, bei welcher die Phasenpunkte ohne Bewegung mit der Geschwindigkeit a fortschreiten, diejenigen aber, in denen die Geschwindigkeit m ist, mit der $a + m$. Es lässt sich aus der Integralgleichung leicht der entsprechende Ausdruck für die Dichtigkeiten ableiten. Man findet:

$$\ln\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{1}{a}\,w,$$

wo ϱ_0 die Dichtigkeit in der Gleichgewichtslage bezeichnet. Den positiven Werthen von w entsprechen demnach Werthe 107
von $\varrho > \varrho_0$, den negativen solche von $\varrho < \varrho_0$. Es schreiten also in den durch die obige Integralgleichung gegebenen Wellensystemen die Phasen der grösseren Dichtigkeit schneller fort, als die der geringeren, und die Wellen müssen im Fortschreiten ihre Gestalt ändern. Hr. Challis spricht nun der obigen Gleichung, von deren Richtigkeit man sich übrigens leicht durch Integriren überzeugen kann, alle physikalische Gültigkeit ab, weil bei diesem ungleichmässigen Fortschreiten verschiedener Phasen derselben Welle es endlich dazu kommen müsse, dass ein Punkt ohne Geschwindigkeit einen ihm voranliegenden der Verdünnungsphase einhole und überhole, und er zugleich eingeholt und überholt werde von einem der hinter ihm liegenden Verdichtungsphase, sodass nach jener Gleichung in demselben Punkte der z-Axe gleichzeitig Verdünnung, Verdichtung und normale Dichtigkeit, positive, negative und keine Geschwindigkeit vorhanden sein müsse, was in diesem Falle der physikalischen Anwendung Unsinn sei; deshalb könne diese Form des Integrals überhaupt nicht mögliche physikalische Verhältnisse aussprechen. Indessen kann dieses Princip nicht zugegeben werden. Wenn die Differenzialgleichungen alle Bedingungen der betrachteten Bewegungen enthalten, so muss auch jedes ihnen entsprechende reelle particuläre Integral einen möglichen Fall solcher Bewegung aussprechen. Führt dasselbe aber aus anwendbaren Werthen über zu nicht anwendbaren, so muss an der Grenze beider ein in den Differenzialgleichungen nicht berücksichtigtes Verhältniss vorkommen. Dieses ist in diesem Falle von Hrn. Stokes aufgefunden. Bei der Aufstellung der hydrodynamischen Gleichungen (I) muss man nämlich die Voraussetzung machen, dass die Dichtigkeits- und Geschwindigkeitsänderungen bei dem Uebergange von einem Theilchen auf die benachbarten continuirliche seien, also $d\varrho/dx$ und dw/dx endliche Grössen. Jene Gleichungen finden aber keine Anwendung mehr, sobald an irgend einer Stelle eins dieser Verhältnisse unendlich geworden ist. Das muss aber eintreten, sobald irgend ein Punkt der Verdichtungsphase irgend einen von geringerer Dichtigkeit erreicht. Nur bis zu diesem

108 Augenblicke ist die obige Gleichung gültig; was dann geschieht kann nicht mehr aus den Gleichungen (I) abgeleitet werden, sondern muss durch eine besondere Betrachtung ermittelt werden. Am passendsten scheint der Vergleich mit einer überschlagenden Wasserwelle zu sein. Jedenfalls müssen aber die eintretenden Aenderungen in der ganzen Ausdehnung der Welle gleichmässig eintreten, sodass doch wieder ebene Wellen anderer Form entstehen, und nach denselben Gesetzen fortschreiten wie vor der Aenderung.

Damit ist die principielle Schwierigkeit beseitigt. Uebrigens möchte in der Praxis die Formänderung ebener Schallwellen und ihre Brandung kaum von Wichtigkeit sein bei der ungemein geringen Amplitüde reiner musikalischer Töne. Ist w verschwindend klein gegen a, so verändert sich die obige exacte Formel in die bekannte:

$$w = \psi_{(z-at)}.$$

Uebrigens ist zu bemerken, dass wir in den Fällen, wo wir die exacte Formel anwenden müssen, nicht mehr Wellen verschiedener Richtung durch Addition zusammensetzen dürfen, weil die ungestörte Superposition der Schwingungen bei einer solchen Intensität derselben nicht mehr stattfindet. Es äussert sich dies in der Rechnung dadurch, dass eine Summe particulärer Integralgleichungen die Gleichungen I. nicht mehr erfüllt.

Ein gleicher zu beseitigender Einwand von Hrn. Challis gegen die gewöhnliche Theorie des Schalles bezieht sich auf die Kugelwellen. Das bekannte particuläre Integral der Gleichungen für kleine Schwingungen für diese Art der Bewegung ist:

$$\varrho - \varrho_0 = \frac{\psi_{(at-r)}}{r}.$$

Nehmen wir an, es sei nur eine einzelne Welle vorhanden, deren Mitte den Radius R habe, deren Breite 2ε dagegen vernachlässigt werden könne, und die in einem gleichmässig mit ruhender Luft angefüllten Raume fortschreite, so ist der Ausdruck für die Quantität von Masse, welche in dem von der

Welle durchlaufenen Raume mehr vorhanden ist als im ruhigen Zustande:

$$= 4\pi R \int_{R-\iota}^{R+\iota} \psi_{(at-r)} dr.$$

Sie wächst also mit der Zeit in demselben Verhältnisse 109
wie der Radius, wenn das Integral einen bestimmten positiven Werth hat, und da die unbestimmte Function darin nach Belieben geändert werden kann, so kann man dem Integral jeden beliebigen Ziffernwerth ertheilen. Nach Hrn. Challis würde also diese Integralgleichung die Folgerung zulassen, dass sich die Quantität der vorhandenen Materie entweder vermehren oder vermindern könne. Hr. Stokes weist Bd. XXXIV S. 54 dagegen nach, dass die Gleichung, welche man aus jener Integralgleichung der Dichtigkeit für die Geschwindigkeit der Lufttheilchen ableiten könne, ausser den Vibrationen, die der Wellenbewegung angehören, noch eine zum Centrum gerichtete oder von ihm ausgehende Geschwindigkeit angebe, wenn der Ausdruck $\int \psi_{(r-at)} dr$ einen positiven oder negativen Werth habe, und dass daher die Vermehrung oder Verminderung der Masse rühre. Die Antwort von Hrn. Challis dagegen ibd. S. 91 ist keine.

In dem grössten Theil seiner späteren Aufsätze bemüht sich Hr. Challis nachzuweisen, dass seine nicht divergirenden Wellen den Forderungen der exacten Bewegungsgleichungen Genüge leisten. Er findet für Wellenformen, welche ohne Veränderung der Gestalt parallel der Axe der z fortschreiten sollen, eine bestimmte Gestalt, ausgedrückt durch eine Consinusreihe von $z - a_1 t$, (Bd. XXXIII S. 363, Gleichung 1 und 2), während die Vertheilung rund um die Axe der z ausgedrückt bleibt durch eine partielle Differentialgleichung zweiten Grades nach x und y. Die mathematische Entwicklung erregt einige Bedenken, weil er mehrere Male Sätze, die aus den ungenaueren Gleichungen (II) geflossen waren, erst nachdem er sie eine Weile gebraucht hat, durch andere ersetzt, welche aus den exacten Gleichungen hergeleitet sind. Aber selbst wenn seine nicht divergirenden Wellen

unveränderlich fortschreiten, so beweist das noch nichts für die Nothwendigkeit, dass wir alle Schallwellen in solche zerlegen müssen, weil in allen Fällen, wo die exacteren Gleichungen gebraucht werden müssen, überhaupt keine einfache Zusammensetzung und Zerlegung der Wellen mehr stattfindet. In denjenigen Fällen aber, wo die nicht exacten Gleichungen anwendbar sind, ist es eine kühne Hoffnung, dass durch Zu-
110 sammensetzung seiner linearen Wellen zu ebenen und sphärischen eine andere Bewegung herauskommen soll, namentlich eine andere Fortpflanzungsgeschwindigkeit, als die der ebenen Wellen, in welche nachweislich jene linearen aufgelöst werden können.

Hr. Blake hat den Unterschied der aus dem Mariotte'schen Gesetz berechneten Schallgeschwindigkeit von der wirklichen noch auf eine andere Weise zu erklären versucht. Er sucht nämlich auf elementare Weise sich einen Ausdruck zu verschaffen für die Aenderung jener Geschwindigkeit durch Steigerung der Intensität des Schalls. Dieser Ausdruck ist aber falsch, weil er ihn herleitet aus der Annahme, dass alle Theile der Welle sich mit gleicher Geschwindigkeit fortbewegen, was nach der oben hingestellten exacten Integralgleichung für ebene Wellen nicht der Fall ist. Er nimmt dann an, dass erst Schall von einer gewissen Intensität gehört werde, und dass die beobachtete Schallgeschwindigkeit eben deshalb grösser sei, als die für eine verschwindend kleine Intensität berechnete.

Hr. Wertheim hatte eine ausgedehnte Arbeit zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in verschiedenen Flüssigkeiten ausgeführt. Er berechnet dieselben aus den Tönen von Orgelpfeifen, in welchen die betreffende Substanz in Longitudinalschwingungen versetzt wird. Der erste Theil seiner Arbeit besteht in einem Studium der Eigenthümlichkeiten dieser Bestimmungsweise an den Tönen, welche solche Pfeifen in der Luft geben. Bekanntlich sollten die Schwingungszahlen von Tönen verschiedener Pfeifen genau im umgekehrten Verhältniss der Pfeifenlänge stehn, wenn die Luftbewegung in denselben

rein longitudinal wäre. Da dieselbe aber an den beiden Oeffnungen der Pfeife beträchtlich von dieser Voraussetzung abweicht, so trifft dieses Gesetz nie genau zu, und zwar desto weniger, je weiter die Pfeife ist. Hr. Wertheim hat angenommen, diese Störung könne bei einer und derselben Pfeife, der man verschiedene Längen giebt, nach ihrer Wirkung gleichgesetzt werden einer bestimmten Verlängerung der Pfeife, und hat diese letztere berechnet aus den Tönen, welche er bei drei verschiedenen Pfeifenlängen erhielt. Diese Annahme ist aber nur annähernd richtig, wie sich theils aus Experimenten Anderer[1]), theils aus den Wertheim'schen selbst ergiebt, da in allen Fällen, wo die Correctionen einen beträchtlichen Werth annehmen, die drei Werthe, welche man durch Combination je zweier von den drei Beobachtungen berechnen kann, merklich sich unterscheiden und zwar meist in demselben Sinne. Die Grösse dieser Correctionen ist veränderlich nach der Weite der Pfeife, nach der Gestalt der Mundöffnung, Stärke des Anblasens u. s. w.; sie ist in vielen der angeführten Versuche bis zu $\frac{2}{3}$ der kürzesten Pfeifenlänge. Eine zweite Schwierigkeit bei genauen Bestimmungen macht die Veränderlichkeit des Tons nach der Heftigkeit des Anblasens; je grösser die letztere, desto höher wird der Ton, daher auch der aus den Obertönen berechnete Grundton stets höher liegt als der direct beobachtete. Hr. Wertheim hat sich dieser Störung dadurch zu entziehen gesucht, dass er die drei zusammengehörigen Versuche bei gleicher Ausflussgeschwindigkeit, controlirt durch gleichen Druck des Manometers, anstellte, und wenn er Obertöne erhielt, aus diesen den zugehörigen Grundton berechnete. Er fand dabei, dass die Druckhöhen, welche die den einfachen Zahlen entsprechende Reihe der Obertöne hervorriefen, wuchsen im Verhältniss der Quadrate dieser Zahlen. Die so berechneten Schallgeschwindigkeiten stimmen ziemlich mit der direct beobachteten 332,3 Min.; meist sind sie etwas kleiner bis zu 2 Procent. Um die Pfeifen in tropfbaren Flüssigkeiten ertönen zu machen, muss die Mundöffnung schmaler und kürzer sein, als in der Luft; Hr. Wertheim hat viele Versuche anstellen

---

1) Siehe Liscovius in Pogg. Ann. LVIII. 95.

müssen, um die beste Stellung der Lippen der Pfeife zu finden, hat aber endlich an offenen Pfeifen ebenso klare und reine Töne erhalten, wie in der Luft; von anderen Nebentönen der Lippen oder des Metalls der Pfeife soll man dieselben leicht durch den Klang unterscheiden können; wesentlich für das Gelingen ist, dass die Flüssigkeiten von Staub und Luftblasen
112 rein sind. Die Correctionen und Unregelmässigkeiten sind im Wasser meist geringer als in der Luft. Das Mittel seiner Versuche für Wasser zwischen 10 und 20° C. ist 1173,4 m., wovon die einzelnen Versuche bis zu 3 Proc, abweichen. Mit dem Coëfficienten $\sqrt{\frac{3}{2}}$ multiplicirt, über dessen Bedeutung nachher, giebt dieselbe 1437,1 m., welche Grösse fast zusammenfällt mit der von Colladon und Sturm im Genfer-See bei 9° gefundenen 1435 m.

Es folgen noch Bestimmungen der Schallgeschwindigkeit vom Meerwasser in denselben, von verschiedenen anderen Flüssigkeiten in einem kleineren Apparate angestellt. Ich gebe in der folgenden Tabelle unter v die noch nicht mit $\sqrt{\frac{3}{2}}$ multiplicirte Schallgeschwindigkeit, unter c die cubische Zusammendrückung durch 100 Atmosphären.

		v	c
Seinewasser . . .	15°	1 173,4	0,004 91
— . . .	30°	1 250,9	0,004 33
— . . .	40°	1 324,8	0,003 88
— . . .	50°	1 349,0	0,003 75
— . . .	60°	1 408,2	0,003 46
Meerwasser		1 187,0	0,004 67
Kochsalzlösung		1 275,0	0,003 49
Alkohol von 36 Grad .		1 049,9	0,007 33
Absoluter Alkohol . .		947,0	0,009 47
Terpentinöl		989,8	0,008 00
Aether		946,3	0,010 02.

Die Werthe der Zusammendrückbarkeit sind berechnet unter der Voraussetzung, dass die Schallgeschwindigkeit im unbegrenzten Medium erhalten werde aus der in der Orgelpfeife bestimmten durch Multiplication mit $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Hr. Wertheim bemerkt, dass die bisher direct gemessenen Werthe derselben mit Ausnahme der des Aethers hinreichend übereinstimmen mit den berechneten, und dass die

Uebereinstimmung noch grösser sei mit den neuesten noch nicht veröffentlichten Versuchen von Grassi.[1])

Mit dem Factor $\sqrt{\frac{3}{2}}$ hat es folgende Bewandtniss. Denken 113
wir uns im Innern einer nach den Richtungen der Coordinaten verschieden stark gepressten festen elastischen Masse ein Massenelement abgegrenzt durch Ebenen, welche den Coordinatenebenen parallel sind, so wird der Druck X, den es in Richtung der x ausübt, eine lineare Function der verschiedenen Compressionen nach den drei Axen sein. Ist die Längeneinheit auf der Axe der x geworden $1 - \Delta x$, auf der der y, $1 - \Delta y$, auf der der z, $1 - \Delta z$, so wird sein:

$$X = a^2 \Delta x + b^2 (\Delta y + \Delta z)$$
$$Y = a^2 \Delta y + b^2 (\Delta x + \Delta z)$$
$$Z = a^2 \Delta z + b^2 (\Delta x + \Delta y).$$

Entstehen nun in einer festen unbegrenzten elastischen Masse ebene Wellen normal auf der Axe der x, so werden die Massenelemente nur in der Richtung der x comprimirt und dilatirt, weil seitlich in Richtung der y und z ebenso comprimirte Theilchen danebenliegen, also werden Δy und Δz Null werden, und die Kräfte, welche die Forpflanzung der Wellen bestimmen, werden:

$$X = a^2 \Delta x.$$

Wenn s^2 die Dichtigkeit bezeichnet, wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit a/s. Entstehen aber in einem Stabe longitudinale Wellen, und kann sich in jedem Querschnitt nach den Seiten hin das Gleichgewicht herstellen, so dass der Druck nach den Seiten hin 0 wird, so erhalten wir aus unseren Gleichungen:

$$X = a^2 \Delta x + b^2 (\Delta y + \Delta z)$$
$$0 = a^2 \Delta y + b^2 (\Delta x + \Delta z)$$
$$0 = a^2 \Delta z + b^2 (\Delta x + \Delta y),$$

woraus sich ergiebt:

$$X = \left(a^2 - \frac{2b^4}{a^2 + b^2}\right) \Delta x.$$

Poisson hatte aus theoretischen Betrachtungen hergeleitet,

1) Grassi. Note sur la compressibilité des liquides C. R. XXVII. 153*; Dingl. p. J. CX. 31*; Pol. Centrbl. 1848 p. 1335; Arch. d. sc. ph. et nat. IX. 58.

dass $a^2/b^2 = 3$ sei, Wertheim[1]) hat experimentell gefunden,
114 dass es $= 2$ sei; danach ergiebt sich in unseren letzten Ausdrucke:

$$X = \tfrac{2}{3} a^2 \Delta x$$

und die Schallgeschwindigkeit $\sqrt{\tfrac{2}{3}}\, a/s$. Dieselbe ist also um $\sqrt{\tfrac{2}{3}}$ kleiner, wenn die Masse quer gegen die Fortpflanzungsrichtung des Schalls sich frei ausdehnen kann und dadurch einen Theil ihrer Spannung verliert, als wenn dies nicht der Fall ist. Da Wertheim das Verhältniss der Schallgeschwindigkeit in einem verhältnissmässig dünnen Wassercylinder zu der im unbegrenzten Raume ebenso gross gefunden hatte, wie das derselben in einem elastischen Stabe zu der in einer Masse von drei Dimensionen, so schliesst er, dass die Flüssigkeiten während der Schallschwingungen nicht Zeit hätten, die Gleichheit des Drucks nach allen Seiten herzustellen, und deshalb sich ebenso bewegten wie feste elastische Körper. Wir können indessen diese Erklärung der Versuche nicht annehmen, weil der Unterschied der Schallgeschwindigkeit im Stabe und im unbegrenzten Körper wesentlich davon abhängt, dass sich jener nach den Seiten ausdehnen kann, was bei der von der Pfeife aus Messing oder Glas eingeschlossenen Wassermasse in den besprochenen Versuchen nicht der Fall war. Nun ist allerdings eine Messingröhre einer comprimirten Wassermasse gegenüber nicht als so absolut fest zu setzen, wie es bei den Luftschwingungen ist. Schon bei den letzteren erniedrigt sich der Ton der Pfeife, wenn sie aus Holz gefertigt wird, und noch mehr, wenn ein Theil der Wand durch eine nachgiebigere Substanz, z. B. Pergament, ersetzt wird, und etwas Aehnliches muss bei Wasserschwingungen in Messingröhren vorkommen. Indessen kann dieser Einfluss nicht von der Art der Röhre unabhängig sein, er muss proportional sein ihrem Radius, umgekehrt proportional ihrer Wanddicke und ihrem Elasticitätscoëfficenten. Ob sich die Resultate der Wertheim'schen Versuche dadurch erklären lassen, muss künftigen Untersuchungen vorbehalten bleiben.

---

1) C. R. XXXVI. 206.

Hr. Seebeck hat eine Rechnungsmethode angegeben, um 115
für die Transversalschwingungen nicht gespannter Stäbe die Lage der Knoten, der Wendepunkte, der Punkte der stärksten Schwingung und Biegung nach einem gemeinsamen Verfahren für die verschiedenen Befestigungsarten der Enden bis zu beliebig genauen Näherungswerthen berechnen zu können. Die Tonhöhen waren schon aus den Untersuchungen von D. Bernoulli, Euler und Poisson bekannt, die Knoten für Stäbe mit zwei freien Enden durch ersteren, Riccati und Strehlke. Hr. Seebeck ermittelt aus der allgemeinen Gleichung für die Form eines schwingenden Stabes:

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} + C\sin\alpha x + D\cos\alpha x$$

mit Berücksichtigung der Bedingungen für die Enden zuerst die verschiedenen Werthe von α, verschiedenen Tönen entsprechend, und bringt dann, indem er $y = 0$ für die Knoten, $d^2y/dx^2 = 0$ für die Wendepunkte setzt, die Gleichung auf die Form:

$$\sin\left(\alpha x - \frac{\pi}{4}\right) = \delta\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

wo $\delta = e^{-\alpha x} \pm e^{-\alpha(l-x)} \pm e^{-\alpha l}(\sin\alpha x + \cos\alpha x)$ und für alle Töne mit Ausnahme des ersten eine sehr kleine Grösse ist. Man setzt es $= 0$, erhält dadurch einen ersten Näherungswerth von αx, mit diesem einen genaueren von δ und so fort. Für den ersten Ton ist der erste Näherungswerth $\alpha x = 1{,}04$. In dieser Form giebt die Gleichung die Entfernung der Knoten eines Stabes, dessen eines Ende eingeklemmt ist, das andere frei, vom freien Ende, die der Wendepunkte desselben vom festen Ende; die der Knoten eines an beiden Enden freien Stabes und die der Wendepunkte eines an beiden Enden eingeklemmten Stabes von einem beliebigen der beiden Enden. Setzt man dagegen:

$$\delta = -e^{-\alpha x} \pm e^{-\alpha(l-x)} \pm (\sin\alpha x + \cos\alpha x),$$

so giebt die Gleichung die Wendepunkte eines freien Stabes und die Knoten eines an beiden Enden eingeklemmten.

Ist der Stab an einem Ende angestemmt, am anderen eingeklemmt oder frei, so verhält sich sein angestemmtes Ende ganz so wie die Mitte eines an beiden Enden eingeklemmten

116 oder freien Stabes sich bei den geraden Tönen verhält, und man führt so diese Fälle auf die vorhergehenden zurück. Ist der Stab mit beiden Enden angestemmt, so theilt er sich ganz einfach in gleiche Theile ab. Hr. Seebeck giebt dann noch eine Tafel der so berechneten Werthe für die verschiedenen Fälle.

Um die Correction zu ermitteln, welche bei Berechnung der Töne gespannter Saiten durch deren Steifheit bedingt wird, hatten Savart und Duhamel die Regel aufgestellt, dass:

$$n^2 = n_{,}^2 + n^2_{,,},$$

wo n die Schwingungszahl der steifen gespannten Saite, $n_{,}$ die derselben ungespannt, $n_{,,}$ die derselben gespannt und als nicht steif betrachtet. Hr. Seebeck zeigt, dass dies theoretisch nur gerechtfertigt sei, wenn beide Enden um Queraxen drehbar und nicht eingeklemmt seien. Um die Correction genauer zu ermitteln ist derselbe von der allgemeinen Bewegungsgleichung eines gespannten Stabes ausgegangen. Ist p das Gewicht der Längeneinheit des Stabes, P das spannende Gewicht, und $a\, d^2y/dx^2$ das elastische Moment, sodass bei einem cylindrischen Stabe vom Halbmesser r und dem Elasticitätsmodulus m, $a = mr^4\pi/4$ ist, so ist die Bewegungsgleichung:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Pg}{p}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{ag}{p}\frac{d^4y}{dx^4}.$$

Ein besonderes Integral dieser Gleichung, welches einem einzelnen Tone von der Schwingungszahl n entspricht, ist:

$$y = A_{,}e^{\alpha x + nt} + B_{,}e^{-\alpha x + nt} + C_{,}\sin(\beta x + nt) + D_{,}\cos(\beta x + nt)$$
$$+ A_{,,}e^{\alpha x - nt} + B_{,,}e^{-\alpha x - nt} + C_{,,}\sin(\beta x - nt) + D_{,,}\cos(\beta x + nt)$$

wenn:

$$\alpha^2 = \frac{P}{2a} + \sqrt{\frac{P^2}{4a^2} + \frac{n^2p}{ag}}$$

$$\beta^2 = -\frac{P}{2a} + \sqrt{\frac{P^2}{4a^2} + \frac{n^2p}{ag}}.$$

Die Coëfficienten A, B, C, D bestimmen sich aus den Be-
117 dingungen, denen die Enden unterworfen sind. Sind beide Enden eingeklemmt, so erhält man:

$$\operatorname{tg}\beta l = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2}\left\{1 + 2(e^{-2\alpha l} + e^{-4\alpha l} + \ldots) - \frac{2}{\cos\beta l}(e^{\alpha l} + e^{-3\alpha l} + \ldots)\right\}$$

und kann daraus Näherungswerthe berechnen, indem man vorläufig setzt:

$$\operatorname{tg}\beta l = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} = \frac{2n}{P}\sqrt{\frac{ap}{g}}$$

und aus dem oben angegebenen Werthe von β^2 findet:

$$n^2 = \frac{ag}{p}\beta^4 + \frac{Pg}{p}\beta^2.$$

Hr. Seebeck fand die Ergebnisse der Rechnung bei einem mit den nöthigen Vorsichtsmassregeln angestellten Versuche an einer starken und kurzen Stahlsaite vollkommen genau bestätigt. Für gewöhnliche Saiten von geringer Steifheit giebt Hr. Seebeck mit Vernachlässigung der zweiten Potenzen von $\sqrt{a/Pl^2}$ folgende Formel:

$$n = n_{,,}\left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{Pl^2}}\right)$$
$$= n_{,,}\left(1 + \frac{r^2}{l}\sqrt{\frac{m\pi}{P}}\right).$$

Die Correction beträgt ungefähr die Hälfte für Saiten, deren eines Ende an einen Steg nur angelehnt frei herunterhängt, also wie das angestemmte Ende eines Stabes sich bewegt.

Fehler der harmonischen Reinheit der Obertöne treten erst auf, wenn man die zweite Potenz von $\sqrt{a/Pl^2}$ berücksichtigen muss. Man erhält für die Schwingungsmenge des $i$ten Tones in der Zeit 2π:

$$n = iN(1 + i^2\delta),$$

wenn:

$$N = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{Pg}{p}\left(1 + 4\sqrt{\frac{a}{Pl^2}} + 12\frac{a}{Pl^2}\right)}$$

und:

$$\delta = \tfrac{1}{2}\pi\frac{a}{Pl^2}.$$

Bei den gewöhnlichen Monochordsaiten ist diese Abweichung 118
schon völlig unmerklich; sind die Saiten aber so stark, dass sie merklich wird, so klingt auch der Grundton unrein wegen der Beimischung unreiner Obertöne.

Die Arbeit von Hrn. Duhamel enthält Erörterungen über die Superposition der Schwingungen an tönenden festen Körpern; es ist darin nichts neues enthalten.

Hr. Scott Russel hat Gelegenheit gehabt, das von Doppler[1]) zuerst erschlossene, von Buys-Ballot beobach-
125 tete Phänomen der Veränderung eines Tones durch Bewegung des tönenden Körpers oder des Beobachters bei viel grösserer Geschwindigkeit dieser Bewegung zu prüfen. Der Beobachter befand sich auf einer Locomotive, welche sich 50 bis 60 engl. Meilen in der Stunde (22,2 bis 26,6 m. in der Secunde) fortbewegte, wobei die Veränderung des Tones einer feststehenden Locomotivenpfeife im Augenblick des Vorbeifahrens eine ganzen Ton beträgt. Um ebensoviel werden die von feststehenden Körpern zurückgeworfenen Geräusche des Eisenbahnzuges im Vergleich zu den direct vernommenen scheinbar verändert. Die dadurch bedingte Dissonanz ist nach dem Verfasser Grund, warum das Geräusch unter Brücken und in Tunnels so unangenehm wird. Gegen seine Erklärung des Phänomens, welche mit der von Doppler übereinstimmt, machte D. Brewster mündliche Einwendungen, indem er es physiologischen Ursachen zuschieben zu müssen meint, und es mit dem subjectiven Licht- und Farbenerscheinungen vergleicht, welche durchbrochene rotirende Schirme hervorbringen. Welcher Zusammenhang dazwischen sein soll, ist nicht angegeben.

Hr. Montigny bemerkt, dass er dasselbe Phänomen an dem Tone einer Kirchenglocke mehrere Jahre früher bemerkt, indem er sich durch möglichst schnelles Laufen gegen sie hin, oder von ihr fort bewegte, und sich auch dieselbe Erklärung davon gegeben habe. (Es muss, wie Hr. Crahay hinzufügt, schnelles Laufen dazu gehören, die Beobachtung in dieser Weise zu machen.)

Unter den günstigsten Umständen kann man, wie Referent beobachtet hat, die besprochene Erscheinung an den Geläuten von Schlitten wahrnehmen, welche möglichst schnell auf einer guten Bahn dahinfahren. Wenn der Beobachter dicht an der Bahn steht, hört er im Augenblicke, wo der Schlitten an ihm vorüberfährt, den Ton der Glocken meist um einen halben Ton sinken.

---

1) Berl. Ber. 1845, S. 154.

Stokes. On some points in the received theory of sound. Phil. Mag. XXXIV. 52*. 93

Challis. Continuation of researches in the mathematical theory of aërial vibrations. Phil. Mag. XXXIV. 38*.

Moon. On a difficulty suggested by professor Challis in the theory of sound. Phil. Mag. XXXIV. 136*.

Stokes. On the theory of sound. In reply to professor Challis. Phil. Mag. XXXIV. 203.

Challis. On the theoretical value of the velocity of sound, in reply to Mr. Stokes. Phil. Mag. XXXIV. 284*.

Challis. On the theory of sound. Phil. Mag. XXXIV. 348*.

Challis. Determination of the velocity of sound on the principles of hydrodynamics. Phil. Mag. XXXIV. 353*.

Airy. On the difficulty in the theory of sound. Phil. Mag. XXXIV. 401*.

Challis. On spherical waves in an elastic fluid. Phil. Mag. XXXIV. 449*.

Challis. On the views of the astronomer royal. Phil. Mag. XXXIV. 241.

Vorstehend ist die Literatur des Streites gegeben, den Herr Challis über die theoretische Bestimmung der Schallgeschwindigkeit angeregt hatte. Es kommen in diesen Aufsätzen keine neuen Gründe und Gegengründe zur Sprache ausser denen, welche schon in dem vorjährigen Berichte über diesen Gegenstand besprochen worden sind. Der Streit wird auf eine unfruchtbare Weise nur dadurch verlängert, dass Prof. Challis streng die veralteten Regeln des Disputirens festhaltend, viele Weitläufigkeiten hervorruft, und dabei den Sinn von keinem einzigen Argumente seiner Gegner versteht. 94
Ich halte es deshalb für unnöthig, weiter über den Verlauf des Streites zu berichten, den übrigens auch beide streitende Theile abgebrochen haben.

Zu erwähnen ist nur die numerische Bestimmung der Schallgeschwindigkeit, welche Challis für seine Schallstrahlen (rayvibrations) giebt, und zwar an zwei Stellen, Phil. Mag. XXXIV. p. 98 und 364. Diese Art der Luftbewegung wird durch ein besonderes particuläres Integral der aërodynamischen Gleichungen ausgedrückt, und kann der Anschauung am besten zugänglich gemacht werden, wenn man ein System ebener Wellen um eine beliebig durch dasselbe gezogene gerade Linie als Axe gedreht denkt und alle die Wellensysteme, welche

durch die verschiedenen Lagen des gedrehten Systems gegeben sind, als gleichzeitig vorhanden annimmt. In der Axe findet dann eine Wellenbewegung statt, wobei sich die Lufttheilchen nur in der Richtung der Axe verschieben, und die einzelnen Wellenphasen sich mit grösserer Geschwindigkeit fortpflanzen als in ebenen Wellen, und zwar ist die Fortpflanzung desto schneller, je grösser der Winkel ist, den die Drehungsaxe mit den Normalen der elementaren ebenen Wellen bildet. Rings um die Axe findet nicht blos ihr parallel, sondern auch senkrecht gegen sie gerichtet eine Bewegung der Lufttheilchen statt, doch giebt es eine Anzahl von concentrischen Cylinderflächen, in denen, wie in der Axe, die Bewegung dieser nur parallel ist. Diese Cylinderflächen haben nicht überall gleiche Abstände von einander, wohl aber werden ihre Abstände in unendlich grosser Entfernung von der Axe einer Constanten gleich, welche Challis auf Seite 94 mit Δ bezeichnet. Nun stellt er die Behauptung auf, dass Δ der halben Wellenlänge längs der Hauptaxe gleich sei, ohne Gründe dafür anzuführen. Es entspricht dieser Fall der Annahme, dass die Drehungsaxe mit der Normale auf den elementaren ebenen Wellen einen Winkel von 32° 29′ bilde, und die Rechnung ergiebt dann die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu 1086 engl. Fuss, während die Beobachtungen 1089 ergeben, was allerdings sehr viel näher stimmt, als es die theoretisch berechnete Geschwindigkeit der ebenen Wellen thut, wenn man die Erwärmung der Luft durch Druck vernachlässigt. Die Betrachtung der besprochenen Be-
95 wegungsart, als eines Systemes ebener Wellen, gegen welche Challis allerdings protestirt, weil er überhaupt die Möglichkeit ebener Wellen nicht zugeben will, zeigt gleich, dass gar kein Grund vorhanden ist einen Winkel bei der Zusammensetzung besonders hervorzuheben, und dass dieselbe mit jedem beliebigen Winkel möglich sein muss. Ebensowenig ist dem Berichterstatter gelungen aus der Betrachtung der Differentialgleichungen, welche Challis zu Grunde legt, einen solchen einzelnen Werth der betreffenden Constanten herzuleiten, sondern dieser Werth bleibt vollkommen willkürlich. Daher ist jene Bestimmung der Schallgeschwindigkeit auch willkürlich und ihre Uebereinstimmung mit dem Versuch nur zufällig.

Challis hatte aus den exacten aërodynamischen Glei-
chungen nachgewiesen, dass wenn a die Fortpflanzungsgeschwin-
digkeit des Schalles ist und v die Geschwindigkeit, mit der
sich die Lufttheilchen in einer bestimmten Wellenphase be-
wegen, die Wellenphase mit der Geschwindigkeit $a + v$ vor-
rückt. Daraus folgt, dass die Phasen mit negativem v einer
Welle schliesslich von denen mit positivem v der nachfolgen-
den eingeholt und endlich überholt werden müssten. Weil an
einem und demselben Orte in der Luft nicht gleichzeitig ver-
schiedene Wellenphasen mit verschiedenem Druck und ver-
schiedener Geschwindigkeit stattfinden können, schloss Challis
weiter, dass ein solches Ueberholen der Wellen und also auch
überhaupt ebene Wellen nicht möglich seien. (Siehe den vor-
jährigen Bericht.) Stokes erinnerte dagegen, dass die hydro-
dynamischen Gleichungen die Voraussetzung continuirlich inein-
ander übergehender Grössen des Drucks und der Geschwindigkeit
machten, aber nicht mehr passten, wo plötzliche Sprünge dieser
Grössen stattfänden; ein solcher Sprung trete aber ein, wo eine
Wellenphase die andere einholte. Alle Integrale dieser Glei-
chungen hätten also auch nur Gültigkeit bis zu diesem Augen-
blicke und nicht weiter. Er verglich das Eintreten dieses
Falls mit einer brandenden Wasserwelle. Letzteren Vergleich
führt Airy in dem oben angeführten Aufsatze noch weiter
durch, indem er auf die Aehnlichkeit der Gleichungen für die
Luftbewegung mit denen aufmerksam macht, welche er für
die Wellenbewegung in einem Canal von endlicher Tiefe in
der Encyclopaedia Metropolitana Art. „Tides and Waves“ ent- 96
wickelt hat. Auch die letzteren führen zu einem kritischen
Zustande der Bewegung, auf den die hydrodynamischen Glei-
chungen nicht mehr anwendbar sind, und der sich in der Wirk-
lichkeit durch das Branden der Wellen äussert. Ebensowenig,
wie aus der analytischen Schwierigkeit folge, dass in einem
Flusse nicht geradlinige Wogen vorkommen könnten, dürfe
man aus ihr mit Challis die Unmöglichkeit ebener Luftwellen
schliessen. Airy fügt noch die Meinung hinzu, dass diese
Brandung der Luftwellen dem Klange des Zischens, oder des
S, vielleicht auch des *R* entspräche. Er beruft sich darauf,
dass das *S* nicht durch das Echo zurückgegeben werde, eben-

sowenig wie brandende Wasserwogen als solche von einer geraden Wand reflectirt würden, und zweitens darauf, dass zischende Geräusche sich längs der Oberfläche gebogener Mauern (whispering galleries) in auffallender Stärke fortpflanzten, was bei anderen regelmässig reflectirten Tönen nicht der Fall sei. Ebenso sehe man auch brandende Wellen weite Strecken an Mauern hinlaufen, unter Umständen, wo regelmässige Wellen reflectirt würden. In seiner Entgegnung auf diese Bemerkungen wiederholt Challis nur seine früheren Behauptungen über die Unmöglichkeit ebener Wellen, und führt als Gegengrund gegen die Veränderung in der Form der Schallwellen bei ihrer Fortpflanzung an, dass nach Biots Versuchen Worte durch Röhren von 3120 Fuss Länge deutlich gehört werden können. So lange wir indessen nichts Bestimmtes über die Grösse der Excursionen der Lufttheilchen bei den Schallschwingungen wissen, können wir auch nicht beurtheilen, ob die Aenderungen der Schallwellenform gross genug sind, um bemerkt zu werden.

In einer Note von R. Moon aus den Verhandlungen der Cambridge Philosophical Society werden die Einwürfe von Challis gegen die bekannte Art, den grösseren Werth der beobachteten Schallgeschwindigkeit im Vergleiche zur berechneten durch die Wärmeentwicklung zu erklären, beseitigt. In der aërodynamischen Gleichung, welche man mit Berücksichtigung der Temperaturänderung in der bekannten Weise erhält, kommt als Summand ein Glied vor, welches mit dieser Temperaturänderung multiplicirt ist; dessen übrige Factoren
97 aber von derselben Ordnung sind, wie die übrigen Summanden der Gleichung; an diesem Gliede hatte Challis Anstoss genommen, weil es in der gewöhnlichen Behandlung der Gleichung nicht berücksichtigt würde. Moon erinnert daran, dass bei verschwindend kleinen Schwingungen die Temperaturänderung selbst verschwindend klein sei, und also das besprochene Glied, so lange es sich nur um die erste Annäherung handele, gegen die übrigen zu vernachlässigen sei, wie es bisher schon immer geschehen ist.

Doppler. Ueber ein Mittel, die Brechung der Schallstrahlen experimentell nachzuweisen und numerisch zu bestimmen. Wien. Sitzungsb. 1840. Mai 322*.

Hr. Doppler schlägt vor, das Phänomen der Brechung
an den Oberflächen verschiedener Media und die Grösse des
Brechungsverhältnisses beim Schall durch Beobachtung der
totalen Reflexion zu bestimmen. In der That kann man aus
dem Einfallswinkel, wo die totale Reflexion anfängt, das
Brechungsverhältniss berechnen. Abgesehen von den experi-
mentellen Schwierigkeiten der vorgeschlagenen Methoden, scheint
eine theoretische Verwechslung dabei stattzufinden. Hr Dopp-
ler setzt voraus totale Reflexion beim Uebergang aus Wasser
oder festen Körpern in Luft zu finden, wie es beim Lichte
der Fall ist. Bei diesem haben allerdings die dichteren Körper 98
das stärkere Brechungsverhältniss, aber nur deshalb, weil in
ihnen die Geschwindigkeit des Lichts die geringere ist. Beim
Schall ist es umgekehrt. Bei der wesentlichen Verknüpfung,
welche zwischen dem Brechungsverhältniss und den respectiven
Fortpflanzungsgeschwindigkeiten besteht, müssen wir totale Re-
flexion des Schalls vielmehr beim Uebergang aus Luft auf
Wasser oder feste Körper erwarten. Hr. Doppler deutet
gewisse Beobachtungen, die bei der Messung der Schallge-
schwindigkeit im Genfer See gemacht wurden, als totale Re-
flexion, indessen sind hier so viele andere Erklärungen möglich,
dass darauf kein Schluss zu gründen ist.

XIV.

Ueber Combinationstöne.

Erste Mittheilung aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom 22. Mai 1856. S. 279—285.

Ich erlaube mir der Akademie folgende Resultate meiner
279 Untersuchungen über die Combinationstöne mitzutheilen:

Wenn wir mit m und n ganze Zahlen bezeichnen, welche keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so stand schon lange fest, dass zwei Töne von den Schwingungszahlen $m\lambda$ und $(m+1)\lambda$ den Combinationston λ geben. Für zwei Töne dagegen von den Schwingungszahlen $m\lambda$ und $n\lambda$ im Allgemeinen hatten W. Weber und M. Ohm die Meinung aufgestellt, dass der Combinationston ebenfalls die Schwingungszahl λ habe; während Hällström als ersten Combinationston den Ton $(m-n)\lambda$ aufstellte, zugleich aber auch eine Reihe anderer Combinationstöne höherer Ordnung annahm von den Schwingungszahlen $(2n-m)\lambda$, $(3m-2n)\lambda$, u. s. w. Die Combinationstöne höherer Ordnung sollten durch Combination eines Combinationstones niederer Ordnung mit einem der ursprünglichen Töne sich bilden. Dem schlossen sich Scheibler und Roeber in ihren Untersuchungen über die Zahl der Schwebungen an; aber mit Recht stellte hierbei Poggendorff die Frage, ob diese sogenannten Combinationstöne höherer Ordnung nicht etwa Combinationstöne der höheren Nebentöne sein könnten, welche bei den Tönen fast aller musikalischen Instrumente vorkommen.

Um darüber entscheiden zu können, handelte es sich zunächst darum Töne herzustellen, denen die höheren Nebentöne

ganz fehlen, also Töne, bei denen die Elongationen der schwingenden Theilchen als Function der Zeit t durch ein einziges Glied von der Form $A \sin(at + c)$ ausgedrückt werden, und nicht, wie es gewöhnlich der Fall ist, durch eine Summe solcher Glieder mit verschiedenen Werthen von a. Wir wollen solche Töne nach Analogie der einfachen Farben des Spectrums 280
einfache Töne nennen, im Gegensatz zu den zusammengesetzten Tönen der musikalischen Instrumente, welche eigentlich Accorde mit dominirendem Grundton sind.

1) Einfache Töne kann man nach folgender allgemeinen Methode herstellen: Man nehme einen tönenden Körper, dessen Schallschwingungen nicht leicht an die Luft übergehen, und errege durch Resonanz die Schwingungen eines zweiten elastischen Körpers, der seine Schwingungen leicht an die Luft abgiebt, dessen Grundton mit dem des primär schwingenden Körpers genau übereinstimmt, dessen höhere Obertöne aber von denen des letzteren hinreichend verschieden sind: so wird der resonirende Körper nur im Grundtone stark mitklingen und diesen an die Luft abgeben, die höheren Obertöne des Schallerregers werden ausgeschlossen bleiben. Practisch ausführbar ist dieses Princip mittels einer Stimmgabel, als Schallerregers, deren Töne man entweder durch die Resonanz eines Luftraums oder einer Saite, auf welche man die Gabel in einer bestimmten Entfernung von ihrem Ende aufsetzt, verstärkt. Der Luftraum darf aber nicht die einfache Gestalt einer ganz offenen oder ganz gedackten Orgelpfeife haben, und das resonirende Stück der Saite muss in einem Punkte seiner Länge eine kleine Belastung haben, damit die höheren Nebentöne dieser Resonatoren nicht harmonisch zum Grundton seien, wie das bei den Orgelpfeifen und unbelasteten Saiten der Fall ist. Die Stimmgabeln geben nämlich, wie ich gefunden habe, ausser den seit *Chladni* bekannten unharmonischen höheren Beitönen, welche mit Bildung einer grösseren Zahl von Knotenstellen entstehen, auch schwache harmonische Beitöne, welche dadurch ausgeschlossen werden müssen, dass man die höheren Beitöne der resonirenden Körper unharmonisch macht. Die Octave des Grundtons war bei allen Stimmgabeln, welche ich geprüft habe, immer deutlich nachzuweisen.

Indem ich zwei einfache Töne dieser Art erklingen liess, war ich immer nur im Stande einen einzigen tieferen Ton deutlich zu hören, und zwar den von der Schwingungszahl $(m - n)\lambda$, also Hällström's ersten Combinationston.

251 Ich konnte mittels meiner Stimmgabeln, die mit Hülfe der Schwebungen genau nach den angegebenen Zahlenverhältnissen gestimmt waren, folgende Combinationen bilden:

Primäre Töne		Combinationston	Zahlenverhältniss der primären Töne unter einander	Zahlenverhältniss des Combinationstons
b	*f'*	*B*	2 : 3	1
f'	*b'*	*B*	3 : 4	1
b	*d'*	*B*—1	4 : 5	1
d'	*f'*	*B*—1	5 : 6	1
f'	*as'*	*B*—1	6 : 7	1
b	*g'*	*es*	3 : 5	2
d'	*as'*	*B*	5 : 7	2
d'	*b'*	*f*	5 : 8	3

In den letzten drei Fällen war ich nicht im Stande, den von Weber und Ohm geforderten Ton 1 zu hören, ebensowenig, als es mir bei allen diesen Versuchen gelang irgend einen von Hällström's Combinationstönen höherer Ordnung zu erkennen. Andererseits ist zu bemerken, dass wenn man die Stimmgabeln durch Aufkleben von Wachs ein wenig verstimmt, man sehr leise die Schwebungen hört, welche Scheibler und Roeber aus dem Vorhandensein der Combinationstöne höherer Ordnung erklärt und berechnet haben.

Ebenso fand ich immer, dass die Combinationstöne $(m - n)\lambda$ auch bei zwei Tönen von Orgelpfeifen oder der Sirene die am stärksten hörbaren waren.

2) Um die Combinationstöne deutlich zu hören, müssen die ursprünglichen Töne stark sein. Die Stärke des Combinationstons wächst in einem viel stärkeren Verhältnisse als die der primären Töne, so dass endlich bei grosser Stärke diese neben dem Combinationstone fast verschwinden können.

Ich habe nun gefunden, dass bei hinreichend starken Tönen von den Schwingungszahlen p und q neben dem bisher bekannten Combinationstone $p - q$ zunächst am deutlichsten ein

höherer Ton $p + q$ hervortritt, dessen Existenz ich noch nirgends erwähnt gefunden habe. Die durch Luftresonanz ver- 282 stärkten Töne der Stimmgabeln waren nicht stark genug, um diesen Ton leicht hören zu lassen; doch habe ich ihn bei diesen zuerst wirklich gehört, nachdem ich durch theoretische Untersuchungen zu der Ueberzeugung gekommen war, dass er da sein müsse. Ich war im Stande neben *b* und *f'* (2λ und 3λ) den Ton *d''* (5λ) und neben *f'* und *b'* (3λ und 4λ) den Ton *as''* (7λ) zu hören. Dagegen ist bei der mehrstimmigen Sirene und bei Orgelpfeifen, wenn man das Ohr den Lippen der Pfeifen nähert, der Ton sehr leicht mit grösster Bestimmtheit zu hören. Eine Verwechselung mit den höheren Beitönen der primären Töne ist nicht möglich, weil er von diesen immer verschieden ist, wenn nicht n selbst ein Multiplum von m ist.

3) Was die Theorie der Combinationstöne betrifft, so leiden die bisher aufgestellten Erklärungen an grossen Schwierigkeiten, sobald man den Ton nicht als eine Reihe getrennter Stösse, sondern als eine regelmässige Wellenbewegung betrachtet; sie müssen ausserdem noch dem Ohre eine besondere Eigenschaft zuschreiben, wonach es zusammentreffende Stösse nicht blos als Summe der beiden einzelnen auffasst, sondern diese Doppelstösse noch besonders combinirt, und endlich würden jene Theorien schwerlich im Stande sein, die Entstehung des Tones $p + q$ genügend zu erklären. Ich erlaube mir daher der Academie eine neue Erklärung vorzulegen, welche nicht nöthig macht dem menschlichen Ohre besondere Eigenschaften beizulegen, sondern sich ganz auf eine weitere Entwickelung bekannter mechanischer Sätze stützt.

Es ist bekannt, dass das Princip von der ungestörten Superposition oscillirender Bewegungen im allgemeinen nur so lange gilt, als die Bewegungen klein sind, so klein, dass die Bewegungskräfte, welche durch die Verschiebungen der kleinsten Theile des schwingenden Mittels gegen einander hervorgerufen werden, diesen Verschiebungen selbst merklich proportional sind. Es lässt sich nun zeigen, dass *Combinationstöne entstehen müssen, sobald die Schwingungen so gross werden, dass auch noch das Quadrat der Verschiebungen auf die Bewegungen Einfluss erhält.* Es möge

283 für jetzt genügen, als einfachstes Beispiel die Bewegung eines einzelnen Massenpunktes unter dem Einfluss eines Wellenzuges zu betrachten, um das Resultat daran zu entwickeln. Nach einer ganz ähnlichen Methode lassen sich auch die Bewegungen der Luft und anderer elastischer Medien behandeln. Ein Punkt von der Masse m soll in Richtung der x-Axe oscilliren können. Die Kraft, welche ihn in seine Gleichgewichtslage zurückzuführen strebt, sei:

$$k = ax + bx^2.$$

Es mögen auf ihn zwei Schallwellenzüge einwirken mit der Kraft $f \sin(pt)$ und $g \sin(qt + c)$, so ist seine Bewegungsgleichung:

$$-m\frac{d^2x}{dt^2} = ax + bx^2 + f\sin(pt) + g\sin(qt + c).$$

Diese Gleichung kann man durch eine Reihe integriren, indem man darin setzt:

$$x = \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \text{etc.},$$
$$f = \varepsilon f_1,$$
$$g = \varepsilon g_1$$

und die mit gleichen Potenzen von ε multiplicirten Glieder einzeln gleich Null setzt, also:

$$1)\quad ax_1 + m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -f_1\sin(pt) - g_1\sin(qt + c).$$

$$2)\quad ax_2 + m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -bx_1^2.$$

$$3)\quad ax_3 + m\frac{d^2x_3}{dt^2} = -2bx_1x_2 \text{ etc.}$$

Aus der ersten Gleichung ergiebt sich:

$$x_1 = A\sin\left(t\sqrt{\frac{a}{m}} + b\right) + u\sin(pt) + v\sin(qt + c),$$

wobei:

$$u = \frac{f_1}{mp^2 - a} \text{ und } v = \frac{g_1}{mq^2 - a}.$$

Es ist dies das bekannte Resultat für unendlich kleine Schwingungen, wonach der mitschwingende Körper nur seinen eigenen Ton $\sqrt{a/m}$ und die ihm mitgetheilten p und q angiebt. Da der Eigenton hierbei schnell verschwindet, können wir $A = 0$ setzen. Dann giebt die Gleichung (2):

$$x_2 = -\frac{b}{2a}(u^2+v^2) - \frac{u^2}{2(4mp^2-a)}\cos(2pt),$$ 284

$$-\frac{v^2}{2(4mq^2-a)}\cos 2(qt+c) + \frac{uv}{m(p-q)^2-a}\cos[(p-q)t-c],$$

$$-\frac{uv}{m(p+q)^2-a}\cos[(p+q)t+c].$$

Dieses zweite Glied der Reihe von x enthält, wie man sieht, ausser einer Constanten, die Töne $2p$, $2q$, $(p-q)$ und $(p+q)$. Ist der Eigenton $\sqrt{a/m}$ des mitschwingenden Körpers tiefer als $(p-q)$, wie man es für das mit den Gehörknöchelchen verbundene Trommelfell des Ohres in den meisten Fällen wird voraussetzen dürfen, und sind die Intensitäten u und v nahe gleich, so wird von den einzelnen Gliedern von x_2 der Ton $(p-q)$ die grösste Intensität haben; er entspricht dem bekannten tiefen Combinationstone. Der Ton $(p+q)$ wird viel schwächer sein, und die Töne $2p$ und $2q$ werden als schwache harmonische Obertöne der primären schwer zu hören sein.

Das dritte Glied der Reihe x_3 enthält die Töne $3p$, $3q$, $2p+q$, $2p-q$, $p+2q$, $p-2q$, p und q. Von diesen ist $2p-q$ oder $2q-p$ ein Combinationston zweiter Ordnung nach Hällströms Bezeichnung. Ebenso giebt das vierte Glied x_4 Combinationstöne dritter Ordnung u. s. w.

Wenn wir nun annehmen, dass bei den Schwingungen des Paukenfells und seiner Annexa das Quadrat der Elongationen auf die Schwingungen Einfluss gewinnt, so geben die ausgeführten mechanischen Entwickelungen einen vollständigen Aufschluss über die Entstehung der Combinationstöne. Namentlich erklärt die neue Theorie ebensogut das Entstehen der Töne $(p+q)$, wie der Töne $(p-q)$, und lässt einsehen, warum bei vermehrter Intensität u und v der primären Töne die der Combinationstöne, welche proportional uv ist, in einem schnelleren Verhältnisse steigt.

Aus der Voraussetzung über die Grösse der wirkenden Kraft, welche wir oben gemacht haben:

$$k = ax + bx^2,$$

folgt, dass, bei einem Zeichenwechsel von x, k nicht blos sein Zeichen, sondern auch seinen absoluten Werth ändert. Diese 285
Annahme passt also nur auf einen elastischen Körper, der sich

gegen positive und negative Verschiebungen nicht symmetrisch verhält; nur bei einem solchen kann das Quadrat der Elongationen Einfluss auf die Bewegungen haben, und die Combinationstöne erster Ordnung hervorrufen. Unter den im Ohre des Menschen vorhandenen schwingenden Theilen ist nun besonders das Trommelfell durch seine Asymmetrie ausgezeichnet, indem es durch den Stiel des Hammers stark nach innen gezogen ist, und ich glaube deshalb die Vermuthung aufstellen zu dürfen, dass namentlich diese eigenthümliche Form des Trommelfells das Entstehen der Combinationstöne bedinge.

Es folgt aus den gegebenen Entwickelungen, dass Combinationstöne nicht nur im Ohre, sondern auch ausserhalb des Ohres objectiv entstehen können. Es ist mir bisher erst in einem Falle gelungen die objective Existenz der Combinationstöne nachzuweisen, nämlich an der von Dove beschriebenen mehrstimmigen Sirene, wo sie bekanntlich in ausserordentlicher Stärke auftreten. Ich fand, dass die Töne $(p + q)$ dieses Instruments im Stande sind eine Membran, deren Grundton mit ihnen übereinstimmt, in Mitschwingung zu versetzen. Ausserdem beobachtete ich an einer ähnlichen Sirene, welche ich habe construiren lassen, und welche auf derselben Axe zwei Scheiben mit je vier Löcherreihen trägt, und für jede Scheibe einen besonderen Windkasten hat, dass die Combinationstöne nur dann ungewöhnlich stark sind, wenn beide primäre Töne an derselben Scheibe, nicht aber, wenn jeder an einer anderen Scheibe angegeben wird. Die Beziehung des Ohrs zu den beiden Tönen wird dadurch nicht geändert, dass ihre Erregungsstellen entfernter voneinander liegen, wohl aber wird dadurch vermieden, dass die am stärksten schwingenden Centra der beiden Wellenzüge ineinander greifen. Auch daraus ergiebt sich die objective Natur dieser Combinationstöne.

XV.

Ueber Combinationstöne.

Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie. Bd. 99.
S. 497—540. (1856.)

Man weiss im allgemeinen, dass wenn in derselben Luft- 497
masse von mehreren tönenden Körpern Schallwellenzüge erregt werden, jedes einzelne Wellensystem sich so ausbreitet und so verhält, wie wenn die übrigen gar nicht vorhanden wären. Es findet eine ungestörte Superposition der verschiedenen Wellenzüge in der Luftmasse statt. Andererseits weiss man, dass auch das menschliche Ohr, gleichzeitig von mehreren solchen Schallwellenzügen getroffen, die Fähigkeit hat jeden einzelnen unter ihnen einzeln wahrzunehmen und zu erkennen. Aber das Ohr hört in solchem Falle nicht blos die verschiedenen von den tönenden Körpern erregten Töne, sondern es hört ausser diesen, wenn auch schwach, noch andere Töne, die Combinationstöne, welche nicht primär von einem der tönenden Körper, sondern erst secundär durch das Zusammentreffen zweier primären Töne entstehen. Da man der ungestörten Superposition der Schallwellenzüge in der Luft gewiss zu sein glaubte, hat man die Combinationstöne bisher stets als subjective Erscheinungen aufgefasst, d. h. als solche, die nur in der besonderen Weise, wie der Hörnerv die Schallvibrationen empfindet, gegründet sind. Sobald es sich darum handelt, die fundamentalen Eigenschaften des Hörnerven festzustellen, bilden die Combinationstöne einen Gegenstand von besonderer Wichtigkeit. Da ich ausserdem fand, dass sowohl in Bezug auf die Thatsachen noch Zweifel bestehen konnten, als auch die bisherigen Erklärungsweisen noch nicht eine feste Formu-

498 lirung klarer Begriffe über die Thätigkeit des Hörnerven zuzulassen schienen, so glaubte ich es nützlich den genannten Gegenstand einer neuen Untersuchung zu unterwerfen. Dabei fand ich eine neue bisher unbekannte Classe von Combinationstönen, welche in die bisherigen Theorien nicht hineinpasste; ich fand, dass es auch objective Combinationstöne giebt, welche unabhängig vom menschlichen Ohre bestehen, und dass man endlich eine von den bisherigen ganz verschiedene Theorie der Combinationstöne geben kann, bei welcher für ihre Erklärung keine besondere Eigenschaft des Hörnerven vorausgesetzt wird, und welche vollständiger als die bisherigen die Thatsachen umfasst.

1. Bestimmung der tieferen Combinationstöne von zwei einfachen Tönen.

Die ersten Angaben über die Höhe der im Jahre 1745 von Sorge entdeckten, später von Tartini weiter untersuchten Combinationstöne beziehen sich nur auf den Fall, wo das Schwingungsverhältniss der beiden primären Töne durch zwei um eine Einheit verschiedene ganze Zahlen m und $m + 1$ ausgedrückt werden kann. In derselben Zeit, wo die primären Töne m und $m + 1$ Schwingungen vollführen, macht der Combinationston eine Schwingung (nicht, wie Tartini irrthümlich behauptete, zwei). Nach der Analogie dieses Falles hat Chladni[1]) die allgemeinere Regel ausgesprochen, dass überhaupt in allen Fällen, wo das Schwingungsverhältniss der primären Töne durch zwei relative Primzahlen m und n ausgedrückt werden kann, die Höhe des Combinationstones durch die Zahl 1 auszudrücken sei. Dieses Gesetz scheint er aber nur aus seiner theoretischen Ansicht über die Entstehungsweise der Combinationstöne gefolgert zu haben. W. Weber[2]) modificirte dies Gesetz später noch weiter, sodass es auch auf irrationelle Tonverhältnisse passte, und schloss sich dabei der
499 Beobachtung an, dass auch ein nicht ganz rein gestimmtes Intervall ziemlich denselben Combinationston giebt wie ein rein gestimmtes. Er schrieb vor das Schwingungsverhältniss in

1) Akustik, Leipzig 1802, S. 207.
2) Poggendorff's Annalen Bd. XV, S. 216.

einen Kettenbruch zu entwickeln, und daraus die Reihe der Näherungswerthe zu finden. Jedem einzelnen Näherungswerthe könnte dann ein besonderer Combinationston entsprechen.

Dagegen stellte Hällström [1]), sich auf eine grosse Reihe eigener Beobachtungen stützend, das Gesetz auf, dass in jedem Falle, wenn m und n die Schwingungszahlen der primären Töne sind, die Schwingungszahl des ersten Combinationstones $m - n$ sei. Diese Regel fällt mit der älteren nur dann zusammen, wenn m und n ganze Multipla von $(m - n)$ sind, wenn also das Schwingungsverhältniss der beiden primären Töne durch zwei um eine Einheit verschiedene ganze Zahlen ausgedrückt werden kann. Wäre aber zum Beispiel das Schwingungsverhältniss 5:3, so würde nach Chladni der Combinationston 1, nach Hällström dagegen der Ton 2 entstehen.

Schon Thomas Young [2]) hatte bemerkt, dass zuweilen zwei Combinationstöne zu hören sind, z. B. bei der grossen Terz die Quarte unter dem Grundtone neben der zweiten tieferen Octave. Hällström erklärt das Entstehen solcher anderen Combinationstöne dadurch, dass der erste Combinationston mit einem der primären Töne einen Combinationston zweiter Ordnung bilden könne, dieser wieder einen dritter Ordnung u. s. w. Sind also m und n die Schwingungszahlen, so giebt:

m	mit	n	den Combinationston	$m - n$
n	„	$m - n$	„ „	$2n - m$
m	„	$2n - m$	„ „	$2m - 2n$.

Mit den Beobachtungen, welche Hällström über Violintöne angestellt hat, stimmt seine Berechnungsweise der Com- 300
binationstöne vollständig überein, während die Berechnung durch Kettenbrüche nach W. Weber nur in einer kleinen Zahl von Fällen einigermassen passende Ergebnisse liefert. Nur ist es auffallend, dass Hällström verhältnissmässig oft den ersten Combinationston nicht hören konnte, während andere deutlich waren, und dass er bei denselben Intervallen der primären

1) Poggendorff's Ann. Bd. XXIV, S. 438.
2) Philos. Transact. 1800. T. I, p. 106—150.

Töne, wenn sie in wenig von einander verschiedener Höhe angegeben wurden, oft verschiedene Combinationstöne hörte.

Hällström's Gesetze über die Höhe der Combinationstöne wurden von Scheibler [1]) und Roeber benutzt, um die Zahl der Schwebungen zu berechnen, welche beim Zusammenklingen zweier oder mehrerer Stimmgabeln von genau bekannten Schwingungszahlen entstehen, und hierbei wurde eine ausserordentliche genaue Uebereinstimmung der Rechnung mit der Beobachtung gefunden.

Gegen die Ansicht, dass ein Combinationston erster Ordnung mit denselben zwei primären Tönen, durch deren Combination er entstanden ist, neue Combinationstöne zweiter und dritter Ordnung bilden könne, erhob Poggendorff [2]) theoretische Bedenken; Roeber [3]) selbst, der die Theorie der Versuche von Scheibler ausgearbeitet hatte, will die Herleitung der Stösse aus den Combinationstönen höherer Ordnung keineswegs für den Ausdruck des eigentlichen physikalischen Vorganges ausgeben. Wenn also auch die wahrgenommenen Combinationstöne sich in Bezug auf ihre Höhe unter Hällström's Gesetz bringen liessen, so schienen doch ihre Ordnung und die Bedingungen ihrer Entstehung noch zweifelhaft zu bleiben. Zu bemerken ist übrigens, dass auch der nach der älteren Theorie vorhandene Ton, dessen Schwingungszahl dem grössten gemeinschaftlichen Theiler derjenigen der primären Töne entspricht, in der Reihe der Töne von Hällström vorkommt.

501 Die Verschiedenheiten in den Resultaten von Hällström mochten zum Theil durch verschiedene Reinheit in der Stimmung der Intervalle, zum Theil durch das Vorhandensein starker höherer Nebentöne bedingt sein; namentlich sind wohl Violintöne, an denen er die Beobachtungen anstellte, und in denen der Grundton sehr stark von seiner höheren Octave, und recht hörbar von deren Quinte begleitet wird, wenig geeignet zu diesen Versuchen. Da alle Combinationstöne höherer Ordnung nach ihm unter den Ausdruck $\mathfrak{a}m - \mathfrak{b}n$ fallen, wo $\mathfrak{a}$

1) Poggendorff's Annalen Bd. XXXII, S. 493 bis 503.
2) Ebendaselbst S. 522.
3) Dove und Moser, Repertorium Bd. III, S. 38.

und $\mathfrak{b}$ zwei beliebige ganze Zahlen, m und n die Schwingungszahlen der primären Töne bezeichnen, so können sie auch alle durch Combination von zwei Obertönen der primären Töne entstanden sein.[1]) Der erste Combinationston des $\mathfrak{a}$ ten Obertones von m und des $\mathfrak{b}$ ten von n, würde die Schwingungszahl $\mathfrak{a}m - \mathfrak{b}n$ haben müssen.

Um sich vom Einflusse der Obertöne frei zu machen, und wo möglich regelmässigere Resultate zu erhalten, schien es mir daher nothwendig zu sein, wie auch G. S. Ohm schon vorgeschlagen hatte, die Combination solcher Töne zu beobachten, welche keine Obertöne haben. Es entstand also zunächst die Aufgabe, dergleichen Töne herzustellen, welche wir im Gegensatze zu den zusammengesetzten, von Obertönen begleiteten Tönen der gewöhnlichen musikalischen Instrumente einfache Töne nennen wollen.

Wir wollen im Laufe dieses Aufsatzes eine solche vibrirende Bewegung eines elastischen Körpers, bei welcher die Entfernung eines jeden schwingenden Theilchens von der Gleichgewichtslage als Function der Zeit ausgedrückt wird, durch ein einziges Glied von der Form:

$$A \sin(2\mathfrak{a}mt + c),$$

eine einfache Schwingungsbewegung nennen, und wenn die Schwingungen sich durch ein elastisches Mittel fortpflanzten, eine einfache Wellenbewegung. So sind zum Beispiel die Aetherschwingungen, welche dem homogenen Lichte einer einfachen Farbe angehören, solche einfache Wellenbewegungen. 502
Eine jede andere schwingende Bewegung dagegen, bei welcher die Elongationen der schwingenden Theilchen andere periodische Functionen der Zeit sind, und daher nicht durch ein einziges Glied von der Form $A \sin(2\mathfrak{a}mt + c)$, sondern nur durch eine Summe solcher Glieder dargestellt werden können, nennen wir zusammengesetzte Schwingungs- oder Wellenbewegungen. Da nun die Erfahrung lehrt, dass überall, wo die mathematisch-mechanische Untersuchung zusammengesetzte Wellenbewegungen nachweist, ein geübtes Ohr Töne unter-

1) S. Ohm in Pogg. Ann. Bd. XLVII, S. 463.

scheiden kann, welche den darin enthaltenen einfachen Wellenbewegungen entsprechen, so verwandelt sich unsere Aufgabe in diejenige, einfache Wellenbewegungen in der Luft hervorzubringen.

Da alle tönenden elastischen Körper mehrfache Schwingungsformen annehmen können, wobei sie Töne verschiedener Höhe hervorbringen, und es im allgemeinen nicht möglich ist dem tönenden Körper einen solchen Anstoss zur Bewegung beizubringen, dass er sich nur in einer einzigen dieser Formen bewegt, so musste zur Lösung der gestellten Aufgabe ein mehr mittelbarer Weg eingeschlagen werden, wobei ich folgendem Princip folgte. Nehmen wir an, wir hätten zwei elastische Körper, welche in Schwingung versetzt, gleichen Grundton haben; der eine, der Tonerreger, möge, wenn er in Schwingung versetzt ist, seine Schwingungen möglichst wenig an die Luft abgeben, der andere, der Resonator, welcher von dem ersteren in Mitschwingung versetzt wird, sei dagegen so eingerichtet, dass er seine Schwingungen leicht und stark der Luft mittheile. Während der Grundton beider Körper genau gleich ist, seien sämmtliche höhere Nebentöne des einen von denen des anderen verschieden. Bringt man nun den Tonerreger in Schwingung, so tönt der Resonator mit, aber nur in denjenigen Tönen, welche beiden gemeinsam sind. Ist also nur der Grundton gemeinsam, so wird der Resonator nur von diesem erregt werden, und nur die Schwingungen des Grundtones der Luft mittheilen.

503 Stimmgabeln, die man in der Hand hält, haben ganz die Eigenschaften, welche wir von unserem Tonerreger verlangen. Als Resonator habe ich theils die Saite eines Monochordes, theils Lufträume gebraucht. Durch die letzteren erhielt ich einen stärkeren Ton, und habe sie deshalb namentlich für die Versuche über Combinationstöne gebraucht. Dagegen erwies sich eine eigenthümliche Verbindung der Stimmgabeln mit dem Monochord, als ein besonders brauchbares Mittel, um die Lage der höheren Nebentöne der Stimmgabeln zu bestimmen. Da die Untersuchung der letzteren den übrigen Versuchen vorausgehen musste, beginne ich mit ihr.

Den Stimmgabeln, welche ich zu diesen Versuchen ge-

brauchte, gab ich am Ende ihres Stieles eine sattelförmige Fläche, die nach einer Richtung concav, nach der anderen convex war. Wenn man eine Gabel mit dieser Fläche auf eine gespannte Saite setzt, so berührt sie die Saite in einem Punkte, und kann nicht leicht seitlich abgleiten, während man sie längs der Saite hin und herschiebt. Uebrigens wurde noch der Stiel jeder Stimmgabel in ein Holzklötzchen befestigt, aus welchem unten nur die Spitze des Stieles mit der sattelförmigen Fläche hervorsah, und welches dazu diente, die Gabel zu fassen, ohne sie durch Berührung mit den Fingern zu erwärmen.

Wenn man eine solche Gabel anschlägt, und auf die Saite eines Monochordes setzt, so hört man im allgemeinen den Ton der Gabel kaum vernehmbar ertönen, wenn nicht eine der Abtheilungen der Saite zwischen dem Berührungspunkte der Gabel und einem der Befestigungspunkte genau einen der Gabeltöne zum Grundton oder Oberton hat. Verschiebt man also die Gabel längs der Saite, bis man sich der Stelle nähert, wo die Saite abzugrenzen wäre, um den Grundton der Gabel zu geben, so hört man mit einmal diesen Grundton laut anschwellen, und sowie man die Stelle überschreitet, den Ton ebenso schnell wieder verschwinden. Die Breite der Stelle, welche das Maximum der Resonanz giebt, ist sehr klein, noch nicht ½ mm breit, so- 501
dass man die entsprechenden Saitenlängen mit grosser Genauigkeit bestimmen kann, namentlich wenn man die Stimmgabel nicht am Ende der einfachen Saitenlänge ihres Grundtones, sondern am Ende der vierfachen oder sechsfachen Saitenlänge desselben aufsetzt. Man bekommt nämlich dieselbe starke Resonanz des Grundtones, wenn die durch die Stimmgabel abgegrenzte Saitenlänge ein Multiplum von der des Grundtones ist. Bequem ist es bei solchen Versuchen zwischen dem einen Endpunkte der Saite und der Stimmgabel eine Dämpfung anzubringen, indem man ein zusammengelegtes Tuch zwischen die Saite und den Resonanzboden einschiebt; dann kann nur die andere Abtheilung der Saite tönende Schwingungen geben.

Hat man dann die Saite zur Resonanz gebracht, und legt auf ihre tönende Abtheilung den Finger, so verschwindet der Ton augenblicklich, bis auf einen sehr kleinen Rest, der durch Längsschwingungen der Saite zu entstehen scheint, und der

hörbar bleibt, an welcher Stelle der Saite man die Gabel auch aufsetzen möge, übrigens desto schwächer ist, je glatter die sich berührenden Oberflächen der Saite und Gabel sind.

Zwischen den Punkten der Saite, wo der Grundton der Stimmgabel hörbar wird, findet man leicht andere heraus, wo die höheren Nebentöne der Gabel resoniren. Da diese kräftig ertönen, während der Grundton kaum vernommen wird, ist es leicht, auch verhältnissmässig schwache Obertöne wahrzunehmen. Ausser den schon von Chladni untersuchten sehr hohen Nebentönen der Stimmgabeln, welche durch Bildung von mehrfachen Knotenstellen an der Gabel entstehen, habe ich aber auch an allen von mir untersuchten Gabeln immer die schon von Roeber[1]) gehörte genaue Octave des Grundtones, wenn auch schwach gefunden.

So fand ich bei einer Gabel, welche den Ton *b* gab, folgende Saitenlängen, bei welchen die Seite am stärksten in Mitschwingung versetzt wurde:

505 1. Gabel *b*.

Ton b	Ton b_1	Ton g_3
251	125,5	38
500	376,5	76
Mittel 250,66	125,5	114
		151,5
		127
		302
		377
		37,81.

Bei vier anderen Gabeln, welche mit Hülfe der Schwebungen als genaue grosse Terz, Quinte, Octave und grosse Septime zu der eben genannten Gabel *b* gestimmt waren, fand ich folgende Saitenlängen:

2. Gabel d_1.

Ton d_1:	200
Ton d_2:	100
Ton ais_3:	31,9

3. Gabel f_1.

Ton f_1:	166,3
Ton f_2:	83,5
Ton cis_4:	26,7

1) Repertorium der Physik Bd. III, S. 55.

4. Gabel b_1.		5. Gabel a_1.	
Ton b_1:	125,3	Ton a_1:	133
Ton b_2:	62,7	Ton a_2:	66,5
Ton f_4:	21,04	Ton es_4:	23.

Der dritte bei jeder Gabel angegebene Ton entspricht dem ersten höheren Nebenton in Chladni's Beobachtungen, bei welchem die Gabel vier Schwingungsknoten zeigt. Sein Verhältniss zum Grundton der Gabel, dem zwei Schwingungsknoten 506
zukommen, ist nach Chladni $6\frac{1}{4}$; in den eben angeführten Beobachtungen schwankt es zwischen $5\frac{1}{3}$ und $6\frac{2}{3}$. Wegen der hohen Lage und unharmonischen Beschaffenheit dieses Tones ist sein Einfluss bei den Versuchen über Combinationstöne meistentheils nicht zu fürchten.

Viel wichtiger ist der zweite Ton, welcher stets genau der Octave des Grundtones entspricht. Er befindet sich nicht unter den von Chladni beobachteten Tönen, welche durch Streichen mit dem Violinbogen von ihm auf der Gabel erzeugt wurden, scheint auch mit Henrici's [1]) schwachen Nebentönen zweiter Art nicht identisch zu sein, da diese einen bis zwei Töne höher sind als die Octave des Grundtones. Davon, dass die höhere Octave des Grundtones nicht blos durch die besondere Methode der Beobachtung, etwa als eine Art Klirrton an der Berührungsstelle der Gabel mit der Saite erzeugt wird, kann man sich überzeugen, wenn man die Gabeln vor der Mündung einer Resonanzröhre tönen lässt, deren eigener Ton die höhere Octave des Grundtones der Gabel ist. Man hört dann, wenn die Gabel stark angeschlagen ist, diese Octave ganz deutlich.

Uebrigens hat auch A. Seebeck [2]) ähnliche Beobachtungen gemacht, aus denen hervorgeht, dass harmonische Obertöne auch bei Glocken und Stimmgabeln vorkommen, wo man der Theorie nach nur unharmonische erwarten sollte. Er fand, dass der Ton d_1 eines gläsernen Pokales den Ton d_2 einer

1) Pogg. Annalen Bd. LVIII, S. 265. Uebrigens scheint bei Henrici leider ein Irrthum in der Bezeichnung der Töne vorgekommen zu sein, da das Verhältniss des ersten zu unserem dritten Tone bei ihm nur 2,7 bis 3, die Hälfte des wahren ist.

2) Repertorium der Physik, Bd. VIII, S. 69.

Saite zum Mitschwingen brachte, und a_1 einer Stimmgabel a_2 einer Saite. Ich glaube, dass der Grund dieser Erscheinung darin zu suchen ist, dass die Schwingungen der betreffenden elastischen Körper bei diesen Versuchen die Grenze überschreiten, innerhalb deren die elastischen Kräfte den Elon-
507 gationen proportional sind. Dass dadurch harmonische Obertöne entstehen müssen, lässt sich theoretisch durch eine ähnliche mathematische Entwickelung, wie wir sie später für die Theorie der Combinationstöne geben werden, zeigen. Dass übrigens die Schwingungen einer stark angeschlagenen Gabel die bezeichnete Grenze wirklich überschreiten können, geht auch aus der von mehreren Beobachtern gemachten Wahrnehmung hervor, wonach auch die Tonhöhe der Gabel, während sie verklingt, sich merklich ändert. Es wird also auch der Isochronismus der Schwingungen bei starkem Anschlagen merklich gestört, und das kann nur geschehen, wenn bei starken Schwingungen die elastischen Kräfte den Elongationen nicht mehr genau proportional sind.

Wenn wir nun eine Stimmgabel an einer solchen Stelle auf eine Saite aufsetzen, wo diese in dem Grundtone der Gabel mitschwingt, so werden allerdings die höheren unharmonischen Töne der Gabel das Mitschwingen der Saite nicht erregen, und nicht auf deren Resonanzboden und die umgebende Luftmasse übertragen werden, wohl aber die höhere Octave des Grundtones. Um diese auszuschliessen muss man der Saite selbst unharmonische Obertöne geben, was sehr leicht zu bewirken ist, dadurch, dass man in der Mitte des mitschwingenden Saitenstückes eine kleine Belastung anbringt. Wenn L die Saitenlänge ist, welche den Grundton der Stimmgabel giebt, so braucht man nur in der Entfernung von etwa $\frac{1}{3} L$ vom Ende der Saite als Belastung derselben ein Tröpfchen Siegellack auf ihr zu befestigen. Man wird dann finden, dass die Saitenlänge, welche den Grundton der Stimmgabel giebt, jetzt beträchtlich kleiner geworden ist, und dass ausserdem der zweite Erregungspunkt der höheren Octaven des Grundtones, der ursprünglich mit dem ersten Erregungspunkte des Grundtones selbst zusammenfiel, jetzt von diesem getrennt ist. Wenn man also die Gabel nun in dem letzteren Punkte aufsetzt, erregt

man nur den Grundton und nicht mehr gleichzeitig dessen höhere Octave.[1])

Um bei der Ausführung der Versuche die Gabeln nicht 508
immer in der Hand halten zu müssen, ohne sie doch mit einem schallleitenden Körper in Berührung zu bringen, ist es am besten, wenn man sie an der Saite aufhängt. Zu dem Ende stelle ich das Monochord so auf, dass die Saiten nach unten gekehrt sind. In der Mitte der Saite wird ein Häkchen fest angekittet, an welches die Gabel, nachdem sie angeschlagen ist, gehängt werden kann. Auf der einen Seite des Häkchens dämpft man die Saite durch ein untergeschobenes Tuch; auf der anderen Seite wird das Siegellacktröpfchen und weiterhin ein beweglicher Steg angebracht, den man so lange verschiebt, bis man das Maximum der Tonstärke erhält.

Man erhält auf diese Weise ziemlich laute und lang anhaltende reine Töne, welche verschwinden, so wie man die Saite zwischen der Gabel und dem Stege mit dem Finger berührt und dadurch ihre Querschwingungen dämpft. Die Klangfarbe dieser einfachen Töne ist im Ganzen der der Stimmgabeltöne ähnlich, nur etwas dumpfer, dem *U* ähnlich, und wenn man ihre Höhe an einem Claviere zu bestimmen sucht, wird man leicht verleitet, sie eine Octave tiefer zu suchen, als sie wirklich liegen.

Eine zweite Methode, den Grundton der Stimmgabeln mit Ausschluss ihrer Obertöne der Luft mitzutheilen, beruht auf der Wirkung resonirender Röhren. Die Röhren, welche ich anwendete, waren aus Pappe verfertigt, cylindrisch, an beiden

---

1) Die Theorie der Bewegung beschwerter Saiten siehe bei Duhamel, *Compt. rend.* XI, 15 und 810. (Pogg. Annalen LVII. 392 u. 397.) Seebeck im Repertorium der Physik VIII. 33 giebt auch die Gleichung für die Höhe der Töne. Es sei M die Masse der Belastung, m die der Saite, $l_{,}$ und $l_{,,}$ die Länge ihrer beiden Stücke, in welche sie durch die Belastung getheilt wird, L die Länge einer unbelasteten Saite von gleicher Art und Spannung, deren Grundton dem betreffenden Tone der beschwerten Saite gleich ist, so wird L gegeben durch die transcendente Gleichung:

$$\text{cotang}\,\frac{\mathfrak{a}\,l_{,}}{L} + \text{cotang}\,\frac{\mathfrak{a}\,l_{,,}}{L} = \frac{\mathfrak{a}\,M(l_{,} + l_{,,})}{m\,L}.$$

Enden durch einen ebenen Boden geschlossen, von denen der
509 eine in der Mitte eine runde Oeffnung besass. Ich gebe hier folgend ihre Maasse in Centimetern an, und die Töne, welche ich erhalten konnte, indem ich durch eine enge Röhre gegen ihre Mündung blies.

Gehörig zur Gabel	Länge	Durchmesser		Töne
		der Röhre	der Oeffnung	
b	17,3	5,3	1,1	b, des_3
d_1	17,1	4,0	1,0	d_1, des_3, h_3
f_1	14,3	4,0	1,1	f_1, e_3
b_1	13,2	4,1	1,8	b_1, fis_3

Da die Mündungen dieser Röhren keine scharfen Ränder hatten, war das Anblasen schwierig, und es gelang mir deshalb nur bei einer von ihnen den dritten Ton zu erhalten. Um die Lage dieses Tones in noch anderen Fällen zu bestimmen, verfertigte ich mir noch eine Röhre von ähnlicher Gestalt, die durch Ausziehen eines hölzernen Stempels verlängert werden konnte, und deren Mündung einen scharfen Rand hatte, sodass das Anblassen leichter war. Sie hatte 3,8 cm, ihre Oeffnung 1 cm Durchmesser und konnte bis auf 28,5 cm verlängert werden. Auch hier konnte ich nur bei den niederen Tönen den zweiten Oberton durch stärkeres Anblasen erreichen.

Länge der Röhre	Töne		
26	c_1	gis_2	fis_3
22	d_1	ais_2	gis_3
17	f_1	d_3	cis_4

Das Verhältniss des zweiten zum dritten Tone ist in allen diesen Fällen das einer kleinen oder grossen Septime, und wir dürfen ihn deshalb wohl in den Fällen, wo er nicht durch Anblasen hervorgebracht werden konnte, nach diesem Verhältnisse ergänzen.

510 Ich stelle jetzt die verschiedenen Töne, welche die zusammengehörigen Röhren und Gabeln geben, unter einander, wobei die nicht direct beobachteten Obertöne eingeklammert sind:

1)	Gabel:	b,	b_1		g_3	
	Röhre:	b		des_3		(h_3
2)	Gabel:	d_1	d_2		ais_3	
	Röhre:	d_1		des_3		h_3
3)	Gabel:	f_1	f_2		cis_4	
	Röhre:	f_1		e_3		(d_4)
4)	Gabel:	b_1	b_2		f_4	
	Röhre:	b_1		fis_3		(e_4)
5)	Gabel:	a_1	a_2		dis_4	
	Röhre:	a_1		fis_3		e_4

Man sieht aus dieser Zusammenstellung, dass die ersten Obertöne der Gabeln, welche die höhere Octave des Grundtones bilden, durch die Resonanz der Röhren nicht verstärkt werden können. Dagegen kommen die zweiten Obertöne der Gabeln und Röhren sich einige Male ziemlich nahe. Indessen ergab der Versuch, dass die Uebereinstimmung doch nicht gross genug war, um eine wesentliche Verstärkung jener Obertöne durch die Resonanz der Röhren zu bedingen, in denen sich wahrscheinlich die durch Anblasen schwer zu erzeugenden Töne überhaupt schwer bilden. Wenn man die Gabeln mit einem harten Körper anschlägt, hört man die höheren Obertöne, welche einer vermehrten Zahl von Knoten entsprechen, deutlich neben dem Grundtone; doch verklingen sie schnell. Bringt man dann die Gabel vor die Mündung ihrer Resonanzröhre, so schwillt ihr Grundton mächtig an, während keine Verstärkung des höheren Tones wahrzunehmen ist.

Insbesondere überzeugte ich mich noch, dass die Röhren nicht im Stande sind die Octave ihres Grundtones durch Resonanz zu verstärken. Wenn ich die Gabel b_1 vor die Oeff- 511
nung der Röhre b hielt, war nicht die geringste Verstärkung des Tones zu bemerken. Dagegen verstärkten die Röhren die Töne, welche von ihrem Grundton um einen halben oder ganzen Ton abwichen, noch ziemlich bedeutend. Die Röhre für b_1 war eben so gut für a_1 zu gebrauchen, und selbst as_1 wurde noch beträchtlich dadurch verstärkt.

Da die Resonanz der Röhren einen merklich stärkeren

Ton gab, als die der Saiten, und die Gabeln in ihrer Verbindung mit den Röhren auch leichter zu handhaben waren, habe ich die meisten Versuche über Combinationstöne mit den Röhren angestellt.

Bei den Versuchen muss man darauf achten, dass die schwingenden Stimmgabeln nirgends Klirren erregen. Am besten hält man sie in den Händen. Will man sie fest hinstellen, so müssen sie in einer hölzernen Unterlage durch stark angezogene Schrauben befestigt sein, und diese muss auf Leder oder einer dicken Lage Papier stehen, nicht auf dem blossen Tische. Die klirrenden Töne, welche entstehen, wenn die Gabeln nicht ganz fest in ihrer hölzernen Unterlage sitzen, oder diese lose auf dem Tische steht, werden offenbar durch kleine Stösse der betreffenden Körper gegen einander hervorgebracht, welche den Schwingungen der Gabel meist isochron sind. Daher ist der Klirrton meist gleich hoch, wie der Gabelton (zuweilen tiefer), aber da er nicht durch eine einfache Sinusbewegung hervorgebracht wird, hat er stark hervortretende Obertöne, welche ihm seinen spitzen Klang zu geben scheinen. Eben dieser Obertöne wegen, muss das Klirren vermieden werden.

Mittels der mehrfach angeführten Gabeln und einer sechsten, deren Schwingungszahl zu der des *b* im Verhältniss von 7 zu 4 stand, die also ein etwas tiefes as_1 gab und die ich durch aufgeklebte Wachsklümpchen bis auf g_1 erniedrigen konnte, waren folgende Combinationen von Tönen herzustellen, die ich hier folgend mit dem dabei gehörten Combinationstone angebe.

512

Primäre Töne		Combinationston	Schwingungsverhältniss der primären Töne zueinander	Schwingungsverhältniss des Combinationstones
b	f_1	B	2 : 3	1
f_1	b_1	B	3 : 4	1
b	d_1	B_{-1}	4 : 5	1
d_1	f_1	B_{-1}	5 : 6	1
f_1	as_1	B_{-1}	6 : 7	1
as_1	b_1	B_{-1}	7 : 8	1
b	g_1	es	3 : 5	2
d_1	as_1	B	5 : 7	2
d_1	b_1	f	5 : 8	3
b	as_1	f	4 : 7	3

Ich war in allen diesen Fällen nicht im Stande, durch das Gehör das Vorhandensein anderer Combinationstöne zu erkennen, welche tiefer gewesen wären als die primären Töne, während ich andererseits bei je zwei Tönen von Orgelpfeifen, oder der Sirene oder der Violine sehr wohl im Stande war, Combinationstöne zweiter Ordnung wahrzunehmen. Indessen habe ich bei Orgelpfeifen und bei der Sirene kein Beispiel gefunden, wo nicht der Combinationston erster Ordnung bei Weitem der deutlichste gewesen wäre. Als Beispiele solcher Combinationstöne zweiter Ordnung, die ich hörte, führe ich an:

Neben	den	Tönen	4	und	5	den	Ton	$3 = 2.4 - 5$
„	„	„	5	„	7	„	„	$3 = 2.5 - 7$
„	„	„	5	„	8	„	„	$2 = 2.5 - 8$
„	„	„	3	„	5	„	„	$1 = 2.3 - 5$.

Die Violine, welche Tartini und Hällström anwendeten,
scheint mir nach meinen eigenen Erfahrungen viel weniger zu,
den Untersuchungen über Combinationstöne geeignet zu sein,
als die Orgelpfeifen und die Sirene. Ich hatte allerdings nur
Gelegenheit die Hülfe dilettirender Violinspieler in Anspruch
zu nehmen, und kann daher nicht beurtheilen, ob eine künst-
lerische Vollendung der Bogenführung andere Resultate geben
möchte. Die Combinationstöne waren dabei in einer eigen- 513
thümlichen Weise inconstant, hörten sich heulend an, indem
sie bald etwas höher, bald etwas tiefer wurden, was namentlich
dann sehr entschieden der Fall war, wenn nicht zwei ganze
Saiten angestrichen wurden, sondern eine derselben an das
Griffbrett gedrückt und verkürzt wurde. Ausserdem pflegten
auch schnell hintereinander verschiedene Combinationstöne zu
wechseln. Der Grund davon liegt wohl darin, dass durch den
Bogen die Saite nicht ganz gleichmässig bewegt wird, sondern
fortdauernd die Form ihrer Schwingung wechselt, sodass ihre
Obertöne in Bezug auf Stärke und auf die Gleichzeitigkeit oder
Ungleichzeitigkeit ihrer Wellenberge und Wellenthäler vielfach
variiren, sodass die verschiedenen Combinationstöne des Grund-
tones und seiner Obertöne sich bald gegenseitig verstärken,
bald durch Interferenz aufheben, und deshalb bald der eine bald
der andere Combinationston stärker hervortritt. Was das

Heulen des Combinationstones betrifft, so muss man bedenken, dass wenn die primären Töne nahe bei einander liegen, ausserordentlich kleine Schwankungen ihrer Höhe sehr merklich die Höhe des Combinationstones verändern können. Geben doch schon die Terzen, welche nach der gleichschwebenden Temperatur gestimmt sind, Combinationstöne, welche um einen halben Ton verändert sind. Das Verhältniss des c_1 zum e_1 in der reinen Temperatur ist 100:125, in der gleichschwebenden 100:126. Ersteres giebt den Combinationston C von 25 Schwingungen, letzteres einen Ton von 26 Schwingungen. Das Verhältniss dieser beiden Combinationstöne ist also nahe gleich dem eines kleinen halben Tones 24:25. Statt C erhalten wir daher bei der Stimmung nach gleichschwebender Temperatur nahehin *Cis*, und, wenn wir e_1 und g_1 angeben, statt desselben C vielmehr H_{-1}. Bei einem Instrumente mit starken, gleichmässig anhaltenden Tönen, z. B. einer Physharmonika, welches nach gleichschwebender Temperatur gestimmt ist, bilden deshalb auch diese Combinationstöne für den, der darauf zu achten gewöhnt ist, eine unangenehme Störung der Harmonie.

514 Wir entnehmen aus den angeführten Thatsachen das Resultat, dass das menschliche Ohr Hällström's Combinationstöne zweiter Ordnung bei einfachen Tönen von der Stärke, wie sie unsere mit Resonanzröhren versehenen Stimmgabeln geben, nicht zu erkennen vermag, wohl aber bei solchen Tönen gleicher Stärke, welche, wie die der Orgelpfeifen, Sirenen, Violinen mit Obertönen verbunden sind. Wir dürfen daraus wohl den Schluss ziehen, dass wenn wir bei Tönen mittlerer Stärke Combinationstöne zweiter oder höherer Ordnung deutlich hören, diese durch die höheren Nebentöne der primären Töne erzeugt sind.

Andererseits ist noch eine Erscheinung zu erwähnen, aus der wir vielleicht schliessen müssen, dass auch bei den einfachen Tönen, wenn auch ausserordentlich schwach, Combinationstöne höherer Ordnung vorkommen. Es sind dies die von Scheibler und Roeber untersuchten Schwebungen, welche bei nicht ganz reinen Consonanzen hörbar sind. Die Schwebungen sind in der That ein Mittel, durch welches man die

Gegenwart sehr schwacher Töne oft besser erkennt als durch das Ohr.

Um das Intervall $b b_1$ meiner Stimmgabeln zu prüfen, habe ich mir eine Hülfsgabel gestimmt, welche vier Schwingungen weniger als b_1 in der Secunde macht. Lasse ich die Gabel b_1 vor ihrer Resonanzröhre verklingen, und nähere der Röhre von Zeit zu Zeit die angeschlagene Hülfsgabel, so höre ich die Schwebungen noch zu einer Zeit, wo ich von dem Tone der verklingenden Gabel ohne dieses Hülfsmittel nichts mehr wahrnehmen kann. Wenn wir wie beim Lichte die Intensität des Schalls nach dem Quadrate der Schwingungsweite bestimmen, muss in der That, wo zwei Schallwellenzüge von gleicher Stärke mit gleichen Phasen zusammen kommen, die Schwingungsweite verdoppelt, die Intensität vervierfacht werden. Wo entgegengesetzte Phasen zusammenfallen, wird die Intensität gleich Null. Nähern wir also die Hülfsgabel der Resonanzröhre so weit, dass der Schall beider Gabeln die gleiche Stärke welche wir 1 nennen wollen, bekommt, so wechselt die Inten- 515
sität des Tons zwischen 0 und 4, und dieser Wechsel kann also noch sehr wohl wahrnehmbar sein, während die Intensität 1 schon nicht mehr wahrgenommen wird. Scheibler hat nun bekanntlich nachgewiesen, dass die Zahl der Schwebungen, welche unrein gestimmte Octaven, Quinten, Quarten und Terzen geben, genau berechnet werden kann aus der Annahme, dass dabei Combinationstöne verschiedener Ordnung von nahe gleicher Höhe miteinander interferiren. Lässt man diese Erklärungsweise von Scheibler zu, so würden die Schwebungen die Anwesenheit von Combinationstönen verrathen können, welche zu schwach sind, um ohne ihre Hülfe wahrgenommen zu werden. Ich habe deshalb Versuche über diese Schwebungen an den mit Resonanzröhren versehenen Gabeln gemacht. Verstimmen kann man sie leicht in beliebigem Grade, indem man Klümpchen Wachs an ihre Zinken klebt. So konnte ich die Schwebungen zweier Gabeln hören, welche eine schwach verstimmte Octave, Quinte, Quarte oder grosse Terz bilden. Aber während sie bei der Octave leicht und deutlich hörbar waren, zeigten sie sich bei jedem folgenden Intervalle schwächer und waren schon bei der grossen Terz nur sehr schwer zu

hören. Bei der kleinen Terz konnte ich die Schwebungen nicht mehr mit Bestimmtheit erkennen, ebensowenig bei der kleinen Sexte.

Bei der unreinen Octave, deren Töne die Schwingungszahlen λ und $2\lambda + \delta$ haben mögen, ist es nach der Erklärung von Scheibler der Combinationston erster Ordnung $\lambda + \delta$, welcher mit dem Grundton λ Schwebungen von der Zahl δ hervorbringt.

Bei der unreinen Quinte, 2λ und $3\lambda + \delta$, ist es ein Combinationston erster Ordnung $\lambda + \delta$, welcher mit einem der zweiten Ordnung $2.(2\lambda) - (3\lambda + \delta) = \lambda - \delta$ Schwebungen von der Zahl 2δ hervorbringt.

Bei der unreinen Quarte 3λ und $4\lambda + \delta$ ist es ein Combinationston zweiter Ordnung $2(3\lambda) - (4\lambda + \delta) = 2\lambda - \delta$ und ein solcher dritter Ordnung $2(4\lambda + \delta) - 2(3\lambda) = 2\lambda + 2\delta$ welche 3δ Schwebungen hervorbringen.

Bei der unreinen grossen Terz endlich 4λ und $5\lambda + \delta$ ist
516 es ein Combinationston dritter Ordnung $2(5\lambda + \delta) - 2(4\lambda) = 2\lambda + 2\delta$, und ein solcher vierter Ordnung $3(4\lambda) - 2(5\lambda + \delta) = 2\lambda - 2\delta$, welche mit einander 4δ Schwebungen geben.

Auch Scheibler hat wahrgenommen, dass die Schwebungen desto schwächer werden, einer je höheren Ordnung die Combinationstöne angehören, durch welche sie entstehen. Seiner Theorie gemäss müssten also Combinationstöne bis zur vierten Ordnung auch von einfachen Tönen erzeugt werden können. Scheibler hatte für seine Theorie nur die eine Bestätigung, welche in der genauen Uebereinstimmung der berechneten Zahl der Schwebungen mit der beobachteten lag. Ich hoffte noch eine zweite Bestätigung seiner Theorie gewinnen zu können, wenn ich auf die Höhe der als schwebend wahrgenommenen Töne achtete. In der That glaubte ich in allen Fällen die Töne schwebend zu hören, welche Scheibler's Theorie fordert, namentlich im Falle der unreinen Quarte f_1 b_1 den Combinationston zweiter Ordnung b, im Falle der unreinen grossen Terz den Ton dritter Ordnung B mittels der Schwebungen wahrzunehmen. Doch stehe ich an, mich in diesem Falle auf die Aussagen meines Ohres fest zu verlassen, da es sehr schwierig ist bei so ausserordentlich schwachen Tönen, die Octave, in der der Ton liegt, sicher zu bestimmen. Uebrigens lehrt auch eine

vollständig durchgeführte Theorie dieser Schwankungen, dass nicht bloss die von Scheibler als schwebend berechneten Töne Wechsel ihrer Stärke zeigen müssen, sondern schwächere Schwebungen auch bei den übrigen Combinationstönen anderer Ordnung eintreten müssen.

Auch dadurch, dass man dritte Töne daneben angiebt, kann man zuweilen Schwebungen hörbar machen, welche nicht durch Combinationstöne erster Ordnung, sondern nur durch solche höherer Ordnung erklärt werden können.
Wenn ich z. B. die einfachen Töne b und d_1 angab, und dazu auf dem Clavier f, welches nicht genau mit den beiden vorigen consonirte, so hörte ich sehr deutlich sowohl den Ton B_{-1} als den Ton f Schwebungen machen. Die ersteren erklären sich dadurch, dass der erste Combinationston sowohl von f und b, wie von b und d_1, B_{-1} ist, und wenn das letztere Intervall nicht ganz rein ist, die beiden Combinationstöne nicht ganz 517
übereinstimmen können, folglich Schwebungen geben müssen. Mit dem Ton f fällt aber kein Combinationston erster Ordnung zusammen, auch keiner mit den höheren Nebentönen dieses Tones, wohl aber ist f ein Combinationston zweiter Ordnung von b und d_1. Dieses f wird dadurch, dass man ein etwas verschiedenes f auf dem Claviere angiebt, und es dadurch in Schwebungen bringt, wahrnehmbar gemacht.

In derselben Weise konnte ich Schwebungen des zweiten Combinationstones b der kleinen Terz $d_1\,f_1$ hörbar machen, wenn ich dies b auf dem Claviere angab. Daneben hörte man ebenfalls Schwebungen des B_{-1}.

Ebenso konnte ich deutlich die Schwebungen des f hören, wenn ich das b_1 der Stimmgabel durch aufgeklebtes Wachs verstimmte, und nun zunächst b und b_1, beide gleichmässig stark ertönen liess. Unter diesen Umständen hört man die Schwebungen wenig, welche die unreine Octave sonst deutlich hören lässt, wenn der tiefere Ton an Stärke überwiegt. Sobald man aber zu den Tönen b und b_1 noch d_1 angiebt, hört man sehr deutlich das f schweben. Dieses f ist der erste Combinationston von $d_1\,b_1$ und der zweite von $b\,d_1$. Ein anderer erster Combinationston fällt damit nicht zusammen, der die Schwebungen verursachen könnte.

Wenn wir nun auch Scheibler's und Röber's Theorie der Schwebungen, welche die Erscheinungen mit grosser Genauigkeit erklärt, als gültig betrachten, und aus dem Vorhandensein der entsprechenden Schwebungen schliessen, dass auch einfache Töne zur Bildung von Combinationstönen höherer Ordnung Veranlassung geben, so folgt daraus keineswegs, dass bei den Beobachtungen des blossen Ohres, wo diese Töne nicht gehört werden konnten, ein Irrthum stattgefunden habe. Im
518 Gegentheil, da die Schwebungen, welche durch Combinationstöne höherer Ordnung veranlasst werden, in allen diesen Fällen ausserordentlich schwach sind, und andererseits die Schwebungen ein so sehr viel feineres Mittel der Wahrnehmung eines Tones abgeben, wird dadurch vielmehr bestätigt, dass diese Combinationstöne durch das Ohr allein, namentlich neben anderen, sehr viel stärkeren Tönen, nicht wohl wahrgenommen werden konnten.

Als Resultat der bisherigen Untersuchung der tieferen Combinationstöne können wir aussprechen, dass einfache Töne nur solche tiefere Combinationstöne deutlich hören lassen, deren Schwingungszahl gleich der Differenz der Schwingungszahlen der primären Töne ist, und dass, wenn Combinationstöne anderer Ordnung daneben existiren, diese zu schwach sind, um bei mässiger Stärke der primären Töne dem Ohre hörbar zu werden. Wenn bei zusammengesetzten Tönen Combinationstöne höherer Ordnung oft sehr deutlich auftreten, müssen wir diese daher für Combinationstöne der höheren Beitöne erklären.

2. Ueber eine neue Art höherer Combinationstöne.

Ausser den bisher besprochenen Combinationstönen besteht noch eine zweite Classe solcher Töne, welche, so viel ich finde, bisher noch niemals beobachtet worden zu sein scheint, nämlich Töne, deren Schwingungszahl gleich ist der Summe der primären Töne. Ich werde diese neuen Töne mit dem Namen der Summationstöne bezeichnen, im Gegensatze zu den früher besprochenen und schon länger bekannten, welche wir Differenztöne nennen können, weil ihre

Schwingungszahl der Differenz der Schwingungszahlen der primären oder ihrer combinirten Töne niederer Ordnung gleich ist. Ich wurde zuerst durch die theoretischen Entwickelungen, welche ich weiter unten geben werde, darauf aufmerksam, dass solche Töne existiren möchten, und versuchte sie an den mit Resonanzröhren versehenen Stimmgabeln zu hören. Das gelang mir auch, aber nur sehr schwierig, weil die Töne der Stimmgabeln nur eine mässige Stärke haben, und die Combinations- 519
töne überhaupt erst bei grösserer Stärke der primären Töne deutlich werden. Die Summationstöne sind nun schwächer als die Differenztöne erster Ordnung, und es gehört deshalb grosse Uebung und Aufmerksamkeit dazu, sie bei geringerer Stärke der primären Töne zu hören. Indessen gelang es mir doch mittels der Stimmgabeln folgende Töne dieser Art wahrzunehmen.

Primäre Töne	Summationston	Schwingungsverhältniss der primären Töne	Schwingungsverhältniss des Summationstones
b, f_1	d_2	2 : 3	5
f_1, b_1	as_2	3 : 4	7
b, d_1	c_2	4 : 5	9

Viel leichter sind sie zu hören, wenn man stärkere Schallquellen anwendet, auch braucht man hierbei die Obertöne der primären Töne nicht zu fürchten. Einmal kann der Summationston mit keinem Oberton der primären Töne zusammenfallen, wenn nicht einer der primären Töne selbst ein Oberton des anderen ist. Denn wenn m und n die Schwingungszahlen der primären Töne sind, so kann die Schwingungszahl des Summationstones $m + n$ kein Multiplum von m oder n sein, wenn nicht m selbst ein Multiplum von n, oder n ein solches von m ist. Zweitens ist auch keine Täuschung durch Differenztöne der höheren Obertöne zu fürchten, weil es leicht gelingt die Summationstöne eben so stark oder stärker zu erhalten, als die ersten und stärksten Obertöne, sodass sie jedenfalls viel stärker werden als die Differenztöne dieser letzteren.

Recht gut hört man die Summationstöne bei Orgelpfeifen, namentlich, wenn man das Ohr den beiden Mundstücken der

Pfeifen nähert. Man gebe erst den höheren der beiden Töne an, welche man combiniren will; indem man dann den tieferen auch beginnen lässt, hört man einen noch höheren, den Summationston hinzukommen. Auch die Physharmonika lässt die
520 Summationstöne gut hören, wenn man starken Wind giebt. Von allen aber die beste Gelegenheit gewährt die von Dove[1]) beschriebene mehrstimmige Sirene, an welcher die Combinationstöne überhaupt so laut hervortreten, wie an keinem anderen Instrumente. An ihr sind auch die Summationstöne so laut und auffallend, dass sie gleichsam die Oberstimme des gehörten Accordes bilden, und sich auch ungeübten Ohren leicht bemerklich machen. Sie sind es auch, die die Accorde der Sirene häufig so rauh und misstönend machen, weil sie meistens nicht in der Harmonie des Duraccordes bleiben, wie dies bei den Differenztönen der consonirenden Intervalle gewöhnlich der Fall ist.

Der Summationston der Octave, *C* und *c*, ist die Quinte des höheren Tones *g*. Selbst in diesem Falle, wo der zweite Oberton des *C* mit dem Summationstone zusammenfällt, kann man sich überzeugen, dass ein Summationston da ist. Wenn man nämlich zuerst *C* angiebt, hört man anfangs schwach dessen zweiten Oberton *g*; sobald man nun aber daneben auch *c* angiebt, wird dieses *g* viel stärker als vorher, obgleich *c* keinen entsprechenden Oberton hat.

Neben der Quinte *CG* hört man, wie oben schon angegeben ist, die Decime des Grundtones, nämlich *e*. Es wird dadurch der Durdreiklang vollständig.

Zur grossen Sexte *Ge* (3:5) kommt c_1 (8) die kleine Sexte des höheren Tones. Der Differenzton ist *C*; so wird auch hier durch die Combinationstöne der Duraccord ergänzt.

Zur Quarte *Gc* (3:4) kommt die etwas vertiefte kleine Septime *b* (7) des höheren Tones.

Zur grossen Terz *CE* (4:5) kommt die None des Grundtones *d* (9), welche den Eindruck des Duraccordes schon erheblich stört, wenn sie deutlich gehört wird.

Zur kleinen Terz *EG* (5:6) kommt der Ton 11, welcher

1) Poggendorff's Annalen Bd. LXXXII. S. 596.

zwischen *f* und *fis* liegt, und die Harmonie in sehr unangenehmer Weise stört.

Einen eben so unangenehmen Missklang giebt bei der kleinen Sexte *Ec* (5 und 8) der Summationston 13 zwischen 521
b und *h*. Auf der mehrstimmigen Sirene, wo die Combinationstöne so stark hervortreten, sind deshalb die grosse und kleine Terz, die kleine Sexte und alle Accorde, in denen sie vorkommen, sehr misstönig, während die Octave, Quinte, Quarte und grosse Sexte einen sehr reinen Wohlklang geben, der durch die hinzukommenden die Harmonie ausfüllenden Combinationstöne noch gewinnt. Ich bemerke hierbei, dass die bei der Quarte vorkommende etwas vertiefte kleine Septime, deren Schwingungszahl zu der des Grundtones im Verhältniss von 7 : 4 steht, dem Ohre durchaus den Eindruck einer Consonanz macht.

Endlich war ich noch im Stande neben den bisher erwähnten Summationstönen bei der Sirene Summationstöne zweiter Ordnung schwach aber deutlich zu hören. Sind p und q die Schwingungszahlen der primären Töne, so ist die Schwingungszahl dieses zweiten Summationstones $2p + q$. Ich konnte wahrnehmen neben zwei Sirenentönen vom Schwingungsverhältniss:

2	zu	3	den	Ton	$2.2 + 3 = 7$ und
			„	„	$2.3 + 2 = 8$
3	„	4	„	„	$2.3 + 4 = 10$
5	„	6	„	„	$2.5 + 6 = 16$
4	„	5	„	„	$2.5 + 4 = 14$.

In jedem dieser Fälle hätten zwei Töne dieser Art, wie bei der Quinte gehört werden müssen, nämlich neben den Tönen 10, 16 und 14 noch 11, 17 und 13. Indessen ist es schwer die Aufmerksamkeit auf einen schwachen Ton zu lenken, der ausserhalb der musikalischen Tonleiter liegt, und dessen Höhe man sich nicht durch Auffassung einer bestimmten musikalischen Relation zu den übrigen Tönen zu fixiren weiss. Ich glaubte mitunter einen Augenblick die unharmonischen Töne zu hören, aber das Ohr lenkte immer so schnell wieder auf die nahe liegenden harmonischen ein, dass ich mich der Höhe der ersteren nicht bestimmt versichern konnte.

522 ### 3. Theorie der Combinationstöne.

Die bisher von Chladni[1]), Lagrange[2]), Th. Young[3]), Hällström und Roeber aufgestellten Ansichten über die Entstehung der Combinationstöne, obgleich sie sich in Einzelheiten unterscheiden, haben doch mehrere wesentliche Züge gemeinsam. Alle nehmen nämlich an, dass eine ungestörte Superposition der Wellensysteme, welche den gleichzeitig erklingenden primären Tönen angehören, in der Luft und den schallleitenden Körpern überhaupt stattfinde, d. h. dass bei gleichzeitig erklingenden Tönen die Bewegung jedes schwingenden Theilchens genau die Resultante derjenigen Bewegungen sei, welche jeder einzelne Ton für sich hervorrufen würde.

Wenn m und n zwei ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, und die Schwingungszahl des einen primären Tones mf, die des anderen nf ist, so wird die resultirende Luftbewegung periodisch, und die Zahl ihrer Perioden in der Secunde wird gleich f sein. Wir wissen nun, dass eine jede regelmässig wiederkehrende periodische Bewegung der Luft, wenn die Zahl f der gleichen Perioden in der Secunde gross genug ist, in dem Ohre im allgemeinen die Empfindung der Töne von f, $2f$, $3f$ u. s. w. Schwingungen, und zwar einiger oder aller von ihnen, hervorrufen kann. In der That gehören nun auch die Combinationstöne, welche man in einem solchen Falle hört, der Reihe der Töne von f, $2f$, $3f$ u. s. w. Schwingungen an. Wennn es sich nun aber weiter darum handelte zu bestimmen, welche von diesen Tönen, und wie stark die einzelnen, wirklich in einem gegebenen Falle gehört werden, so würde man vor allen Dingen haben suchen müssen die Frage zu entscheiden, nach welchem Gesetze sich das Ohr eine solche periodische Luftbewegung in einzelne, einzelnen Tonempfindungen entsprechende Theile zerlegt. Indessen hat man sich
523 bei den Untersuchungen über Combinationstöne meist mit unbestimmteren Vorstellungen über die Rolle, welche das Ohr

1) Akustik, Leipzig 1802, S. 207.
2) Misc. taurin. T. I, p. 103 bis 105.
3) Philos. Transact. 1800, T. I, p. 130.

dabei spielt, begnügt, und erst später ist diese Frage, wenn auch nicht mit specieller Beziehung auf die Combinationstöne, Gegenstand des Streites zwischen G. S. Ohm und A. Seebeck gewesen. Sie ist offenbar von fundamentaler Wichtigkeit für die ganze Lehre von den Gehörempfindungen, und gerade die Erscheinungen der Combinationstöne scheint wichtige Entscheidungspunkte abgeben zu können.

G. S. Ohm [1]) hat bekanntlich eine bestimmte Annahme über die Art, wie das Ohr die periodischen Luftbewegungen in einzelne Töne zerlegt, aufgestellt, eine Annahme, die stillschweigend wohl schon vor ihm von den meisten mathematischen Physikern, die akustische Probleme behandelten, gemacht worden war. Er nimmt nämlich an, dass das Ohr in seiner Empfindung die Luftbewegung genau ebenso in einfache Schwingungsbewegungen (nach der oben S. 267 gegebenen Definition) zerlege, wie es der Mathematiker mittels der Sätze von Fourier in der Rechnung thut, und dass das Ohr den einer jeden solchen einfachen Schwingungsbewegung entsprechenden Ton hört. Dieses von Ohm ausgesprochene Gesetz scheint mir in der That die allerauffallendste Bestätigung zu erhalten durch die Genauigkeit, mit welcher ein geübtes Ohr die theoretisch geforderten Töne zu hören im Stande ist. Ein auffallendes Beispiel, welches schon Th. Young [2]) besprochen hat, giebt die Bewegung der Saiten, deren Gesetze gut genug bekannt sind, um sie vollständig berechnen zu können. Wenn man eine Saite mit einem spitzen Stift seitwärts zieht, und dann von der Spitze abgleiten lässt, sodass sie zu tönen anfängt, so kann man in dem Moment des Anfangs der Bewegung annehmen, dass die Geschwindigkeit aller Theile der Saite gleich Null ist, ihre Gestalt aber aus zwei geraden Linien besteht, die an der Berührungsstelle einen Winkel bilden. Daraus berechnet sich 524
dann die ganze Bewegung der Saite nach bekannten Regeln. Ist l die Länge der Seite, T die Schwingungsdauer, y die Elongation des um x von der Mitte entfernten Punktes der Saite zur Zeit t, so ist:

1) Poggendorff's Annalen Bd. LIX, S. 513.
2) Phil. Transact. 1800, T. I, p. 137.

$$y = A\left\{\cos.\frac{\pi x}{l}\sin.\frac{2\pi t}{T} + \frac{1}{9}\cos.\frac{3\pi x}{l}\sin.\frac{6\pi t}{T} + \frac{1}{25}\cos.\frac{5\pi x}{l}\sin.\frac{10\pi t}{T} + \text{etc.}\right\}.$$

Wenn der Grundton tief ist, hört ein etwas geübtes Ohr alle in dieser Reihe enthaltenen Obertöne selbst bis zum elften Tone der Saite, entsprechend dem Gliede:

$$\frac{A}{121}\cos\frac{11\pi x}{l}\sin\frac{22\pi t}{T},$$

dessen Amplitude nur der 121. Theil von der des Grundtones ist. Nehmen wir an, die letztere sei ein halber Zoll in der Mitte der Saite, was bei hörbaren Tönen vielleicht vorkommen kann, so würde die Amplitude des elften Tones $\frac{1}{20}$ Linie, also dem Auge nicht mehr wahrnehmbar sein. Das Ohr unterscheidet demnach in diesem Falle die kleinen Glieder, die in der Bewegung enthalten sind, genauer als das Auge. Man bedenke ferner, dass es in diesem Falle gar keinen Sinn hat von einer Schwingung zu reden, deren Periode die Dauer von $\frac{1}{11}T$ hat, ausser insofern man die Bewegung in eine Fourier'sche Reihe auflöst. Denn in Wahrheit findet sich in der Gesammtbewegung der einzelnen Saitenpunkte nichts, was in $\frac{1}{11}$ der Schwingungszeit periodisch wiederkehrte. Die Bewegung des Mittelpunktes der Saite wird nach Young als Function der Zeit durch eine Curve von der Form 1 dargestellt, die Be-

wegung eines jeden anderen Punktes der Saite durch eine Curve ähnlich 2.

525 Erst wenn man die ersten neun Glieder der Fourier'schen Reihe von der Bewegung abgezogen hat, entsteht ein Rest der innerhalb einer Wellenlänge des Grundtones etwas von einer elfmaligen periodischen Wiederkehr ähnlicher Theile

zeigt. Th. Young beweisst ferner, dass wenn man die Saite in einem der Knotenpunkte ihrer Obertöne anschlägt, das diesem Obertone entsprechende Glied der Fourier'schen Reihe wegfällt. In diesem Falle verschwindet auch dem Ohre der entsprechende Oberton, was wenigstens nicht regelmässig der Fall sein könnte, wenn etwa das Ohr die Gesammtbewegung der Luft in andere periodische Glieder als die der Fourier'schen Reihe zerlegte.

Gegen die Annahme von Ohm hat A. Seebeck[1]) einen Streit geführt, der leider durch den Tod der beiden ausgezeichneten Physiker beendigt worden ist. Seine Einwände sind meist von der Schwierigkeit hergenommen, welche das Ohr findet die theoretisch geforderten Obertöne wahrzunehmen, so wie davon, dass in vielen Fällen ein Ton durch Verstärkung seiner Obertöne stärker wird.

Indessen glaube ich, dass wenn man in diesem Falle genau unterscheidet, wass der sinnlichen Empfindung des Hörnerven, und was der psychischen Thätigkeit angehört, die von ihm gefundenen Schwierigkeiten verschwinden. Wir wissen, dass fast alle unsere Tonwerkzeuge zusammengesetzte Töne erzeugen, in denen der einfache Grundton immer mehr oder weniger stark von gewissen Obertönen begleitet ist, meist aber so, dass der Grundton an Stärke überwiegt. Wir beurtheilen deshalb auch die Höhe des ganzen zusammengesetzten Tones nur nach der Höhe des Grundtones. Im Sinne der Ohm'schen Theorie müssen wir vermuthen, dass die Klangverschiedenheiten solcher Töne, welche nicht discontinuirliche Bestandtheile enthalten, von der verschiedenen Stärke ihrer Obertöne herrühren. Ich will mir deshalb hier erlauben, um die Begriffe schärfer heraus- 526
zustellen, den zusammengesetzten Ton eines musikalischen Instrumentes Klang zu nennen, und den Namen des Tones nur auf einfache Töne anzuwenden. Ein Klang wäre danach also eigentlich ein Accord mit überwiegendem Grundton, seine Stärke würde gleich der Summe der Stärke der einzelnen in ihn ein-

1) Ohm, Poggendorff's Annalen Bd. LIX, S. 513; Bd. LXII, S. I. Seebeck, ebendaselbst Bd. LX, S. 449; Bd. LXIII, S. 353 und 368. Repert. d. Physik Bd. VIII, Abschn. XXI, S. 1.

tretenden Töne sein, seine Höhe geich der Höhe seines Grundtones. Das Ohr ist nun gewöhnt, die Klänge der musikalischen Instrumente, der menschlichen Stimme u. s. w. immer in derselben Zusammensetzung wiederkehrend zu hören, sodass sie ihm zu bestimmten und bekannten Sinneswahrnehmungen werden, über deren Zusammensetzung zu reflectiren es keine Veranlassung hat, ebensowenig, wie wir uns für gewöhnlich klar machen, dass die sinnliche Anschauung eines körperlich ausgedehnten Gegenstandes aus zwei verschiedenen Netzhautbildern beider Augen zusammengesetzt ist. Wir beachten die Sinnesempfindungen im gewöhnlichen Gebrauche unserer Sinne ja überhaupt nur so weit, als sie uns dienen Gegenstände und Ereignisse der Aussenwelt zu erkennen, und vernachlässigen, was dazu unnöthig ist in solchem Grade, dass eine besondere, oft schwierige Uebung der Aufmerksamkeit nöthig ist, um dergleichen wahrzunehmen. Ich erinnere an die Doppelbilder, die Erscheinungen des blinden Fleckes. So ist uns ein gewisser zusammengesetzter Ton das ausreichende sinnliche Zeichen für die Anwesenheit eines gewissen tönenden Körpers, und insofern von Interesse. Die Art seiner Zusammensetzung dagegen interessirt erst den Physiker, und dieser muss für die Wahrnehmung der Obertöne seine Aufmerksamkeit in ähnlicher Weise künstlich unterstützen, wie für die Wahrnehmung der Doppelbilder und des blinden Fleckes. Ich finde, dass für die Wahrnehmung der Obertöne keineswegs ein besonders geübtes musikalisches Gehör nöthig ist, denn es hören sie auch Personen von geringer musikalischer Uebung, wenn man nur passende Mittel anwendet ihre Aufmerksamkeit auf den Ton zu lenken, der gehört werden soll. Ein geübtes musikalisches Ohr hat nur
527 den Vorzug zu wissen, wie die Octave, Duodecime u. s. w. des angegebenen Tones klingen muss, und daher den betreffenden Ton ohne weitere Hülfe finden zu können. Sonst kann man sich helfen, wenn man kurz vorher den zu hörenden Oberton auf dem Claviere angiebt. Bei aushaltenden Klängen ist es ein sehr vortheilhaftes Mittel, während sie erklingen, den Oberton auf dem Claviere anzugeben und auf sein Verklingen zu achten. Existirt nun derselbe Ton in der angegebenen Klangmasse, so scheint der Clavierton nicht vollständig zu verklingen,

sondern das Ohr wird von ihm unmittelbar auf den entsprechenden Oberton übergeleitet, und hält diesen für die Fortsetzung jenes. Nach dieser Methode hört man z. B. die Obertöne der Orgelpfeifen, der menschlichen Stimme, der Sirenentöne sehr gut.

Ein zusammengesetzter Klang erscheint uns also allerdings als eine einfache Sinnesempfindung, aber wir sind im Stande durch geeignete Leitung unserer Aufmerksamkeit verschiedene sinnliche Empfindungen in ihm zu entdecken, deren Verschmelzung und Vereinigung also, da sie durch die Aufmerksamkeit zu lösen ist, auch nicht durch die Thätigkeit des Nerven sondern selbst nur durch psychische Thätigkeit herbeigeführt sein kann. Seebeck behauptet, dass Ohm's Definition des Tones zu eng sei, dass ausser der dem Grundton entsprechenden einfachen Wellenbewegung auch noch andere Glieder der Fourier'schen Reihe die Empfindung des Grundtones verstärken könnten. Dies erscheint ganz richtig, wenn er unter Ton das versteht, was wir oben mit dem Namen Klang bezeichnet haben, und was für die nur durch die Uebung des gewöhnlichen Lebens geschulte Aufmerksamkeit allerdings ein sinnliches Ganze ist, während die Ohm'sche Definition des Tones in der That das zu bezeichnen scheint, was in der Thätigkeit des Gehörnerven das einfachste Element ist.[1])

Wenn wir nun Ohm's Definition des Tones auf die Ent- 523
stehung der Combinationstöne anwenden, so ergiebt sich leicht, dass ihr entsprechend Combinationstöne so lange gar nicht

1) Ich bemerke hier noch, dass in einzelnen von den Versuchen, die Seebeck in dieser Streitsache angestellt hat, wo er eine Sirenenscheibe von zwei Seiten her angeblasen hat, die Berechtigung der von ihm gezogenen Schlüsse zweifelhaft bleibt, weil die Schwingungsrichtung der Lufttheilchen bei der Ankunft der Wellen am Ohre möglicherweise eine ganz andere sein konnte, als er voraussetzt, wie er denn selbst in seinem Streite mit Savart (Pogg. Annalen Bd. LIX, S. 177, Bd. LXVII, S. 145, Bd. LXVIII, S. 465) nachgewiesen hat, dass die Schwingungsrichtung sich ändert, wenn sich die Fortpflanzungsrichtung ändert. Er giebt den Wellen, welche durch Anblasen in entgegengesetzter Richtung erzeugt waren, entgegengesetzte Vorzeichen, während sie an einzelnen Stellen des Raumes parallel geworden sein konnten und gleiche Vorzeichen haben mussten.

vorkommen können, als eine ungestörte Superposition der primären Tonwellen in der Luft stattfindet. Denn da jede periodische Function der Zeit nur in einer einzigen Weise durch eine Fourier'sche Reihe ausgedrückt werden kann, so kann auch die zusammengesetzte Luftbewegung mehrerer primärer Töne nur in dieselben einfachen Wellen wieder zerlegt werden, aus denen sie zusammengesetzt ist. Aber auch, wenn es gelänge, statt der von Ohm angenommenen Form der Luftbewegung für einen einfachen Ton eine andere bestimmte Form zu finden, welche die Phänomene der Obertöne genügend zu erklären zuliesse: auch dann würde doch immer die zusammengesetzte Luftbewegung vom Ohr nur wieder in dieselbe den primären Tönen entsprechenden Glieder zu zerlegen sein, aus denen sie entstanden war. Nehmen wir aber wie Seebeck an, dass dem einfachen Tone viele verschiedene Formen der Luftbewegung entsprechen könnten, so würde es ganz unbestimmt bleiben, in welche Glieder das Ohr die durch zwei Töne erzeugte periodische Luftbewegung zerlegte. Bei einer solchen unbestimmten Annahme würde also wohl die allgemeine Möglichkeit offen gehalten werden, dass das Ohr Combinationstöne hörte, deren Schwingungszahl dem gemeinschaftlichen Maasse der Schwingungszahlen der primären Töne gleich, oder ein
529 Multiplum derselben wäre, indessen würde doch immer noch die Ursache zu finden sein, welche das Ohr bestimmte, diesen oder jenen Ton wirklich zu hören. Ausserdem sehe ich nicht ein, wie diese Hypothese in Bezug auf irrationelle Tonverhältnisse zu anderen Folgerungen führen sollte, als die W. Weber daraus gezogen hat, wonach die angenäherten Verhältnisse der Kettenbrüche zu benutzen wären, um die Höhe der Combinationstöne zu finden. Aber gerade diese Folgerung stimmt nicht mit der Erfahrung überein.

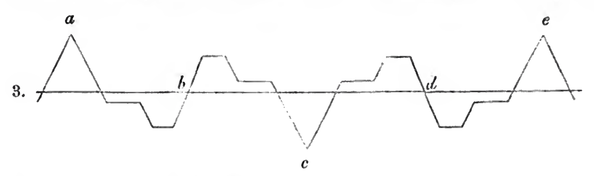
Noch habe ich eine bestimmtere Annahme zu erwähnen, welche Young andeutet, und welche auch Hällström und Röber benutzt haben; sie gründet sich auf die scheinbare Analogie der Stösse zweier nahe gleich hoher Töne und der Combinationstöne. Die Zahl der Stösse ist nämlich ebenso wie die Schwingungszahl des Differenztones erster Ordnung, gleich der Differenz der Schwingungszahlen der primären Töne.

Ist diese Differenz klein, so ist der Combinationston unhörbar tief, dagegen sind die Stösse hörbar. Ist die Differenz gross, so kann das Ohr die Zahl der Stösse nicht mehr fassen, dagegen hört es den Combinationston. Die Stösse entstehen bekanntlich dadurch, dass die Wellensysteme zweier nicht genau gleich hoher Töne abwechselnd mit gleichen und entgegengesetzten Phasen zusammenfallen und sich demgemäss abwechselnd verstärken und schwächen. Jeder Stoss entspricht einer vorübergehenden Verstärkung der Luftvibrationen, umfasst also eine Reihe hin- und hergehender Bewegungen der Lufttheilchen. Young nahm nun an, dass solche Stösse zweier schwebenden Töne ebenso wie die einfachen Luftstösse, z. B. der Sirene, wenn sie schnell genug einander folgen, dem Ohre die Empfindung eines Tones geben könnten, und solch ein Ton sei der Combinationston. Diese Hypothese scheint sich viele Freunde erworben zu haben. Aber abgesehen davon, dass sie den Ursprung der Summationstöne nicht erklärt, und nicht erklärt, warum die Stösse bei den allerleisesten, die Combinationstöne nur bei starken Tönen hörbar sind, so passt sie ganz allein auf solche Fälle, wo die Differenz der Schwingungszahlen 530
klein ist gegen die Schwingungszahlen selbst.

Es kommt bei dieser Annahme doch wesentlich darauf an, dass sich nach Ablauf jeder Schwingungsdauer des Combinationstons ähnliche Eindrücke, nämlich die eines verstärkten Tones, für das Ohr wiederholen sollen. Wenn ein Ton A nun 100 Schwingungen macht, während der andere B 101 ausführt, und im Anfange der Bewegung zwei positive Maxima von A und B zusammenfallen, so wird das 100te Maximum von A mit dem 101ten von B zusammenfallen, und ein Maximum von doppelter Stärke erzeugen, aber auch das 101, 102, 103te Maximum von A wird genau genug mit dem 102, 103, 104ten von B zusammenfallen, um nahe ebenso starke zusammengesetzte Maxima zu geben. Auch wird es für den Grad der Tonverstärkung gleichgültig sein, ob die positiven Maxima nach 100 Schwingungen von A und 101 von B, oder die negativen Maxima nach $99\frac{1}{2}$ und $101\frac{1}{2}$ Schwingungen bez. von A und B, oder die Nullpunkte nach $99\frac{3}{4}$ und $100\frac{3}{4}$ Schwingungen es sind, die genau zusammenfallen. Immer wird die

Stärke der doppelten Maxima und Minima, und die Gestalt des zusammengesetzten Wellenzuges fast genau dieselbe sein; aber, und das ist wohl zu beachten, diese Aehnlichkeit entsteht nur daher, dass die Differenz der Schwingungsdauer gegen diese selbst sehr klein ist.

Jetzt wollen wir die entgegengesetzte Annahme machen. Die Curve 3 stellt die Resultate zweier Wellenzüge von gleicher lebendiger Kraft vor, deren jeder eine Gestalt wie die Curve 1 S. 288 hat, und deren einer zwischen *a* und *e* drei, der andere sieben Schwingungen macht. Ihr Combinationston macht in



531 derselben Zeit vier Schwingungen. Wenn wir also die Entfernung *ae* in vier gleiche Theile *ab*, *bc*, *cd*, *de* theilen, so müssten zur Erzeugung des Combinationstones gleichartige Eindrücke auf das Ohr in folgenden Momenten hervorgebracht werden: 1) durch die positiven grössten Maxima *a* und *e*; 2) durch den Nullpunkt der Curve *b*; 3) durch das negative Maximum *c*; 4) durch den Nullpunkt *d*. Hier kann von einer Aehnlichkeit dieser Curventheile keine Rede mehr sein, und so scheint mir die gegebene Erklärung hier ihre Bedeutung zu verlieren. Man hat sie auf eine Eigenthümlichkeit der zusammengesetzten Wellenbewegung gegründet, welche unter den Umständen, wo Stösse eintreten, bei verhältnissmässig geringer Differenz der Schwingungszahlen stattfindet, aber gerade unter den Umständen, wo Combinationstöne eintreten, bei verhältmässig grosser Differenz der Schwingungszahlen nicht mehr vorhanden ist.

Durch diese Ueberlegungen auf das Ungenügende der bisherigen Theorien aufmerksam gemacht, glaubte ich einen Fingerzeig, der auf den richtigen Weg führen konnte, in dem bisher wenig beobachteten Umstande zu entdecken, dass die Combinationstöne nur bei starken primären Tönen auftreten, und

ihre Intensität in einem viel schnelleren Verhältnisse zu wachsen scheint, als die der primären Töne. Danach glaubte ich vermuthen zu dürfen, dass sie bei Wellenzügen von unendlich kleinen Amplituden, wie man theoretisch die Schallwellen gewöhnlich annimmt, nicht vorkommen möchten, sondern nur bei solchen von endlichen Amplituden.

Die daraus im Folgenden entwickelte Theorie führte mich auf die Entdeckung der Summationstöne, welche sowohl in auffallender Weise die Richtigkeit der neuen Theorie bestätigen, als auch eine von den früheren Theorien aus unerklärbare Erscheinung sein möchten.

Während man bisher immer angenommen hat, dass verschiedene Tonwellenzüge, welche gleichzeitig in der Luft oder einem anderen elastischen Mittel erregt werden, sich einfach superponiren ohne gegenseitig Einfluss auf einander zu haben, 532
und man diese Annahme durch die bekannten Erfahrungen der Möglichkeit, gleichzeitig erklingende Töne verschiedener Instrumente oder menschlicher Stimmen, jede mit ihrer besonderen Tonhöhe und ihrer Klangfarbe, neben einander zu erkennen, hinreichend gerechtfertigt glaubte: so war doch andererseits zu bedenken, dass die theoretische Mechanik eine solche ungestörte Superposition nur für den Fall *unendlich kleiner* Schwingungen nachwies, während aus den Bewegungsgleichungen der Luft gleichzeitig ersehen werden konnte, dass bei Wellenzügen von endlicher Grösse der Amplituden eine solche ungestörte Superposition nicht stattfinden kann. Die theoretische Untersuchung der letztgenannten Fälle ergab mir nun, dass verschiedene einfache Schwingungsbewegungen eines elastischen Körpers sich ungestört superponiren, so lange die Amplituden der Schwingungen so klein sind, dass die durch die Verschiebungen hervorgebrachten Bewegungskräfte diesen Verschiebungen selbst merklich proportional sind. *Wenn aber die Amplituden der Schwingungen so gross werden, dass die Quadrate der Verschiebungen einen merklichen Einfluss auf die Grösse der Bewegungskräfte erhalten, so entstehen neue Systeme einfacher Schwingungsbewegungen, deren Schwingungsdauer derjenigen der bekannten Combinationstöne entspricht.*

Der einfachste Fall ist der, wo wir nur die Bewegungen eines einzelnen beweglichen Massenpunktes zu betrachten haben, der durch elastische Kräfte in einer bestimmten Gleichgewichtslage festgehalten wird, und den Tonwellenzüge des umgebenden elastischen Mittels erschüttern. Es ist dieser Fall den Verhältnissen in unserem Ohre einigermassen ähnlich. Der bewegliche Massenpunkt entspricht dem Stiele des Hammers, das Paukenfell einer elastischen Feder, die ihn in einer bestimmten Stellung festzuhalten sucht.

Die Masse des beweglichen Punktes sei m, seine Entfernung von der Gleichgewichtslage zur Zeit t sei x. Die Kraft k,
533 welche ihn in die Gleichgewichtslage zurückzuführen strebt, sei abhängig nicht blos von der ersten, sondern auch von der zweiten Potenz der Elongation, also:

$$k = ax + bx^2.$$

Ausserdem mögen zwei Schallwellenzüge den beweglichen Massenpunkt treffen, und auf ihn einen periodisch veränderlichen Druck $f \sin(pt)$ und $g \sin(qt + c)$ ausüben. Die Bewegungsgleichung des Massenpunktes ist alsdann:

$$-m\frac{d^2x}{dt^2} = ax + bx^2 + f\sin(pt) + g\sin(qt + c) \tag{1}$$

Diese Gleichung kann man durch eine Reihe integriren, indem man darin setzt:

$$x = \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \text{etc.} \tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f = \varepsilon f_1 \\ g = \varepsilon g_1 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \tag{2a}$$

und die mit gleichen Potenzen von ε multiplicirten Glieder einzeln gleich Null setzt. Also:

$$ax_1 + m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -f_1\sin(pt) - g_1\sin(qt + c) \tag{3a}$$

$$ax_2 + m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -bx_1^2 \tag{3b}$$

$$ax_3 + m\frac{d^2x_3}{dt^2} = -2bx_1x_2 \text{ etc.} \tag{3c}$$

Das vollständige Integral der Gleichung (3a) ist:

$$x_1 = A\sin\left(t\sqrt{\frac{a}{m}} + h\right) + u\sin(pt) + v\sin(qt + c),$$

worin A und h die beiden Integrationsconstanten sind, u und v aber folgende Werthe haben:

$$u = \frac{f_1}{m p^2 - a} \text{ und } v = \frac{g_1}{m q^2 - a}.$$

Das erste Glied x_1 der Reihe 2 entspricht also drei Tönen, von denen der erste die Schwingungszahl $\sqrt{a/m}/2\pi$ hat, und dem eignen Tone des schwingenden Punktes entspricht. Dieser Ton, wenn er auch im Anfange der Bewegung vorhanden sein möchte, erlöscht jedenfalls schnell. Wir können also in unserem 534
Falle A gleich Null setzen, und haben dann:

$$x_1 = u \sin(pt) + v \sin(qt + c), \tag{4}$$

Dieses erste Glied unserer Reihe lässt erkennen, dass der schwingende Punkt zunächst die erregenden Töne wiedergiebt. Dieses Glied würde das einzige der Reihe sein, wenn die Kraft nicht vom Quadrat der Entfernung abhängig, also $b = 0$, oder x so klein wäre, dass bx^2 gegen ax vernachlässigt werden könnte. In diesem Gliede findet noch eine ungestörte Superposition der Schwingungen statt. Ihre Amplituden u und v fallen gleich gross aus, gleichviel ob der andere Ton vorhanden ist oder nicht.

Setzt man den Werth x_1 aus der Gleichung 4 in 3, so erhält man:

$$\begin{aligned} a x_2 + m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -b \Big\{ u^2 \sin^2(pt) + v^2 \sin^2(qt + c) \\ &\qquad + 2uv \sin(pt) \sin(qt + c) \Big\} \\ &= -b \Big\{ \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2) - \tfrac{1}{2} u^2 \cos(2pt) \\ &\quad - \tfrac{1}{2} v^2 \cos(2qt + 2c) + uv \cos[(p - q)t - c] \\ &\qquad - uv \cos[(p + q)t + c] \Big\}. \end{aligned}$$

Das Integral dieser Gleichung ist folgendes, wenn man den eigenen Ton des schwingenden Punktes wieder fortlässt:

$$\begin{aligned} x_2 = &- \frac{b}{2a}(u^2 + v^2) - \frac{b u^2}{2(4 m p^2 - a)} \cos 2pt \\ &- \frac{b v^2}{2(4 m q^2 - a)} \cos 2(qt + c) + \frac{b u v}{m(p - q)^2 - a} \cos[(p - q)t - c] \\ &+ \frac{b u v}{m(p + q)^2 - a} \cos[(p + q)t + c]. \end{aligned} \tag{5}$$

Das zweite Glied unserer Reihe liefert uns also Töne von den Schwingungszahlen $2p/2\pi$, $2q/2\pi$, $(p-q)/2\pi$ und $(p+q)/2\pi$. Die ersten beiden sind höhere Nebentöne der primären Töne $p/2\pi$ und $q/2\pi$, der dritte ist der Differenzton erster Ordnung, und der vierte der Summationston erster Ordnung. Die
535 Amplitude der beiden Combinationstöne enthält als Factor das Product uv der Amplituden der primären Töne. Sind die letzteren also sehr klein, so ist die Amplitude der Combinationstöne eine kleine Grösse zweiter Dimension, und wachsen u und v gleichmässig, so wächst uv im quadratischen Verhältnisse. Daraus folgt mit der Erfahrung übereinstimmend, dass bei sehr schwachen primären Tönen die Combinationstöne unhörbar sein müssen, bei starken primären Tönen die letzteren dagegen in einem stärkeren Verhältnisse wachsen müssen.

Den eigenen Ton des schlaff gespannten Trommelfells in seiner Verbindung mit den trägen Massen der Gehörknöchelchen und des Labyrinthwassers dürfen wir wohl als ziemlich tief ansehen, so dass, wenn wir unsere Rechnung auf den Trommelfellapparat anwenden wollen, folgen würde, dass:

$$\sqrt{\frac{a}{m}} < p - q < p + q,$$

oder:

$$a < m(p-q)^2 < m(p+q)^2$$

und:

$$\frac{buv}{m(p-q)^2 - a} > \frac{buv}{m(p+q)^2 - a},$$

dass also die Amplitude des Differenztones grösser ist als die des Summationstons. Vernachlässigen wir die Grösse a, so würden sich bei der Quinte die Amplituden der beiden Combinationstöne zu einander verhalten wie $(3+2)^2 : (3-2)^2 = 25 : 1$, bei der Quarte wie $49 : 1$, bei der Terz wie $81 : 1$. Wirklich finden wir, dieser Berechnung entsprechend, in der Erfahrung die Intensität des Summationstons stets sehr viel geringer als die des Differenztons.

Das dritte Glied der Reihe enthält die Töne, welche in 2π Secunden $3p$, $3q$, $2p+q$, $2p-q$, $p+2q$, $p-2q$, p und q Schwingungen machen. Unter diesen sind die Töne $p \pm 2q$ und $q \pm 2p$ Combinationstöne zweiter Ordnung. Ihre Ampli-

tude ist eine kleine Grösse dritter Dimension. Ebenso lässt sich übersehen, dass das $n$te Glied der Reihe Combinationstöne $n$ter Ordnung liefern wird, deren Amplitude eine kleine Grösse $n$ter Dimension sein wird.

Zu bemerken ist noch, dass bei einem einzelnen schwin- 536
genden Massenpunkte das Quadrat der Elongationen, nur dann Einfluss auf die Bewegungen haben kann, wenn er unsymmetrisch befestigt ist. Denn in der oben gemachten Annahme für die Grösse der elastischen Kraft k, welche den Massenpunkt in seine Gleichgewichtslage zurückzuführen strebt,

$$k = ax + bx^2$$

liegt implicite die Bedingung, dass eine Verschiebung in Richtung der negativen x eine andere elastische Kraft hervorrufe, als eine solche in der Richtung der positiven x.

Unter den Theilen im Ohre finden wir nun namentlich das Trommelfell in höchst unsymmetrischer Weise gebildet. Der Stiel des ersten Gehörknöchelchens, des Hammers, ist in dasselbe eingewachsen und zieht es trichterförmig nach innen. Eben dieser zur Entstehung der Combinationstöne nothwendigen unsymmetrischen Bildung wegen glaube ich annehmen zu dürfen, dass wenn im Ohre Combinationstöne entstehen, namentlich das Trommelfell dabei betheiligt sei. Die Asymmetrie des Ohres spricht sich auch deutlich aus bei Scheibler's Versuchen über die Schwingungen unrein gestimmter harmonischer Intervalle, welche Versuche, wie ich oben erwähnt habe, auch mit einfachen Tönen gelingen. Es lässt sich aus Scheibler's Bestimmungen der Zahl der Stösse nachweisen, dass zwei Schallwellenzüge verschiedene Empfindungen im Ohre erregen, wenn die Elongationen der Lufttheilchen in ihnen in entsprechenden Zeitpunkten gleiche Grösse, aber entgegengesetzte Richtung haben.

Nimmt man z. B. zwei Gabeln, die genau eine Octave miteinander bilden, und verstimmt die höhere um so viel, dass sie in der Secunde eine Schwingung mehr macht als vorher, so hört man beim Zusammenklingen beider Gabeln in jeder Secunde eine Schwebung. Diese Schwebung giebt sich dem Ohre mehr durch einen Wechsel der Klangfarbe, als durch wechselnde Stärke des Tons zu erkennen. Es klingt ungefähr

wie $\mathfrak{U} - \mathfrak{E} - \mathfrak{U} - \mathfrak{E} - \mathfrak{U} - \mathfrak{E}$ u. s. w. Während also die
537 beiden zusammenklingenden Töne zu Anfang und Ende der Secunde einen gewissen sinnlichen Eindruck *A* hervorbringen, bringen sie in der Mitte der Sekunde einen anderen sinnlichen Eindruck *B* hervor. Eine leicht anzustellende Untersuchung der Bewegungsform der Lufttheilchen zeigt nun, dass der Eindruck *B* in der Mitte der Secunde einer Form der Schallwellen entspricht, welche das negative Abbild derjenigen ist, die zu Anfang und zu Ende der Secunde den Eindruck *A* hervorbringt. Fallen z. B. die positiven Maxima des höheren Wellenzuges zu Anfang und Ende der Secunde abwechselnd auf die positiven und negativen Maxima des tieferen Wellenzuges, so sind es in der Mitte der Secunde die negativen Maxima des ersten die mit den Maximis des zweiten zusammenfallen, und die zweite Wellencurve bekommt von einem negativen Maximum angefangen ganz dieselbe Gestalt aber entgegengesetzte Lage, wie die erste Wellencurve von einem positiven Maximum angefangen. Daraus geht also hervor, dass das Ohr von entgegengesetzt gerichteten, aber gleich grossen Luftbewegungen ungleich afficirt wird.

Aus der gegebenen Entwickelung ergiebt sich, dass wir den Ursprung der Combinationstöne nicht nothwendig in der Empfindungsweise des Hörnerven zu suchen haben, sondern dass bei zwei gleichzeitig erklingenden Tönen von gehöriger Stärke den Combinationstönen wirkliche Schwingungen des Trommelfelles und der Gehörknöchelchen entsprechen können, welche von dem Nervenapparate in der gewöhnlichen Weise empfunden werden. Danach würden die Combinationstöne nicht eine blos subjective Existenz haben, sondern würden auch objectiv, wenn auch zunächst nur in den schwingenden Theilen des Ohres selbst bestehen können.

Wir haben die gegebene Entwickelung zunächst auf die Bewegungen des Apparates der Trommelhöhle bezogen; indessen ist klar, dass ähnliche Verhältnisse sich auch ausserhalb des Ohres müssen wiederholen können, dass also auch den Combinationstönen entsprechende Schwingungen ganz unab-
538 hängig vom menschlichen Ohre und ausserhalb desselben unter geeigneten Umständen müssen vorkommen können.

Wir haben ferner nur die Bewegung eines einzelnen von elastischen Kräften festgehaltenen Massenpunktes der Berechnung unterworfen; indessen kann man aus der Analogie leicht schliessen, dass ähnliches auch bei Systemen von Massenpunkten zwischen denen elastische Kräfte wirksam sind, also in elastischen festen oder flüssigen Körpern wird vorkommen können. Die mathematische Untersuchung der nicht unendlich kleinen Schwingungen elastischer Körper ist jedoch sehr weitläufig und da ich bisher noch über keine Versuche zu berichten habe, zu deren Verständniss eine ausführliche Kenntniss der Theorie nothwendig wäre, so möge es hier genügen anzuführen, was mich die theoretische Untersuchung der Bewegung der Luft in dieser Beziehung gelehrt hat.

Bei der mathematischen Untersuchung über die Schallbewegung in der Luft berücksichtigt man in der Regel nur die Glieder der Gleichungen, welche die ersten Potenzen der Elongationen der Luftheilchen enthalten und vernachlässigt die höheren Potenzen derselben. Behält man auch die Glieder bei, welche die zweiten Potenzen der Elongationen enthalten, so findet man folgendes:

1) Jeder Punkt der Luftmasse, in welchem die Schwingungen, die einem einzelnen der angegebenen primären Töne angehören, heftig genug wären, wird Centrum von neuen secundären Wellensystemen, welche den harmonischen Obertönen des betreffenden Tones entsprechen.

2) Jeder Punkt der Luftmasse, wo die Schwingungen beider primär angegebenen Töne gleichzeitig hinreichende Grösse erreichen, wird das Centrum neuer secundärer Wellensysteme die den Combinationstönen entsprechen, und zwar entstehen daselbst sowohl Differenz- als Combinationstöne, erster und höherer Ordnungen.

Wir werden die Bildung von Combinationstönen in der Luftmasse also namentlich dann zu erwarten haben, wenn die Centra der beiden primären Tonwellensysteme nahe aneinander 539
liegen, sodass die dazwischenliegende Luftmasse gleichzeitig von beiden Tönen heftig erschüttert wird.

Es ist möglich die objective Existenz von Combinationstönen durch das Mitschwingen dünner Membranen nachzuweisen.

Aber nur bei der mehrstimmigen Sirene fand ich bisher die Combinationstöne stark genug für diesen Zweck. Ich spannte über die eine Oeffnung einer cylindrischen Röhre von $1\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser eine dünne Kautschukmembran. Das andere Ende der Röhre war durch einen Deckel mit engerer Oeffnung verschlossen. Wenn man gegen die Ränder dieser Oeffnung blies, konnte man verschiedene Töne erzeugen, wobei die Membran aufgestreuten Sand in verschiedene Klangfiguren ordnete. Der Grundton war e_1; wenn er angegeben wurde, sammelte sich aller Sand am Rande der Membran. Ich brachte nun die Mündung des Rohres über die Scheibe der mehrstimmigen Sirene, während die Membran nach oben gewendet, und mit Sand bestreut war, und blies dann die Sirene an, sodass diese allmählig immer schneller rotirte und Töne von wachsender Höhe gab, wobei ich zwei Löcherreihen öffnete. Zuerst tritt alsdann eine Bewegung des Sandes ein, wenn der höhere der beiden gegebenen Töne bis e gestiegen ist, sodass der erste höhere Nebenton des e mit dem Tone der Membran zusammenstimmt. Bei weiter steigender Geschwindigkeit der Sirenenscheibe kam die Membran wieder zur Ruhe, und gerieth zum zweiten Male, und zwar in stärkere Bewegung, wenn der Summationston beider Töne bis e_1, gestiegen war. Vermittels der Sandfigur konnte man controliren, dass die Membran in der That im Tone e_1 mitschwang. Auch stimmt der Summationston niemals mit einem der höheren Nebentöne der primären Töne überein, wenn nicht der eine primäre Ton selbst ein höherer Nebenton des anderen ist. Es blieb also kein Zweifel, dass die Membran durch den Summationston in Schwingung versetzt wurde, und dass dieser Ton also objectiv vorhanden war.

540 Es möge hier genügen, durch einen Versuch das Factum festgestellt zu haben, dass Combinationstöne unabhängig vom menschlichen Ohre entstehen können. Einen anderen Nachweis derselben Thatsache der in mancher Beziehung noch lehrreicher ist, habe ich mittels einer eigenthümlichen Form der Sirene erhalten. Das neue Instrument und die damit auszuführenden Versuche behalte ich mir indessen vor in einem anderen Aufsatze im Zusammenhange zu schreiben.

XVI.

Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden.

Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. 57 S. 1—72. (1859.)

Die mathematische Theorie der Orgelpfeifen ist von den 1
bedeutendsten mathematischen Physikern vielfältig behandelt worden, aber seit den ersten Schritten, welche D. Bernoulli und Euler gethan haben, und durch welche die Hauptzüge der Erscheinung eine annähernde Erklärung fanden, um keinen wesentlichen Schritt vorgerückt. Der Grund davon hat hauptsächlich darin gelegen, dass die Mathematiker es nicht wagten die Annahme aufzugeben, dass die Bewegung der Lufttheilchen im Innern der Röhre überall ihrer Axe parallel gerichtet, und sowohl die Geschwindigkeit wie der Druck in allen Punkten desselben Querschnittes der Röhre gleich gross sei. Diese von den ersten Bearbeitern der Einfachheit wegen gemachte Annahme ist ganz unbedenklich für die von offenen Enden entfernteren Theile einer cylindrischen oder prismatischen Röhre, aber in der Nähe offener Enden, wo die ebenen Wellen der Röhre in den freien Raum überzugehen anfangen, um sich dort in Form kugeliger Wellen auszubreiten, ist jene Annahme nicht mehr zulässig, da es klar ist, dass ein solcher Uebergang nicht sprungweise geschehen kann. Bernoulli, Euler und Lagrange hatten angenommen, dass die Verdichtung am offenen Ende der Röhre stets gleich Null sei. Dass sie sehr viel kleiner sein müsse als bei den gleichen Wellenphasen im Innern der Röhre, wo die bewegte Luft von den Röhrenwänden gehindert

wird, sich seitlich auszudehnen, ist leicht einzusehen, da am offenen Ende kein anderes Hinderniss ihrer Ausdehnung besteht als die Trägheit der benachbarten Luftmassen. Insofern nähert sich jene Annahme und die darauf basirte Theorie allerdings sehr der Wahrheit, aber sie ist nicht vollständig richtig. Denn die Dichtigkeit am Ende der Röhre muss allerdings gleich gesetzt werden der Dichtigkeit der anstossenden Luft im freien Raume, aber nicht der constanten Dichtigkeit der ruhenden Luft, sondern der veränderten Dichtigkeit dieser selbst in Vibration gerathenen Luft. Deshalb widersprechen die Folgerungen aus jener Annahme auch in mancher anderen Beziehung
2 der Erfahrung. So folgt daraus, wie schon Poisson hervorgehoben hat, dass bei gewissen Röhrenlängen die Schwingungen im Innern, welche eine endliche Kraft oder eine endliche mitgetheilte Bewegung erregt, unendlich gross werden, und einmal erregt, nicht wieder erlöschen, weil sie nichts von ihrer lebendigen Kraft der äusseren Luft mittheilen. Euler[1]) selbst hatte diese Abweichungen dadurch erklären wollen, dass die Erschütterung sich zum Theil den Wänden der Röhre mittheilte und dadurch der Luftmasse verloren ginge. Poisson[2]) suchte den Grund richtiger in dem Umstande, dass die Verdichtung am offenen Ende der Röhre nicht vollständig gleich Null, sondern nur sehr klein sei. Aber er wusste ihren wirklichen Werth nicht zu finden, sondern baute seine Theorie auf eine neue Hypothese, welche sich in unserer Untersuchung als im allgemeinen unrichtig erweisen wird. Er machte nämlich die Annahme, dass die Verdichtung am Ende der Röhre proportional der Geschwindigkeit sei, wie sie es bei ebenen fortschreitenden Wellen ist. Wenn die Geschwindigkeit v, die Verdichtung s, die Schallgeschwindigkeit a ist, so setzte er:

$$kv = as.$$

Die Constante k nimmt er an geschlossenen Enden als sehr klein, an offenen als sehr gross an; ihr wirklicher Werth bleibt unbestimmt. Dieser Annahme gemäss müssten am offenen Ende der Röhre die Maxima der Geschwindigkeit mit den

1) Novi Commentarii Acad. Petrop. Tom. XVI, p. 347.
2) Mémoires de l'Académie des Sciences 1817 T. II, p. 305.

Maximis der Verdichtung der Luft der Zeit nach zusammenfallen. Im Gegentheil wird die von uns anzustellende vollständigere Analyse zeigen, dass beide nahehin um ein Viertel der Schwingungsdauer auseinanderfallen. Poisson's Annahme beseitigt die genannten Uebelstände der früheren Theorien, indem bei seiner Hypothese allerdings Schall in den freien Raum übergeht, und deshalb die Schallschwingungen in der Röhre schnell erlöschen, sobald die erregende Kraft aufgehört hat zu wirken. Wie viel Schall aber in den freien Raum bei jeder Reflexion der Schallwellen übergeht, hängt von dem unbekannten Werthe der Constante k ab, und bleibt deshalb selbst unbekannt.

Andererseits folgt aus Poisson's wie aus der älteren Annahme, dass die Flächen kleinster Bewegung (Knotenflächen) genau um eine Viertelwellenlänge vom offenen Ende der Röhre abstehen, was allen älteren und neueren Erfahrungen über die Höhe der durch Anblasen erzeugten Töne und der durch die Resonanz der Röhre verstärkten Töne widerspricht und durch die directen Versuche von Hopkins über die Lage der Knotenflächen widerlegt wird. Diese Flächen sind in offenen cylindrischen und prismatischen Röhren vom Ende der Röhre etwas weniger entfernt, als die Viertelwellenlänge beträgt. Gegen Poisson's Versuch zu erklären, warum beim Anblasen beiderseits offener Röhren tiefere Töne entstehen, als seine Theorie erwarten lässt, haben schon Quet und Zamminer gegründete Bedenken erhoben. Poisson's Formeln ergeben nämlich, dass, wenn eine Bewegung von bestimmter Amplitude der Luft der Röhre in einem Knotenpunkte mitgetheilt wird, die Amplitude in den Schwingungsbäuchen sehr gross wird, nämlich von derselben Ordnung wie Poisson's Constante k. Daraus schliesst er, dass für diesen Fall die Amplituden der Schwingung grösser würden, als es die bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen gemachte Annahme unendlich kleiner Vibrationen erlaubte. Unter diesen Umständen sei also Schallbewegung unmöglich, und es könnten deshalb beim Anblasen der Röhre nur Töne entstehen, die sich dieser Grenze der Tonhöhe näherten, wirklich aber immer tiefer bleiben müssten. Mathematisch ist dieser Schluss unzulässig, denn wie gross auch die übrigens durchaus unbekannt bleibende Grösse k sein mag, so würde doch immer

die Grösse der mitgetheilten Amplituden so klein gewählt werden können, dass die Bewegungsgleichungen der Schallbewegung anwendbar bleiben, und auch der Erfahrung widerspricht diese Darstellung. Allerdings tritt in den Versuchen von Hopkins die Schwierigkeit, der Luft der Röhre in einer Knotenfläche eine gegebene Bewegung mitzutheilen, deutlich in die Erscheinung, weil nämlich hier der Widerstand der Luft den Schwingungen der von Hopkins angewendeten schwingenden Platten am meisten hinderlich wird. Die lebendige Kraft der Bewegung, welche der schwingende Körper an die Luft abgeben muss, um die starke Resonanz der Röhre zu unterhalten, wird hier am bedeutendsten, und wenn also der schwingende Körper nicht genügend viel lebendige Kraft erzeugen und abgeben kann, hört er auf zu schwingen. Wendet man dagegen Platten an, die von Stimmgabeln erschüttert werden, deren Vibrationen zu kräftig sind, um durch den Luftwiderstand erheblich verändert zu werden, so erhält man gerade in den Fällen die vollste und schönste Resonanz, wo die Platte in einer Knotenfläche der Röhre liegt, und nach Poisson die Resonanz unmöglich wäre. Ausserdem zeigt sich in den Versuchen von Hopkins die Schwierigkeit des Tönens der Platten gerade bei solchen Tönen,
4 wie sie das Anblasen der Röhre giebt, aber nicht bei den etwas höheren Tönen, welche Poisson als unmöglich betrachtet; diese kommen ohne Schwierigkeit zu Stande.

Es hat übrigens Quet[1]) diese Unzulänglichkeiten von Poisson's Theorie, die nicht nothwendig aus seiner Fundamentalhypothese fliessen, verbessert, während er sich übrigens dieser Hypothese anschliesst und ihre Richtigkeit wahrscheinlich zu machen sucht.

Hopkins[2]) hat die Beschränkung, welche in Poisson's Grenzbedingung für das offene Ende der Röhre liegt, weggelassen und nur die Bedingung festgehalten, dass der Druck am offenen Ende klein sein müsse, und dadurch die Möglichkeit offen behalten in seinen Formeln die Uebereinstimmung mit

1) Liouville Journal, Tom. XX, p. 1.

2) Transactions of the Cambridge Philos. Soc. Vol. V. — Poggendorff's Annalen Bd. XLIV, p. 246.

den Thatsachen vollständig zu bewahren, aber freilich bleiben die Constanten, von denen die Lage der Knotenflächen und die Phasenunterschiede in den einzelnen Theilen der Röhre abhängen, in der Theorie unbekannt. Dagegen hat Hopkins eine Reihe wichtiger Versuche über die Lage der Knotenpunkte und die Tonhöhe ausgeführt, um eine jener Constanten wenigstens empirisch zu bestimmen.

Duhamel[1]) stellte sich zur Aufgabe, den Einfluss der der Axe nicht parallelen Bewegungen in Röhren zu ermitteln. Da er aber für das offene Ende sich mit der einfachen Annahme begnügt, dass hier der Druck gleich Null sei, verschwindet der Einfluss, den die seitlichen Bewegungen der Lufttheile hier haben, aus seiner Rechnung, und er kommt zu dem Schlusse, dass die Differenz zwischen Theorie und Erfahrung nicht von dem Vorkommen solcher Bewegungen abhängt.

Masson[2]) endlich vertheidigt die Theorie von Poisson im Ganzen und sucht die Uebereinstimmung zwischen ihr und der Erfahrung durch eine neue Hypothese über die Bewegungsart der Luft in dem der Anblaseöffnung nächsten Abschnitte der Luftsäule herzustellen.

Uebrigens ist es klar, dass, sobald die Gestalt des ganzen Luftraumes, sowohl des inneren der Pfeife als des äusseren, gegeben ist — wir nehmen ihn im Folgenden immer als von festen Wänden begrenzt an — und wenn ferner die den Schall
erregenden Kräfte gegeben sind, die Aufgabe mathematisch 5
vollständig bestimmt ist, und keine weitere Hypothese über den Zustand der Luft am offenen Ende einer Pfeife zu machen ist. Eine richtig angestellte Analyse der Aufgabe muss darüber vollständigen Aufschluss geben.

Akustische Untersuchungen, bei denen ich über die bisher unerledigten Punkte der Theorie Auskunft brauchte, waren für mich die Veranlassung die Untersuchung aufzunehmen, in welcher Weise sich ebene Schallwellen, die in der Tiefe einer cylindrischen Röhre erregt worden sind, bei ihrem Uebergange in den freien Raum verhalten, und ich habe gefunden, dass die

1) Liouville Journal, Tom. XIV, p. 49.
2) Annales de Chimie et de Physique, Sér. 3, Tom. XL, p. 418.

gegenwärtigen Hülfsmittel der Analysis ausreichen, über die wesentlichen hier in Betracht kommenden Fragen genügende Auskunft zu geben, ohne dass es nöthig ist, irgend eine Hypothese zu machen.

Die Kräfte der Analyse sind in den bisherigen Arbeiten über Theorie des Schalles hauptsächlich darauf hin angespannt worden, den Verlauf einer ursprünglich vorhandenen Gleichgewichtsstörung in einer Luftmasse, die übrigens keiner Einwirkung fremder Kräfte unterliegt, zu bestimmen. Bei den Tönen der Pfeifen ist aber dieses Problem von verhältnissmässig untergeordneter Wichtigkeit. Es handelt sich hauptsächlich darum die Schwingungsform zu ermitteln, welche schliesslich sich dauernd herstellt, wenn die die Schwingungen erregende Ursache dauernd und gleichmässig fortwirkt. Es ist ferner unnöthig, dass wir die Analyse durch Beibehaltung der willkürlichen Functionen verwickelter machen, welche die Form der ursprünglich erregten Schwingung ausdrücken. Wir werden vielmehr voraussetzen, dass diese Vibrationen denen eines einfachen Tones von n Schwingungen in der Secunde entsprechen, also von der Form $\cos(2\pi n t + c)$ sind. Die Willkürlichkeit der Form würde sich ja auch nach erfolgter Auflösung des Problems immer leicht herstellen lassen durch Zusammensetzung einer grösseren Zahl von solchen einfachen Tönen.

Da somit die Form der Aufgabe etwas anders gefasst wird, als es in den akustischen Untersuchungen bisher geschehen war, ist es nöthig in den ersten fünf Paragraphen einige allgemeine Untersuchungen über die Natur der hier vorkommenden Functionen vorauszuschicken. Es zeigt sich, dass wir es dabei mit Functionen zu thun haben, die, wenn die Wellenlänge unendlich gross wird, übergehen in die Formen der elektrischen (oder magnetischen) Potentialfunctionen und dass eine ganze Reihe der interessanten Eigenschaften, die für diese Functionen bekannt sind, auch für jene gelten. Da ich schon in einer früheren Arbeit für die Function, deren Differential-
6 quotienten nach drei rechtwinkeligen Coordinatenaxen genommen die drei entsprechenden Componenten der Geschwindigkeit geben, den Namen des Geschwindigkeitspotentials vorgeschlagen habe, so lässt sich diese Analogie auch weiter

in der Bezeichnung festhalten. Den elektrischen Massenpunkten entsprechen die Erregungspunkte des Schalles, der Masse der ersteren die Intensität der letzteren. Sind die letzteren continuirlich im Raume oder auf einer Fläche vertheilt, so lässt sich der Begriff der Dichtigkeit auf sie übertragen, und es lassen sich in beiden Fällen Beziehungen ganz analoger Art zwischen ihrer Dichtigkeit und den Differentialquotienten des Geschwindigkeitspotentials aufstellen, wie sie für die electrische Dichtigkeit und die Differentialquotienten der elektrischen Potentialfunctionen gelten.

Den Hauptnutzen gewährt aber die Uebertragung des Theorems von Green[1]) auf die hier vorliegenden Verhältnisse, welches sich schon für die Theorie der Elektricität und des Magnetismus so ausserordentlich fruchtbar gezeigt hat. Von allgemeinen Sätzen, die daraus herfliessen, sollen nur folgende hervorgehoben werden: 1) Die Schallbewegung in jedem allseitig begrenzten Raume, welcher keine Erregungspunkte enthält, kann stets dargestellt werden als ausgehend von Erregungspunkten, die nur längs der Oberfläche des Raumes in einer oder zwei einander unendlich nahen Schichten ausgebreitet sind. 2) In jedem Raume, dessen sämmtliche Dimensionen verschwindend klein gegen die Wellenlänge sind, können für das Geschwindigkeitspotential der Luftbewegung die analytischen Formen der elektrischen Potentialfunctionen gesetzt werden, welche von jenem nur unendlich wenig unterschieden sind. 3) Wenn in einem theils von endlich ausgedehnten festen Wänden begrenzten, theils unbegrenzten Raume Schall im Punkte *a* erregt wird, so ist das Geschwindigkeitspotential in einem anderen Punkte *b* so gross, als es in *a* sein würde, wenn dieselbe Schallerregung in *b* stattfände.

Speciell werden in § 1 die Bewegungsgesetze der Luft für die vorliegende Aufgabe umgeformt, in § 2 die allgemeinen Formen des Geschwindigkeitspotentials für einen von Erregungs-

1) Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. XLIV, S. 360.

punkten freien Raum untersucht, in § 3 die Beziehungen zwischen der Dichtigkeit continuirlich verbreiteter Erregungspunkte und dem Geschwindigkeitspotential festgestellt, in § 4
7 dieselben für Erregungspunkte, die continuirlich über eine Fläche verbreitet sind, und das Theorem von Green auf die Schallbewegung übertragen, in § 5 endlich werden die Grenzbedingungen für weit von den Erregungspunkten entfernte Flächen aufgestellt, durch welche die Wellen in den unendlichen freien Raum hinauslaufen.

Nachdem so die wichtigsten allgemeinen Gesetze der elektrischen Potentialfunctionen für die Lehre von den Schallwellen anwendbar gemacht worden sind, werden die allgemeinen Gesetze der Bewegung der Luft in Röhren mit offenen Mündungen durch wiederholte Anwendung des Green'schen Satzes in § 6 abgeleitet. Es wird hier zunächst vorausgesetzt, dass die Röhren unendlich lang und cylindrisch von beliebigem Querschnitt seien. Nur in einer so kleinen Entfernung von ihrer Mündung, dass deren Grösse gegen die Wellenlänge vernachlässigt werden kann, darf die Röhre in beliebiger Weise von der cylindrischen Form abweichen, und z. B. trompetenförmig erweitert oder verengt sein. Ebenso werden die Dimensionen der Oeffnung als sehr klein gegen die Wellenlänge betrachtet. Da auch die Gestalt des äusseren Luftraumes bestimmt sein muss, wird angenommen, derselbe sei durch eine gegen die Axe der Röhre senkrechte Ebene einseitig begrenzt, mit welcher auch die Ebene der Mündung zusammenfällt. Ueber die Bewegung wird vorausgesetzt, dass Vibrationen, die einem einfachen Tone von n Schwingungen angehören, irgendwo in der Röhre dauernd erregt werden, und dass zwischen der Erregungsstelle und der Mündung ein Abschnitt der Röhre existire, in welcher die Bewegung nicht merklich von der ebener Wellen unterschieden sei. Mittels des Green'schen Satzes kann man nun, ohne die specielle Form der Mündung und der Luftbewegung in der Mündung zu kennen, gewisse Beziehungen herleiten zwischen diesen ebenen Wellen und den sich halbkugelförmig ausbreitenden Wellen in den entfernten Theilen des freien Raumes, und dadurch die bisher offen gebliebenen Fragen über den Einfluss des offenen Endes auf die

ebenen Wellen beantworten, so weit sie allgemein beantwortet werden können.

Nehmen wir die Axe der Röhre als Axe der x, und die Ebene der Mündung als Ebene der yz, so dass der freie Raum den positiven x, die Röhre den negativen entspricht, so ist bei passender Festsetzung des Anfangspunktes der Zeit t die allgemeine Form des Geschwindigkeitspotentials in dem Theile der Röhre, wo die Wellen eben sind, wenn wir die Wellenlänge gleich $2\pi/k$ setzen: 8

$$\psi = \left(\frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx\right)\cos(2\pi nt) + \mathfrak{B}\cos kx \,.\, \sin(2\pi nt).$$

In den unendlich entfernten Theilen des freien Raumes dagegen, wo r die Entfernung vom Anfangspunkte der Coordinaten bezeichnet, ist:

$$\psi = M\frac{\cos(kr - 2\pi nt)}{r}.$$

Nach Euler's Theorie würde $B = \mathfrak{B} = 0$ sein, nach Poisson's $B = 0$, $\mathfrak{B}$ eine unbestimmte kleine Grösse, nach Hopkins' sowohl B wie $\mathfrak{B}$ unbestimmte kleine Grössen, M bleibt in allen dreien unbekannt. Wir finden folgende Beziehungen, wenn wir unter Q die Grösse des Querschnitts der Röhre verstehen, und die Fläche der Oeffnung gegen das Quadrat der Wellenlänge als verschwindend klein betrachten:

$$AQ = -2\pi M,$$
$$kAQ = -2\pi\mathfrak{B}.$$

Zwischen A und B lässt sich keine allgemeine, von der Form der Mündung unabhängige Beziehung aufstellen. Nur lässt sich nachweisen, dass, wenn der Querschnitt der Röhre zur Fläche der Oeffnung ein endliches Verhältniss hat, A/B eine kleine Grösse von derselben Ordnung wie die Dimensionen der Oeffnung ist, die aber jeden beliebigen Werth annehmen kann, wenn die Oeffnung sehr klein gegen den Querschnitt ist.

Wir setzen das Verhältniss:

$$\frac{B}{A} = -k\,\mathrm{tang}\,k\alpha$$

und nennen dann die Grösse $\alpha - x_0$ die reducirte Länge des Stückes der Röhre, welches zwischen $x = 0$ und $x = -x_0$

liegt, die Grösse α selbst die *Differenz der wahren und reducirten Länge* der Röhre.

Nachdem diese Beziehungen zwischen den Coëfficienten ermittelt sind, wird in § 7 die Form der Wellen in der Röhre näher bestimmt. *Knotenflächen*, d. h. Flächen kleinster Bewegung liegen, wo die reducirte Länge der Röhre gleich einem ungeraden Vielfachen der Viertelwellenlänge ist, *Schwingungsbäuche* oder Maxima der Bewegung, wo die reducirte Länge ein gerades Vielfache der Viertelwellenlänge ist. Die *Phasen* der Bewegung sind am Orte der Maxima um die Zeit einer Viertel-Undulation von denen am Orte der Minima verschieden.

9 Die Knotenflächen sind zugleich Stellen des grössten Wechsels der Dichtigkeit, die Bäuche Stellen des kleinsten Wechsels der Dichtigkeit. In nächster Nähe der Knotenflächen und der Flächen stärkster Bewegung fällt die stärkste nach der Mündung gerichtete Geschwindigkeit der Zeit nach zusammen mit der stärksten Verdichtung. In den zwischenliegenden Abtheilungen der Röhre aber liegen beide um eine Viertel-Schwingungsdauer auseinander.

Wenn man die Lage des Geschwindigkeitsmaximums und die des Verdichtungsmaximums für einen jeden einzelnen Zeitmoment bestimmt, so findet man für die fortschreitenden Wellen in den entfernteren Stellen des freien Raumes bekanntlich, dass beide mit der constanten Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen fortschreiten, und dabei allmälig an Grösse abnehmen. Auch in der Röhre bewegt sich das Geschwindigkeitsmaximum vorwärts gegen die Mündung hin, aber so dass sein absoluter Werth am Ort der Bäuche sehr gross, in den Knotenflächen sehr klein ist, und ferner so, dass die Geschwindigkeit seiner Fortbewegung in den Bäuchen sehr klein, in den Knoten sehr gross ist, so dass es überall, wo sich ein Bauch befindet, während einer halben Schwingungsdauer fast ganz still steht, um zu Ende dieser Zeit schnell auf den Ort des nächsten Bauches fortzuschreiten, an dem es dann wieder ebenso lange fast stillsteht. Ebenso bewegt sich das Verdichtungsmaximum, nur dass es in den Knotenflächen anhält und gross ist, während es am Ort der Bäuche klein ist und schnell vorwärts eilt.

Die gewonnenen Resultate können weiter benutzt werden, um die Stärke der Resonanz und die Phasen der in der Luft erregten Schwingungen bei verschiedenen Erregungsweisen des Schalles genau zu bestimmen.

Wenn die Röhre in irgend einem Querschnitte durch eine feste Platte begrenzt ist, welche durch eine äussere Kraft (z. B. eine aufgesetzte Stimmgabel) in eine schwingende Bewegung versetzt wird, deren Grösse durch den Widerstand der Luft nicht merklich verändert werden kann, so ist die Resonanz am stärksten, wenn die reducirte Länge der Röhre ein ungerades Vielfache der Viertelwellenlänge ist, am schwächsten, wenn sie ein gerades Vielfache ist. Im ersteren Falle, also beim Maximum der Resonanz, verhalten sich die Amplituden in den Schwingungsbäuchen zur Amplitude der schwingenden Schlussplatte der Röhre, wie das durch $2\pi \cos k\alpha$ dividirte Quadrat der Wellenlänge zum Querschnitt der Röhre. Bei Röhren mit wenig verengter Mündung ist $\cos k\alpha$ nicht merklich von 1 unterschieden, die Grösse des Maximums der Resonanz also von der Form der Mündung ziemlich unabhängig, und die Stärke des Schalles im freien Raume ist bei solchen Röhren sowohl vom Querschnitt als von der Form der Mündung unabhängig. Bei stark verengter Mündung steigt die Resonanz in der Röhre und auch die Stärke des Schalles im freien Raume. Bei stärkster Resonanz ist die Phase der Bewegung in den Schwingungsbäuchen von den entsprechenden Phasen der mitgetheilten Bewegung der Zeit nach um eine Viertel-Schwingungsdauer verschieden.

Aehnliche Ergebnisse finden sich, wenn der Schall in der Röhre von einem in den entfernteren Theilen des freien Raumes befindlichen tönenden Punkte erregt wird, und für eine jede beliebige Lage des tönenden Punktes im freien Raume vor der Mündung der Röhre lässt sich durch das unter Nr. 3 als Folgerung des Green'schen Theorems oben aufgeführte Reciprocitätsgesetz wenigstens das Verhältniss der Stärke der Resonanz für verschiedene Röhrenlängen angeben. Auch in diesem allgemeinsten Falle findet sich, dass die Resonanz der einerseits geschlossenen Röhre am stärk-

sten ist, wenn ihre reducirte Länge ein ungerades Vielfache der Viertelwellenlänge ist.

Auf offene Röhren, deren beide Mündungen denselben Bedingungen unterliegen, wie die eine Mündung der bisher betrachteten Röhren, lassen sich die Resultate leicht übertragen. Ihre Resonanz ist am stärksten, wenn ihre reducirte Länge gleich einem Vielfachen der halben Wellenlänge ist.

In § 8 werden Röhren betrachtet, welche Rotationskörper sind, und die Methoden aufgesucht, um Formen der Mündung zu finden, für welche die Bewegung der Luft vollständig angegeben werden kann.

In § 9 werden die Rechnungen für die einfachsten Formen der Functionen, welche die Form der Mündung bestimmen, durchgeführt. Unter diesen Formen kommt eine vor, bei welcher die Differenz zwischen reducirter und wahrer Länge verschwindet. Ihre Mündung ist schwach trompetenförmig erweitert, sodass die Fläche der Mündung doppelt so gross ist als der Querschnitt des Cylinders. Eine andere dieser Formen, bei welcher die Weite der Oeffnung gleich der des Cylinders ist, weicht so ausserordentlich wenig von einem vollständigen Cylinder ab, dass man für die meisten praktischen Anwendungen die Differenz wird vernachlässigen dürfen. Der Abstand ihrer Wandung von der eines reinen Cylinders ist berechnet und in einer Tabelle zusammengestellt; mehr als $\frac{1}{100}$ des Radius beträgt diese Abweichung nur auf einem Streifen dicht an der
11 Mündung, dessen Breite 0,54 des Radius beträgt, und die grösste Abweichung, die überhaupt vorkommt, ist $\frac{1}{50}$ des Radius. Die Differenz zwischen der reducirten und wahren Länge dieser Röhre beträgt $\pi/4 = 0{,}785$ des Radius. Die eines vollständigen Cylinders muss ein wenig grösser sein. Die neuesten und sorgfältigsten experimentellen Bestimmungen der Grösse dieser Differenz von Wertheim[1]) und Zamminer[2]) zeigen noch keine sehr grosse Uebereinstimmung untereinander, was vielleicht darin seinen Grund hat, dass die Röhren durch Anblasen zum Tönen gebracht sind, wobei man zwar, wie die

1) Annales de Chimie et de Physique, Sér. 3, Tom. XXXI, p. 394.
2) Pogg. Annalen der Physik XCVII, p. 183.

Erfahrung lehrt, im Allgemeinen Töne derselben Höhe bekommt, wie die Töne der stärksten Resonanz der Röhre, aber doch nicht genau weiss, wie weit die Tonhöhe durch kleine Modificationen des Anblasens verändert werden kann. Auch ist die Länge der Schallwellen nur schwer so genau zu bestimmen, dass auch die verhältnissmässig kleine Differenz der wahren und reducirten Länge der Röhren genau gefunden wird. Wertheim findet den Werth dieser Differenz, wenn sie in Theilen des Radius ausgedrückt wird, ziemlich unabhängig von dem Verhältniss des Durchmessers zur Wellenlänge, und zwar bei beiderseits offenen Röhren für jedes Ende zwischen 0,560 und 0,819, Mittel 0,663 R, für einerseits gedeckte Röhren zwischen 0,638 und 0,862, Mittel 0,746 R, sodass der theoretisch gefundene Werth 0,785 R zwar grösser ist als seine Mittelwerthe, aber doch noch innerhalb der Grenzen der Beobachtungsdifferenzen liegt. Zamminer findet dagegen einen stärkeren Einfluss der Tonhöhe. Bei offenen Röhren variirt der Werth der Differenz von 0,848 bis 0,493 R, während die Viertelwellenlänge von 20,9 R auf 3,9 R sich ändert, und bei geschlossenen Röhren variirt die Differenz zwischen 1,304 und 0,376 R, während die Viertelwellenlänge von 40,1 R auf 7,03 R sinkt. Dies stimmt nicht so gut mit der Theorie, welche so starke Aenderungen des Werthes 0,785 R, der für die tiefsten Töne gilt, bei veränderter Tonhöhe nicht erwarten lässt. Indessen sind bei den Röhren, deren Länge mehr als 30 R beträgt, auch hier die Differenzen so gering, dass Aenderungen der Schwingungszahl um ein Procent genügen würden, die Uebereinstimmung herzustellen, und bei verschiedener Stärke des Anblasens können leicht viel grössere Aenderungen eingetreten sein.

Endlich ist in § 10 noch eine Aufgabe in ihren allgemeinen Zügen behandelt, welche bisher der theoretischen Bearbeitung
unzugänglich gewesen war, nämlich die Bestimmung der Luft- 12
schwingungen in solchen Hohlräumen, deren drei Dimensionen gleichmässig als verschwindend klein gegen die Wellenlänge betrachtet werden können, und die durch eine Oeffnung, deren Fläche selbst gegen die Oberfläche des Hohlraumes verschwindend klein ist, mit der äusseren Luft communiciren. Es lässt

sich die Höhe der Töne, für welche solche kugel- und flaschenförmige Pfeifen stärkste Resonanz geben, allgemein bestimmen. Ist die Oeffnung kreisförmig, und ihr Flächeninhalt s, das Volumen des Hohlkörpers S, die Schallgeschwindigkeit a, und die Schwingungszahl des Tones n, so ist nach der Theorie:

$$n = \frac{a}{\sqrt{2}\,\sqrt[4]{\pi^5}} \frac{\sqrt[4]{s}}{\sqrt{S}}.$$

Wählen wir als Längeneinheit das Millimeter, und setzen $a = 332260$, so ist:

$$n = 56174 \frac{\sqrt[4]{s}}{\sqrt{S}}.$$

Sondhauss[1]) hat aus Versuchen die Schwingungszahl der durch Anblasen solcher Hohlkörper erhaltenen Töne in die Formel gebracht:

$$n = 52400 \frac{\sqrt[4]{s}}{\sqrt{S}}.$$

Noch besser stimmt die Theorie mit den Versuchen von Wertheim, bei welchen das Verhältniss der Fläche der Oeffnung zur Oberfläche des Hohlraumes noch kleiner ist als bei Sondhauss, und die Uebereinstimmung ist desto grösser, je kleiner jenes Verhältniss ist.

Für elliptische Oeffnungen lässt sich der Werth von n ebenfalls bestimmen. Er wird etwas kleiner als für kreisförmige.

Auch für Hohlkörper mit zwei Oeffnungen lässt sich dieselbe Aufgabe lösen; das theoretische Gesetz stimmt auch hier mit den empirischen Formeln von Sondhauss und seinen Versuchen überein.

§ 1. Die Gleichungen der Luftbewegung.

Es sei innerhalb einer Luftmasse in dem Punkte, der durch die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z bestimmt ist, zur Zeit t der Druck gleich p, die den drei Coordinatenaxen

1) Pogg. Annalen LXXXI, S. 235 und 347. Es ist übrigens in diesem Aufsatze die Bezeichnungsweise der französischen Physiker gebraucht, wonach die Schwingungszahlen der Töne doppelt so gross werden als nach der deutschen Bezeichnung.

parallelen Componenten der Geschwindigkeit u, v, w, die Dichtigkeit h, und die Componenten der auf die Einheit der gasigen Masse wirkenden äusseren Kräfte X, Y und Z seien auszu- 13
drücken als Differentialquotienten einer Potentialfunction P, sodass:

$$X = \frac{dP}{dx}, \qquad Y = \frac{dP}{dy}, \qquad Z = \frac{dP}{dz}.$$

Die bekannten Bewegungsgleichungen für die inneren Punkte der Luftmasse sind demgemäss:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dP}{dx} - \frac{1}{h}\cdot\frac{dp}{dx} &= \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz},\\
\frac{dP}{dy} - \frac{1}{h}\cdot\frac{dp}{dy} &= \frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz},\\
\frac{dP}{dz} - \frac{1}{h}\cdot\frac{dp}{dz} &= \frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz},\\
-\frac{dh}{dt} &= \frac{d(hu)}{dx} + \frac{d(hv)}{dy} + \frac{d(hw)}{dz}.
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Wenn Luft, ohne Wärme abzugeben, ihre Dichtigkeit ändert, ist:

$$p = b^2 h^{\nu}, \qquad (1\,\mathrm{a})$$

wo b eine Constante und $\nu = 1{,}42$ ist. Daraus folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp}{dx} &= b^2 \nu h^{\nu-1} \frac{dh}{dx} \quad \text{und}\\
\frac{1}{h}\frac{dp}{dx} &= b^2 \nu h^{\nu-2} \frac{dh}{dx} = \frac{b^2\nu}{\nu-1}\,\frac{d(h^{\nu-1})}{dx}
\end{aligned}\right\} \qquad (1\,\mathrm{b})$$

und ähnlich für die Differentialquotienten nach y und z.

Die Schallbewegung gehört zu denjenigen Bewegungen, denen ein Geschwindigkeitspotential zukommt, welches mit Φ bezeichnet werde, sodass wir haben:

$$u = \frac{d\Phi}{dx}, \qquad v = \frac{d\Phi}{dy}, \qquad w = \frac{d\Phi}{dz}. \qquad (1\,\mathrm{c})$$

Setzt man die Werthe aus (1 b) und (1 c) in die Gleichungen (1), so haben die drei ersten derselben eine gemeinschaftliche Integralgleichung, nämlich:

$$P - \frac{b^2\nu}{\nu-1}\left(h^{\nu-1} - h_0^{\nu-1}\right) = \frac{d\Phi}{dt} + \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dz}\right)^2\right\}, \quad (1\,\mathrm{d})$$

wo h_0 eine Function der Zeit sein kann, und die vierte Gleichung lässt sich auf die Form bringen:

$$0 = \frac{d(h^{\nu-1})}{dt} + (\nu - 1) h^{\nu-1} \left[\frac{d^2 \Phi}{dx^2} + \frac{d^2 \Phi}{dy^2} + \frac{d^2 \Phi}{dz^2} \right]$$
$$+ \frac{d\Phi}{dx} \cdot \frac{dh^{\nu-1}}{dx} + \frac{d\Phi}{dy} \cdot \frac{dh^{\nu-1}}{dy} + \frac{d\Phi}{dz} \cdot \frac{dh^{\nu-1}}{dz}. \tag{1e}$$

14 In dem Folgenden nehmen wir an, dass die Geschwindigkeiten und Aenderungen der Dichtigkeit verschwindend klein seien. Setzen wir:

$$h = h_0 (1 + \mathfrak{h}),$$

so betrachten wir also P, $\mathfrak{h}$, sämmtliche Differentialquotienten von $\mathfrak{h}$, P und Φ als unendlich kleine Grössen und vernachlässigen ihre höheren Potenzen. Dann werden die beiden Gleichungen (1 d) und (1 e), indem man $b^2 \nu h_0^{\nu-1} = a^2$ setzt:

$$P - a^2 \mathfrak{h} = \frac{d\Phi}{dt}, \tag{1f}$$

$$0 = \frac{d\mathfrak{h}}{dt} + \frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{d^2\Phi}{dz^2}. \tag{1g}$$

Indem man die erste Gleichung nach t differentiirt, kann man $\mathfrak{h}$ aus beiden eliminiren[1]) und erhält:

$$0 = \frac{dP}{dt} - \frac{d^2\Phi}{dt^2} + a^2 \left[\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{d^2\Phi}{dz^2} \right]. \tag{2}$$

Wir wollen im Folgenden nur Fälle behandeln, wo wir es mit einem einzigen gleichmässig anhaltenden Tone von n Schwingungen in der Zeiteinheit zu thun haben, und also Φ von der Form ist:

$$\Phi = \Psi' \cos(2\pi n t) + \Psi'' \sin(2\pi n t), \tag{2a}$$

wo Ψ' und Ψ'' Functionen von x, y, z sind. Dabei kann die Gleichung (2) nur bestehen, wenn auch P von der Form ist:

$$\frac{n}{2a^2} P = -q'' \cos(2\pi n t) + q' \sin(2\pi n t). \tag{2b}$$

---

1) Ich bemerke hier noch, dass diese Elimination von h auch an den unverkürzten Gleichungen (1 d) und (1 e) vollzogen werden kann, und dass man die Eliminationsgleichung, welche von der dritten Dimension in Bezug auf Φ und seine Differentialquotienten ist, ebenfalls mit Hülfe der hier folgenden Theoreme durch eine nach Sinus und Cosinus der Zeit fortlaufende Reihe integriren kann, deren Glieder von $n$ter Dimension der kleinen Grössen den Combinationstönen $n$ter Ordnung der primär angegebenen Töne entsprechen.

Es zerfällt dann die Gleichung (2) in die folgenden beiden:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 4\pi q' + k^2 \Psi' + \frac{d^2\Psi'}{dx^2} + \frac{d^2\Psi'}{dy^2} + \frac{d^2\Psi'}{dz^2}, \\ 0 &= 4\pi q'' + k^2 \Psi'' + \frac{d^2\Psi''}{dx^2} + \frac{d^2\Psi''}{dy^2} + \frac{d^2\Psi''}{dz^2}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

wo:

$$k = \frac{2\pi n}{a} = \frac{2\pi}{\lambda}, \tag{3a}$$

und λ die Wellenlänge ist.

Zunächst werden wir uns mit der Integration dieser Differentialgleichungen zu beschäftigen haben. Aus ihrer Ableitung geht hervor, dass q' und q'' Functionen der Coordinaten sind, welche sich nur an solchen Stellen des Raumes von 0 unterscheiden, wo veränderliche Kräfte auf die Luftmasse einwirken und Schallschwingungen erregen. In allen anderen Theilen der Luftmasse ist $q = 0$, und dort sind daher die Functionen Ψ der Bedingung unterworfen:

$$0 = k^2 \Psi + \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d^2\Psi}{dy^2} + \frac{d^2\Psi}{dz^2}. \tag{3b}$$

Ich werde im Folgenden den immer wiederkehrenden Ausdruck:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{d^2\Phi}{dz^2}$$

nach dem Vorgang von Green mit $\nabla_x \Phi$, oder wo es unzweideutig ist, mit $\nabla \Phi$ bezeichnen.

§ 2. Integration der Wellengleichung.

§ 2. Wir beginnen mit der Integration der einfacheren Gleichung:

$$0 = k^2 \Psi + \nabla_x \Psi. \tag{3b}$$

Ein bekanntes particulares Integral derselben ist:

$$\Psi = \frac{A \cos(kr + g)}{r}, \tag{4}$$

wenn wir mit A und g Constanten bezeichnen, mit r aber die Entfernung des Punktes x, y, z von einem festen Punkte α, β, γ, also:

$$r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2.$$

Es ist nämlich:

$$\frac{d\Psi}{dx} = -\frac{A(x-\alpha)}{r^3}\left[\cos(kr+g) + kr\sin(kr+g)\right], \tag{4a}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\Psi}{dx^2} &= -A\left[\frac{1}{r^3} - \frac{3(x-\alpha)^2}{r^5}\right][\cos(kr+g) + kr\sin(kr+g)] \\
&\qquad - \frac{Ak^2(x-\alpha)^2}{r^3}\cos(kr+g), \\
\frac{d^2\Psi}{dy^2} &= -A\left[\frac{1}{r^3} - \frac{3(y-\beta)^2}{r^5}\right][\cos(kr+g) + kr\sin(kr+g)] \\
&\qquad - \frac{Ak^2(y-\beta)^2}{r^3}\cos(kr+g), \\
\frac{d^2\Psi}{dz^2} &= -A\left[\frac{1}{r^3} - \frac{3(z-\gamma)^2}{r^5}\right][\cos(kr+g) + kr\sin(kr+g)] \\
&\qquad - \frac{Ak^2(z-\gamma)^2}{r^3}\cos(kr+g).
\end{aligned}\right\} \quad (4\,b)$$

16 Wenn man die drei Gleichungen ($4b$) addirt, so erhält man:

$$\nabla_x \Psi = -Ak^2 \frac{\cos(kr+g)}{r} = -k^2\Psi,$$

vorausgesetzt, dass nicht $r = 0$ und dabei die Werthe von $d^2\Psi/dx^2$, $d^2\Psi/dy^2$, $d^2\Psi/dz^2$ und Ψ unendlich werden. Mit Ausnahme des Punktes α, β, γ ist also dann die Differentialgleichung (3b) mittels des in Gleichung (4) angenommenen Werthes von Φ durch den ganzen unendlichen Raum erfüllt.

Indem wir in Gleichung (4) g entweder gleich Null oder gleich $-\frac{1}{2}\pi$ machen, erhalten wir zwei verschiedene Formen des particularen Integrals.

1) Wenn $g = -\frac{1}{2}\pi$, wird:

$$\Psi = A\frac{\sin kr}{r}, \quad (4\,c)$$

und erhält für $r = 0$ den endlichen Werth Ak. Auch die Differentialquotienten bleiben endlich, es wird nämlich für $r = 0$:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} = \frac{d^2\Psi}{dy^2} = \frac{d^2\Psi}{dz^2} = -\tfrac{1}{3}Ak^3,$$

wie man leicht sieht, wenn man $\cos kr$ und $\sin kr$ nach Potenzen der verschwindenden Grösse r entwickelt. Daraus ergiebt sich für $r = 0$:

$$\nabla_x \Psi + k^2\Psi = 0.$$

Die Funktion $\Psi = A\sin kr/r$ ist also ein solches particulares Integral der Gleichung (3b), welches im ganzen Raume und auch im Punkte α, β, γ gültig ist.

2) Wenn wir $g = 0$ setzen, wird:

$$\Psi = A \frac{\cos kr}{r} \tag{4d}$$

und für $r = 0$ unendlich gross, ebenso wie seine Differentialquotienten. Die Gleichung (3b) wird also im ganzen Raume erfüllt, mit Ausnahme der Punkte α, β, γ.

Daraus ergiebt sich ferner leicht, dass wenn wir setzen:

$$\Psi = \Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}\left[A_{\alpha,\beta,\gamma}\frac{\sin kr}{r}\right], \tag{4e}$$

wo bei den einzelnen Gliedern der Summe die Werthe von α, β, γ und A verschieden sind, die Gleichung (3b) erfüllt ist im ganzen Raume, ohne Ausnahme der Punkte α, β, γ.

Wenn wir aber setzen: 17

$$\Psi = \Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}\left[A_{\alpha,\beta,\gamma}\frac{\cos kr}{r}\right], \tag{4f}$$

so ist die Gleichung (3b) im ganzen Raume erfüllt mit Ausnahme derjenigen Punkte, deren Coordinaten α, β, γ in der Summe vorkommen.

Denken wir uns die Punkte α, β, γ continuirlich neben einander im Raume vertheilt, so werden aus den Summen Integrale, und wir schliessen, dass die Function:

$$\Psi = \iiint h_{\alpha,\beta,\gamma}\frac{\sin kr}{r}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma \tag{4g}$$

im ganzen Raume der Gleichung (3b) genügt, dagegen die Function:

$$\Psi = \iiint h_{\alpha,\beta,\gamma}\frac{\cos kr}{r}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma \tag{4h}$$

nur in denjenigen Theilen des Raumes, für welche $h = 0$. In beiden soll h eine willkürliche Function von α, β und γ bedeuten.

Wenn wir in der Gleichung (3b) $k = 0$ setzen, verwandelt sie sich in:

$$\nabla_x \Psi = 0, \tag{3c}$$

die bekannte Differentialgleichung für die Potentialfunctionen solcher Massen, welche in die Ferne mit anziehenden oder abstossenden Kräften wirken, deren Intensität dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist. Die verschiedenen

Formen für das Integral Ψ der Gleichung (3b), welche wir aufgestellt haben, verwandeln sich, wenn sie $\sin kr/r$ enthalten, in:

$$\Psi = \text{Constans},$$

welches Integral im ganzen Raume ohne Ausnahme eines Punktes der Gleichung (3c) genügt, oder, wenn sie $\cos kr/r$ enthalten, in:

$$\Psi = \Sigma\left[\frac{A}{r}\right],$$

oder:

$$\Psi = \iiint \frac{h}{r}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma,$$

welche beiden Formen in denjenigen Punkten des Raumes nicht genügen, in denen anziehende oder abstossende Masse vorhanden ist, in denen also A oder h nicht gleich Null ist.

Da die Gleichung:

$$0 = k^2\Psi + \nabla_x \Psi$$

18 im ganzen mit Luft gefüllten Raume erfüllt sein muss mit Ausnahme solcher Stellen, wo veränderliche Kräfte auf die Luft wirken, schliessen wir, dass in den Formen des Integrals (4d), (4f), (4h) diejenigen Punkte und Theile des Raumes, in denen die Gleichung (3b) nicht erfüllt ist, Erregungspunkte des Schalles sind. Wir wollen sie auch als solche bezeichnen. Es mag in den Formen des Integrals (4d) und (4f) die Constante A die Intensität des betreffenden Erregungspunktes heissen, und in (4h), wo die Erregungspunkte continuirlich durch den Raum vertheilt gedacht sind, nennen wir die Constante h ihre Dichtigkeit. Bei electrischen Problemen, wo $k = 0$, würden die Erregungspunkte den Massenpunkten, die Intensität der Masse, die Dichtigkeit der Dichtigkeit entsprechen. Da die Functionen Ψ die Bedeutung von Geschwindigkeitspotentialen haben, wollen wir, entsprechend dem Sprachgebrauch in der Lehre von der Elektricität und dem Magnetismus, eine solche Summe wie (4f), welche sich auf eine bestimmte Zahl von Punkten α, β, γ bezieht, das Geschwindigkeitspotential dieser bestimmten Erregungspunkte nennen. Die Gleichung (3b) wird also erfüllt durch die ganze Ausdehnung eines gegebenen Raumes S, wenn Ψ

das Geschwindigkeitspotential ausserhalb S gelegener Erregungspunkte ist.

§ 3. Gesetz der Raumdichtigkeit.

Wenn wir nun zur Betrachtung der Differentialgleichung:

$$\nabla_x \Psi + k^2 \Psi = -4\pi q \tag{3}$$

übergehen, so ist zunächst zu bemerken, dass für $k = 0$ diese Gleichung in:

$$\nabla_x \Psi = -4\pi q \tag{3d}$$

übergeht, deren Integral bekanntlich ist:

$$\Psi = \iiint \frac{q_{\alpha,\beta,\gamma}}{r}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma + \Phi,$$

worin Φ eine Function bezeichnet, für welche in dem ganzen Theile des Raumes, wo die Gleichung (3d) erfüllt sein soll, $\nabla\,\Phi = 0$ ist.

Wir wollen jetzt zeigen, dass in ganz analoger Weise das Integral der Gleichung:

$$\nabla_x \Psi + k^2 \Psi = -4\pi q \tag{3}$$

ist:

$$\Psi = \iiint q_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{\cos kr}{r}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma + \Phi, \tag{5}$$

wo Φ eine Function bezeichnet, für welche in den Theilen des Raumes, wo die Gleichung (36) gültig sein soll: 19

$$\nabla_x \Phi + k^2 \Phi = 0.$$

Um die durch das Zeichen $\nabla_x \Psi$ vorgeschriebenen Differentiationen unter dem Integralzeichen in (5) vornehmen zu können, denke ich mir den ganzen Raum durch eine den Punkt x, y, z in unendlich kleiner Entfernung umgebende rings geschlossene Fläche getheilt, und nenne den unendlich kleinen inneren Raum S_0, den umgebenden äusseren S_1. Das in dem Werthe von Ψ [Gleichung (5)] enthaltene Integral zerlege ich dem entsprechend in zwei Theile, von denen der eine Ψ_0 der Integration über S_0, der andere Ψ_1 der über S_1 entspricht.

Es ist also:

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Phi. \tag{5a}$$

Da Ψ_1 ein Potential von Erregungspunkten, die ausserhalb S_0 liegen, für einen innerhalb S_0 enthaltenen Punkt ist, so ist:

$$\nabla_x \Psi_1 + k^2 \Psi_1 = 0,$$

ebenso:

$$\nabla_x \Phi + k^2 \Phi = 0,$$

also:

$$\nabla_x \Psi + k^2 \Psi = \nabla_x \Psi_0 + k^2 \Psi_0. \tag{5b}$$

Nun setze ich:

$$f_r = \frac{\cos kr}{r} - \frac{1}{r},$$

welche Grösse f_r für $r = 0$ auch gleich Null wird, während aus den Gleichungen (4b) sich ergiebt, dass für sehr kleine Werthe von r d^2f/dx^2, d^2f/dy^2 und d^2f/dz^2 sich auf Grössen von der Dimension $1/r$ reduciren, und für $r = 0$:

$$\nabla_x f_r = -\frac{k^2}{r}$$

wird. Ferner setze ich:

$$\Psi' = \iiint q_{\alpha,\beta,\gamma} f_r \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma,$$

$$\Psi'' = \iiint q_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{1}{r} \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma,$$

beide Integrale über den unendlich kleinen Raum S_0 ausgedehnt, so dass:

$$\Psi_0 = \Psi' + \Psi''. \tag{5c}$$

Um zu ermitteln, von welcher Grössenordnung Ψ', Ψ'' und
20 $\triangle \Psi'$ sind, führe man statt der rechtwinkligen Coordinaten α, β und γ Kugelcoordinaten ein, indem man setzt:

$$x - \alpha = r \cos \omega,$$

$$y - \beta = r \sin \omega \cos \vartheta,$$

$$z - \gamma = r \sin \omega \sin \vartheta,$$

dann wird:

$$d\alpha \, d\beta \, d\gamma = r^2 \sin \omega \, d\omega \, d\vartheta \, dr.$$

Ist also die mit $d\alpha \, d\beta \, d\gamma$ unter dem Integrationszeichen multiplicirte Grösse für $r = 0$ entweder endlich, wie qf_r, oder von der Ordnung $1/r$, wie q/r und $\nabla_x f_r$, welches gleich $-k^2/r$ ist, so wird die zu integrirende Grösse unendlich klein und über eine unendlich kleine Distanz r integrirt. Daher werden die Grössen Ψ', Ψ'', Ψ_0 [wegen (5c)] und $\nabla_x \Psi'$ unendlich klein. Dagegen ist $\nabla_x \Psi''$ endlich und hat den bekannten Werth:

$$\nabla_x \Psi'' = -4\pi q.$$

Folglich wird aus (5b) und (5c):

$$\triangle_x \Psi + k^2 \Psi = \triangle_x \Psi' + \triangle_x \Psi'' + k^2 \Psi' + k^2 \Psi''$$

und, indem wir die unendlich kleinen Grössen gegen die endliche vernachlässigen:

$$\nabla_x \Psi + k^2 \Psi = -4\pi b, \tag{3}$$

was zu erweisen war.

§ 4. Gesetz der Raumdichtigkeit.

Es lässt sich für die hier untersuchten Formen von Geschwindigkeitspotentialen ferner dieselbe Relation erweisen, welche für die Potentialfunctionen elektrischer Massen an solchen Flächen stattfindet, die mit endlichen Massen in unendlich dünner Schicht belegt sind.

Setzen wir:

$$\Psi = \int p \frac{\cos kr}{r} d\omega, \tag{6}$$

wo $d\omega$ das Flächenelement einer beliebigen Fläche Ω bezeichnet und p eine Function, die sich in der Fläche continuirlich ändert, und untersuchen die ersten Differentialquotienten von Ψ für solche Punkte x, y, z des Raumes, welche der Fläche Ω unendlich nahe liegen.

Wir setzen wieder: 21

$$\frac{\cos kr}{r} = f_r + \frac{1}{r},$$

$$\Psi = \Psi' + \Psi'',$$

$$\Psi' = \int p f_r \, d\omega,$$

$$\Psi'' = \int p \frac{1}{r} \, d\omega.$$

Ψ' ist jedenfalls endlich, wenn p und die Grösse der Fläche Ω endlich sind, da f_r immer endlich ist. Dass Ψ'' unter denselben Bedingungen endlich ist, ist aus der Theorie der elektrischen Potentialfunctionen bekannt, ebenso dass Ψ'' auf beiden Seiten dicht an der Fläche dieselben Werthe hat. Dass letzteres auch mit Ψ' und also auch mit Ψ der Fall sei, ist leicht zu ersehen, da f_r, auch wenn man durch die Schicht selbst hindurchgeht, sich immer nur continuirlich ändern kann. Dagegen wissen wir, dass die Differentialquotienten von Ψ'' an der Fläche einen endlichen Sprung ihres Werthes erleiden,

während leicht zu erkennen ist, dass die von Ψ' an der Fläche continuirlich sein müssen. Denken wir uns durch eine geschlossene Linie, die in unendlich kleiner Entfernung den Fusspunkt des von x, y, z auf die Fläche Ω gefällten Lothes umgiebt, ein Stück Ω_0 aus der Fläche herausgeschnitten und das Integral $\int p f_r d\omega$ getheilt in Ψ'_0, welches über die Fläche Ω_0, und Ψ'_1, welches über den Rest der Fläche ausgedehnt ist, sodass:

$$\Psi' = \Psi_0' + \Psi_1'.$$

Nun ist die Grösse:

$$\frac{d f_r}{d x} = -\frac{k^2}{2}\frac{x-a}{r}$$

für unendlich kleine Werthe von r; bleibt also endlich, macht aber einen Sprung, wenn man von positiven Werthen von $x - a$ durch $r = 0$ nach negativen übergeht, ist dagegen continuirlich, wenn man nicht durch $r = 0$ hindurchgeht. Letzteres geschieht nun keinenfalls, wenn man in Ψ_1' die Werthe von x, y, z sich ändern lässt. Dagegen ist $d\Psi_0'/dx$, wo allerdings ein Sprung eintreten würde, unendlich klein als das Integral einer endlichen Grösse über eine unendlich kleine Fläche genommen, und wir können deshalb seinen Werth gegen $d\Psi_1'/dx$ und $d\Psi''/dx$ vernachlässigen. Folglich sind die Differentialquotienten von Ψ', welches gleich $\Psi_0' + \Psi_1'$ ist, continuirlich, und die
22 von Ψ müssen an der Fläche Ω einen Sprung von derselben Grösse wie die von Ψ'' machen. Bezeichnen wir die von der Fläche ab nach beiden Seiten hingehenden Normalen mit $n_,$ und $n_{,,}$, so ist bekanntlich:

$$\frac{d\Psi''}{dn_,} + \frac{d\Psi''}{dn_{,,}} = -4\pi p,$$

und daraus folgt, dass auch:

$$\frac{d\Psi}{dn_,} + \frac{d\Psi}{dn_{,,}} = -4\pi p \tag{6a}$$

sei, was zu beweisen war.

Man kann ferner den für die Lehre von den elektrischen und magnetischen Potentialfunctionen so äusserst fruchtbaren

Lehrsatz von Green [1]) auch auf die hier vorliegenden Functionen mit dem grössten Vortheil anwenden.

Wenn Ψ und Φ zwei Functionen sind, welche innerhalb eines abgegrenzten Raumes S eindeutig und stetig sind, d. h. überall endliche erste Differentialquotienten haben, so ist nach jenem Satze von Green:

$$\int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega + \iiint \Psi \nabla \Phi dx\, dy\, dz = \int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega + \iiint \Phi \nabla \Psi dx\, dy\, dz,$$

wo $d\omega$ ein Flächenelement der Oberfläche von S, n die nach innen gerichtete Normale bedeutet, und die Integrationen nach $d\omega$ über die ganze Oberfläche von S, die nach $dx\, dy\, dz$ durch das ganze Innere von S auszudehnen sind. Wenn wir auf beiden Seiten dieser Gleichung addiren $k^2\iiint \Psi \Phi\, dx\, dy\, dz$, so bringen wir den Satz in die Form, welche wir hier brauchen:

$$\int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega + \iiint \Psi (\nabla \Phi + k^2 \Phi)\, dx\, dy\, dz \tag{7}$$
$$= \int \Psi \frac{d\Psi}{dn} d\omega + \iiint \Phi (\nabla \Psi + k^2 \Psi)\, dx\, dy\, dz.$$

Sind Ψ und Φ dargestellt als Geschwindigkeitspotentiale von Erregungspunkten, die theils innerhalb, theils ausserhalb des Raumes S continuirlich mit der Dichtigkeit q und p verbreitet sind, so ist nach Gleichung (3), (5) und (7):

$$\int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega - 4\pi \iiint \Psi p\, dx\, dy\, dz \tag{7 a}$$
$$= \int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega - 4\pi \iiint \Phi q\, dx\, dy\, dz.$$

Sind Ψ und Φ Geschwindigkeitspotentiale von ausserhalb S 23
gelegenen Erregungspunkten, so wird:

$$\int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega = \int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega. \tag{7 b}$$

Green hat bewiesen, dass eine solche Gleichung wie (7a) auch richtig bleibt, wenn in einem unendlich kleinen Raumelement ds des Raumes S die Dichtigkeit p einen so grossen constanten Werth annimmt, dass $p\, ds$ einer endlichen Grösse A gleich wird,

---

1) Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. 44, S. 360.

obgleich dann Φ an dieser Stelle nicht stetig bleibt, sondern unstetig wird, wie A/r. Nehmen wir an, dass Φ das Geschwindigkeitspotential der in dem unendlich kleinen Raumelemente ds, dessen Coordinaten α, β, γ seien, mit der gleichmässigen Dichtigkeit p vertheilten Erregungspunkte sei, während p überall sonst gleich Null ist, sodass also Φ in endlicher Entfernung vom Punkte α, β, γ den Werth habe:

$$\Phi = A\frac{\cos kr}{r},$$

so reducirt sich das dreifache Integral der linken Seite der Gleichung (7a), indem wir den Werth, welchen Ψ im Punkte α, β, γ hat, mit Ψ_a bezeichnen, auf:

$$\Psi_a \int p\,ds = A\,\Psi_a.$$

Die Gleichung (7) wird also:

$$\begin{aligned}-4\pi\,\Psi_a = \int \frac{d\Psi}{dn}\frac{\cos kr}{r}\,d\omega - \int \Psi\frac{d}{dn}\left(\frac{\cos kr}{r}\right)d\omega \\ + \iiint(\nabla_x\Psi + k^2\Psi)\frac{\cos kr}{r}\,dx\,dy\,dz.\end{aligned} \tag{7c}$$

Somit ist die Function Ψ, welche wir nur der Bedingung unterworfen hatten eindeutig und stetig zu sein, die übrigens ganz beliebiger Art sein kann, auf die Form unserer Geschwindigkeitspotentiale gebracht. Ist übrigens innerhalb des ganzen Raumes S:

$$\nabla_x\Psi + k^2\Psi = 0,$$

so wird die Gleichung (7c):

$$\int \Psi\frac{d}{dn}\left(\frac{\cos kr}{r}\right)d\omega - \int\frac{d\Psi}{dn}\frac{\cos kr}{r}\,d\omega = 4\pi\Psi_a. \tag{7d}$$

Nun ist das zweite dieser beiden Integrale das Potential einer Schicht von Erregungspunkten, welche an der Oberfläche von S ausgebreitet ist und die Dichtigkeit $d\Psi/dn$ hat. Das andere
24 Integral können wir aber betrachten als das Potential einer Doppelschicht von Erregungspunkten, die derselben Fläche anliegen. Denken wir die eine Schicht mit der Dichtigkeit $-\Psi/\varepsilon$ auf der äusseren Seite der Oberfläche von S in der unendlich kleinen Entfernung $\frac{1}{2}\varepsilon$ von dieser Oberfläche ausgebreitet, die andere mit der Dichtigkeit $+\Psi/\varepsilon$ auf der inneren

Seite der Oberfläche von S auch in der unendlich kleinen Entfernung $\frac{1}{2}\varepsilon$ von dieser Oberfläche entfernt, so wird das Potential dieser Schichten dem ersten Integral in (7d) gleich sein. Somit lässt sich jede stetige und eindeutige Function Ψ, welche in allen Theilen des Raumes S der Gleichung genügt:

$$\triangle \Psi + k^2 \Psi = 0,$$

als Geschwindigkeitspotential von Erregungspunkten ausdrücken, die blos längs der Oberfläche von S ausgebreitet sind.

Hier aber hört die Aehnlichkeit mit den elektrischen Potentialfunctionen auf, indem diese letzteren sich stets ausdrücken lassen als Potentialfunctionen einer einfachen Schicht von Elektricität an der Oberfläche des Raumes, was bei unseren Potentialen zwar im Allgemeinen auch der Fall ist, aber für eine unendlich grosse Zahl von bestimmten Werthen von k für eine jede gegebene geschlossene Oberfläche Ausnahmen erleidet. Es sind dies nämlich diejenigen Werthe von k, die den eigenen Tönen der eingeschlossenen Luftmasse entsprechen.

Man kann sich davon leicht an einem Beispiele überzeugen, indem man das Potential für eine gleichmässig und continuirlich mit Erregungspunkten belegte Kugelschaale berechnet.

Wenn sämmtliche Dimensionen des Raumes S sehr klein gegen die Wellenlänge sind, kann kr gegen 1 vernachlässigt werden, so oft r die Entfernung zweier innerhalb S gelegener Punkte ist. Unter diesen Umständen wird die Gleichung (7d):

$$4\pi \Psi_a = \int \Psi \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) d\omega - \int \frac{d\Psi}{dn} \frac{d\omega}{r}.$$

Bei dieser Weglassung unendlich kleiner Grössen wird also Ψ eine Function, welche der Gleichung $\nabla \Psi = 0$ im Raume S genügt, und es folgt daraus, dass man in Räumen, deren Dimensionen gegen die Wellenlänge verschwindend klein sind, statt der Functionen, die der Gleichung $\triangle \Psi + k^2 \Psi = 0$ genügen, stets unendlich wenig davon unterschiedene Functionen finden kann, die der Gleichung $\nabla \Psi = 0$ genügen.

Wendet man die Gleichung (7d) auf theilweis zusammen- 25
stossende Räume $S_{,}$ und $S_{,,}$ an, indem man die Elemente

ihrer nicht gemeinsamen Oberfläche mit $d\omega_{,}$ und $d\omega_{,,}$, die des gemeinsamen Stückes ihrer Oberfläche mit $d\omega_0$ bezeichnet, unter $n_{,}$ die nach dem Inneren von $S_{,}$, unter $n_{,,}$ die nach dem Inneren von $S_{,,}$ gerichteten Normalen dieser Flächenelemente versteht, so hat man:

$$\text{wenn innerhalb } S_{,} \quad \nabla \Psi_{,} + k^2 \Psi_{,} = 0,$$
$$\text{und innerhalb } S_{,,} \quad \nabla \Psi_{,,} + k^2 \Psi_{,,} = 0,$$

der Punkt α, β, γ, von dem die Entfernungen r gerechnet werden, aber innerhalb $S_{,}$ liegt, und wir unter dem Integralzeichen $[d\omega_{,} + d\omega_0]$ schreiben, wo die Integration über sämmtliche Elemente $d\omega_{,}$ und sämmtliche $d\omega_0$ ausgedehnt werden soll:

$$4\pi \Psi_{,a} = \int \Psi_{,} \frac{d}{dn_{,}}\left(\frac{\cos kr}{r}\right)[d\omega_{,} + d\omega_0] - \int \frac{d\Psi_{,}}{dn_{,}} \frac{\cos kr}{r}[d\omega_{,} + d\omega_0],$$

$$0 = \int \Psi_{,,} \frac{d}{dn_{,,}}\left(\frac{\cos kr}{r}\right)[d\omega_{,,} + d\omega_0] - \int \frac{d\Psi_{,,}}{dn_{,,}} \frac{\cos kr}{r}[d\omega_{,,} + d\omega_0].$$

Wenn nun an der gemeinsamen Trennungsfläche beider Räume:

$$\Psi_{,} = \Psi_{,,}, \quad \frac{d\Psi_{,}}{dn_{,}} = \frac{d\Psi_{,,}}{dn_{,}} = -\frac{d\Psi_{,,}}{dn_{,,}}$$

ist, so giebt die Addition beider Gleichungen, da $dn_{,} = -dn_{,,}$:

$$4\pi \Psi_{,a} = \int \Psi_{,} \frac{d}{dn_{,}}\left(\frac{\cos kr}{r}\right) d\omega_{,} - \int \frac{d\Psi_{,}}{dn_{,}} \frac{\cos kr}{r} d\omega_{,}$$
$$+ \Psi_{,,} \frac{d}{dn_{,,}}\left(\frac{\cos kr}{r}\right) d\omega_{,,} - \int \frac{d\Psi_{,,}}{dn_{,,}} \frac{\cos kr}{r} d\omega_{,,}.$$

Die Function $\Psi_{,}$ erscheint also hier als Potential von Punkten ausgedrückt, die an der nicht gemeinsamen Oberfläche der Räume $S_{,}$ und $S_{,,}$ liegen, während die Punkte der gemeinsamen Trennungsfläche ganz aus dem Integral verschwinden. Genau denselben Ausdruck erhält man aber für $\Psi_{,,}$, wenn man den Punkt α, β, γ in den Raum $S_{,,}$ verlegt. Es sind also in diesem Falle $\Psi_{,}$ und $\Psi_{,,}$ Potentiale derselben ausserhalb des gemeinsamen Raumes $S_{,}$ und $S_{,,}$ liegenden Erregungspunkte, und beide Functionen müssen continuirlich ineinander übergehen.

Wenn wir also im Folgenden für das Geschwindigkeitspotential in verschiedenen Theilen eines zusammenhängenden Luftraumes verschiedene Ausdrücke $\Psi_{,}$ und $\Psi_{,,}$ werden wählen

müssen, wird die Continuität an der Grenzfläche hergestellt 26
sein, wenn in allen Punkten derselben:

$$\Psi_{,} = \Psi_{,,} \text{ und } \frac{d\Psi_{,}}{dn_{,}} = \frac{d\Psi_{,,}}{dn_{,}} \text{ oder } = -\frac{d\Psi_{,,}}{dn_{,,}}.$$

§ 5. Verhalten in unendlicher Entfernung.

§ 5. Wir müssen noch die Grenzbedingungen aufstellen für solche unendlich entfernt gedachte Oberflächen, durch welche Schallwellen in den unendlichen Raum hinauslaufen, und jenseits welcher es keine Erregungspunkte mehr giebt. Wenn von einem einzelnen Punkte aus in der vorher unbewegten Luft eine Erschütterung ausgeht, so hat das Geschwindigkeitspotential bekanntlich die Form $F_{(r-at)}/r$, wo F eine willkürliche Function, a die Schallgeschwindigkeit, r die Entfernung vom Erregungspunkte α, β, γ bezeichnet. Soll F einer einfach periodischen Bewegung von n Perioden in der Secunde entsprechen, so müssen wir ihm die Form geben $\cos[kr - 2\pi nt + c]/r$, wo $2\pi n = ak$, wie in (3a) festgesetzt ist. Haben wir nun eine beliebige Anzahl Schall erregender Punkte in endlicher Entfernung vom Anfangspunkte der Coordinaten, sodass das Geschwindigkeitspotential Ψ von der Form wird:

$$\Psi = \Sigma \left\{ A_{\mathfrak{a}} \frac{\cos[kr_{\mathfrak{a}} - 2\pi nt + g_{\mathfrak{a}}]}{r_{\mathfrak{a}}} \right\}, \tag{8}$$

wo $r_{\mathfrak{a}}$ die Entfernung vom Punkte $\mathfrak{a}$, $A_{\mathfrak{a}}$ und $g_{\mathfrak{a}}$ Constanten bezeichnen, die für die verschiedenen Punkte verschieden sind, und setzen wir die Coordinaten x, y, z des Punktes, in dem die Schallbewegung bestimmt werden soll, gleich:

$$\varrho \cos\omega, \quad \varrho \sin\omega \cos\vartheta, \quad \varrho \sin\omega \sin\vartheta,$$

für den Punkt $\mathfrak{a}$ aber gleich:

$$\alpha_{\mathfrak{a}}, \quad \beta_{\mathfrak{a}}, \quad \gamma_{\mathfrak{a}},$$

so ist:

$$r = \sqrt{\varrho^2 - 2\varrho(\alpha\cos\omega + \beta\sin\omega\cos\vartheta + \gamma\sin\omega\sin\vartheta) + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

und für unendlich grosse Werthe von ϱ wird:

$$r = \varrho - \alpha\cos\omega - \beta\sin\omega\sin\vartheta - \gamma\sin\omega\sin\vartheta,$$

indem wir die weiteren Glieder vernachlässigen, welche ϱ im Nenner enthalten und deshalb unendlich klein werden. Danach

wird nun der Werth von Ψ, wenn wir nur die Glieder von der Ordnung $1/\varrho$ beibehalten:

27
$$\Psi = \frac{\cos(k\varrho - 2\pi n t)}{\varrho} \Sigma \{A_\mathfrak{a} \cos[k(\alpha_\mathfrak{a} \cos\omega + \beta_\mathfrak{a} \sin\omega \cos\vartheta + \gamma_\mathfrak{a} \sin\omega \sin\vartheta) - g_\mathfrak{a}]\} + \frac{\sin(k\varrho - 2\pi n t)}{\varrho} \Sigma \{A_\mathfrak{a} \sin[k(\alpha_\mathfrak{a} \cos\omega + \beta_\mathfrak{a} \sin\omega \cos\vartheta + \gamma_\mathfrak{a} \sin\omega \sin\vartheta) - g_\mathfrak{a}]\}. \tag{8a}$$

Die beiden Summen in diesem Ausdruck sind von ϱ unabhängig, dagegen Functionen von ω und ϑ. Wir können also schliesslich für unendlich grosse Werthe von ϱ den Werth von Ψ auf die Form bringen:

$$\Psi = \mathfrak{A} \frac{\cos[k\varrho - 2\pi n t + \mathfrak{c}]}{\varrho}, \tag{8b}$$

wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{c}$ Functionen von ω und ϑ sind.

Dieselbe Betrachtung lässt sich auch anwenden, wenn in der Nähe der Schall erregenden Punkte begrenzte feste Körper vorhanden sind in endlicher Entfernung vom Anfangspunkte der Coordinaten, insofern man an der Oberfläche dieser Körper periodisch wirkende Kräfte annehmen kann, welche die Bewegung der Lufttheilchen senkrecht gegen ihre Oberfläche zu vernichten im Stande sind. Ist der Raum durch irgend eine unendlich ausgedehnte Fläche nach einer Richtung begrenzt, so ist diese Betrachtung nicht unmittelbar anwendbar, weil man dann periodisch wirkende Kräfte an dieser Fläche bis in unendliche Entfernung hinaus haben würde. Wohl aber lässt sich einfach der Fall behandeln, wo der Raum durch eine unendliche Ebene begrenzt ist, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht. Man braucht sich zu den Erregungspunkten nur noch ihre Spiegelbilder hinter der Ebene hinzu zu denken, von beiden zusammen das Geschwindigkeitspotential zu nehmen, so erfüllt dies die Bedingung, dass an der Ebene $d\Psi/dn = 0$ sei, und es lassen sich auf ein solches Geschwindigkeitspotential dieselben Betrachtungen anwenden, als wenn nur endliche feste Körper in der Nähe wären.

Unter diesen Umständen ist also die Grenzbedingung, welche für die unendlich entfernten Theile des freien Raumes aufzustellen ist, die, dass das Bewegungspotential Ψ dort die in Gleichung (8b) angegebene Form habe.

Reciprocitätsgesetz. Setzen wir jetst voraus, dass Ψ das Geschwindigkeitspotential eines Schallwellenzuges sei, der in dem Punkte a erregt wird, in dessen Nachbarschaft sich eine beliebige Anzahl fester begrenzter Körper befinden möge, sodass nur an dieser Stelle Ψ unendlich werde, wie:

$$A \frac{\cos k r_a}{r_a} \cos (2 \pi n t),$$

sonst überall endlich und stetig bleibe, und in der unendlich grossen Entfernung ϱ von derselben Form wie in Gleichung (8 b) 28
sei. Ausserdem möge an der Oberfläche der festen Körper die Gleichung $d\Psi/dn = 0$ stattfinden. Es sei ferner Φ das Geschwindigkeitspotential einer Schallbewegung, die im Punkte b erregt worden ist, sodass in unendlich kleiner Entfernung von b die Function Φ unendlich wird, wie:

$$\Phi = A \frac{\cos k r_b}{r_b} \cos (2 \pi n t),$$

in unendlicher Entfernung ϱ dagegen:

$$\Phi = \mathfrak{B} \frac{\cos [k \varrho - 2 \pi n t + \mathfrak{b}]}{\varrho}$$

sei, wo $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{b}$ nach verschiedenen Richtungen vom Anfangspunkte der Coordinaten aus verschiedene Werthe haben; übrigens muss Φ wie Ψ überall sonst endlich sein, und an der Oberfläche der festen Körper $d\Phi/dn = 0$.

Wir wenden nun die Gleichung (7) auf einen Raum S an, der durch eine mit dem unendlich grossen Radius ϱ um den Anfangspunkt der Coordinaten beschriebene Kugelschaale umschlossen ist, von welchem wir nur ausschliessen alle die Theile, die durch die festen Körper eingenommen sind. Für die Integration an den Punkten a und b, wo Ψ und Φ unendlich gross werden, findet dieselbe Betrachtung wie bei Gleichung (7 c) statt. Wir erhalten:

$$\int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega - \int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega = 4\pi A [\Psi_b \cos(2\pi n t) - \Phi_a \cos 2\pi n t], \quad (9)$$

wo Ψ_b den Werth von Ψ im Punkte b, und Φ_a den von Φ im Punkte a bezeichnet. Die Integration nach $d\omega$ ist sowohl über die Oberflächen der vorhandenen festen Körper auszudehnen, an denen aber $d\Phi/dn = d\Psi/dn = 0$, sodass diese

Theile wegfallen, als auch über die Oberfläche der Kugel. Hier wird nun:

$$\Psi \frac{d\Phi}{dn} - \Phi \frac{d\Psi}{dn} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}k \sin(\mathfrak{d} - \mathfrak{c}).$$

Wenn wir nun bedenken, dass Ψ und Φ von der Form sein müssen:

$$\Psi = \Psi' \cos(2\pi n t) + \Psi'' \sin(2\pi n t),$$
$$\Phi = \Phi' \cos(2\pi n t) + \Phi'' \sin(2\pi n t),$$

wo Ψ', Φ', Ψ'' und Φ'' von der Zeit unabhängige Grössen sind, so wird:

$$\Psi_b \cos(2\pi n t) - \Phi_a \cos(2\pi n t)$$
$$= \tfrac{1}{2}[\Psi_b' - \Phi_a'] + \tfrac{1}{2}[\Psi_b' - \Phi_a'] \cos(4\pi n t) + \tfrac{1}{2}[\Psi_b'' - \Phi_a''] \sin(4\pi n t).$$

Da nun die Gleichung (9) für jeden Werth von t erfüllt sein
20 muss, so muss einzeln gleich sein:

$$\Psi_b' - \Phi_a' = 0,$$
$$\Psi_b'' - \Phi_a'' = 0,$$
$$\int \mathfrak{A}\mathfrak{B} \sin(\mathfrak{d} - \mathfrak{c})\, d\omega = 0,$$

also auch:

$$\Psi_b = \Psi_b' \cos(2\pi n t) + \Psi_b'' \sin(2\pi n t)$$
$$= \Phi_a' \cos(2\pi n t) + \Phi_a'' \sin(2\pi n t) = \Phi_a. \qquad (9a$$

Daraus geht der wichtige Satz hervor: Wenn in einem mit Luft gefüllten Raume, der theils von endlich ausgedehnten festen Körpern begrenzt, theils unbegrenzt ist, im Punkte a Schallwellen erregt werden, so ist das Geschwindigkeitspotential derselben in einem zweiten Punkte b ebenso gross, als es in a sein würde, wenn nicht in a, sondern in b Wellen von derselben Intensität erregt würden. Auch ist der Unterschied der Phasen des erregenden und erregten Punktes in beiden Fällen gleich.

Aus der nach der Gleichung (8b) gemachten Bemerkung geht hervor, dass dasselbe noch gilt, wenn der Raum von einer unendlichen Ebene theilweise begrenzt ist.

Ist Φ das Geschwindigkeitspotential von Schallwellen, die eine grössere Zahl von Erregungspunkten b_1, b_2 etc. b_m haben, also von der Form:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_m,$$

wo Φ_m das Potential der in b_m erregten Schallwellen ist, so wird:

$$\Sigma[\Psi_{b\,m}] = \Sigma[\Phi_{m,a}].$$

In dem Falle, wo die durch Ψ dargestellte Schallbewegung nicht davon herrührt, dass ein tönender Punkt a sich im freien Raume befindet, sondern dass an irgend einem Oberflächenelemente der Begrenzung des Luftraumes, das wir mit da bezeichnen wollen, $d\Psi/dn$ nicht Null, sondern:

$$\frac{d\Psi_a}{dn} = B\cos 2\pi n t$$

ist, so wird aus der Gleichung (9):

$$4\pi A\Psi_b = -B\Phi_a da. \qquad (9\text{c})$$

Dieser Satz kann dazu dienen, um in solchen Fällen, wo man die Schallbewegung der Luft vollständig nur für gewisse besondere Lagen des schallerregenden Punktes bestimmen kann, doch wenigstens für alle anderen Lagen eines oder beliebig vieler schallerregender Punkte die Erregung in jenen 30
ersten Stellen des Raumes zu bestimmen. Namentlich ist der Satz wichtig, wenn man die Schallbewegung für eine jede entfernte Lage des tönenden Punktes bestimmen kann, weil man dann rückwärts auch für jede andere Lage des tönenden Punktes die Fernwirkung bestimmen kann, auf die es bei den akustischen Versuchen meistens allein ankommt.

§ 6. Wellen in offener Röhre.

Wir gehen nun zu unserer eigentlichen Aufgabe über, die Bewegung der Luft am offenen Ende einer cylindrischen Röhre zu bestimmen, wenn im Innern der Röhre durch irgend eine Ursache ebene Wellen, die einem einfachen Tone von n Schwingungen in der Secunde entsprechen, zu Stande gekommen sind, und sich die Bewegung durch die Mündung der Röhre der äusseren Luft mittheilt, welche übrigens zunächst durch keine anderen Schall erregenden Kräfte afficirt sein möge.

Die Form der Röhre sei im Allgemeinen cylindrisch von beliebigem Querschnitte; nur in geringer Entfernung von der Mündung möge dieselbe von der cylindrischen Form abweichen dürfen. Wir schliessen also Röhren mit trompetenförmigen oder halb gedeckten Mündungen in unsere Untersuchung ein.

Uebrigens setzen wir voraus, dass sowohl die Dimensionen der Oeffnung, wie auch die Länge des nicht cylindrischen Theils der Röhre gegen die Wellenlänge verschwindend klein seien. Den äusseren Raum denken wir uns der Einfachheit wegen nach einer Seite begrenzt durch eine unendliche Ebene, welche senkrecht gegen den cylindrischen Theil der Röhrenwand gerichtet ist, und in welcher die Röhrenmündung selbst liegt. Diese Ebene sei die yz-Ebene, die Röhre befinde sich auf Seite der negativen x, deren Axe im Innern der Röhre liegen und dem cylindrischen Theile ihrer Wand parallel sein soll. Auf Seite der positiven x sei der Luftraum unbegrenzt. Nach der gemachten Annahme betrachten wir ky und kz als verschwindend klein gegen 1, wenn y und z Coordinaten eines Punktes der Röhrenmündung sind, und ebenso kx, wenn x einem Punkte des nicht cylindrischen Theils der Röhrenwand angehört.

Unsere Voraussetzungen über die Natur der Bewegung, welche wir untersuchen wollen, drücken sich nun in folgenden Gleichungen aus. Erstens nehmen wir an, dass irgendwo in der Röhre sich ein Abschnitt befinde, zwischen welchem und der Mündung keine äusseren Kräfte auf die Luftmasse ein-
31 wirken, und in welchem das Geschwindigkeitspotential Ψ unendlich wenig verschieden sei von der Form:

$$\Psi = \left(\frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx\right)\cos(2\pi n t) + \left(\frac{\mathfrak{A}}{k}\sin kx + \mathfrak{B}\cos kx\right)\sin(2\pi n t).$$

Dies ist die allgemeinste Form, welche ebene Wellen, die einem einfachen Tone von n Schwingungen angehören, haben können. Zur weiteren Vereinfachung wollen wir gleich den Anfang der Zeit t so festsetzen, was offenbar immer möglich ist, dass $\mathfrak{A} = 0$ wird, und somit Ψ in dem besagten Abschnitte der Röhre die Form erhält:

$$\Psi = \left(\frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx\right)\cos(2\pi n t) + \mathfrak{B}\cos kx \sin(2\pi n t). \quad (10)$$

Auf Seite der positiven x denke man sich zwei halbe Kugelflächen von sehr grossem Radius construirt, deren Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten liegt. Zwischen beiden soll Ψ

die Form kugeliger Wellen haben, die in den unendlichen Raum hinauslaufen, nämlich, wenn wir wie früher die Entfernung vom Anfang der Coordinaten mit ϱ bezeichnen:

$$\Psi = M \frac{\cos(k\varrho - 2\pi n t)}{\varrho} - M_1 \frac{\sin(k\varrho - 2\pi n t)}{\varrho}, \tag{10a}$$

wo M und M_1 unabhängig von ϱ, aber möglicher Weise abhängig von den Winkeln sind, die ϱ mit den Coordinatenaxen bildet.

Jenseits der äusseren jener beiden Kugelflächen mag noch ein Raum liegen, wo die Schallbewegung erst beginnt; aber zwischen der Region der ebenen Wellen in der Röhre, deren Bewegung in der Gleichung (10) gegeben ist, und der Region der Kugelwellen von der Form (10a) soll die Stärke und Phase der Luftschwingungen stationär geworden sein, also Ψ hier überall von der Form sein:

$$\Psi = \Psi' \cos(2\pi n t) + \Psi'' \sin(2\pi n t), \tag{10b}$$

worin Ψ' und Ψ'' Functionen der Coordinaten, aber unabhängig von der Zeit sind und in diesem ganzen Theile des Luftraumes die Bedingung erfüllen:

$$0 = k^2 \Psi + \nabla \Psi. \tag{3b}$$

Endlich muss noch längs der ganzen Wand der Röhre und an dem Theile der yz-Ebene, welcher nicht von der Röhrenmündung eingenommen ist, sein:

$$\frac{d\Psi}{dn} = 0. \tag{10c}$$

Wir wollen nun die Beziehungen zwischen den Coëfficienten A, B, $\mathfrak{B}$, M und M_1 der Gleichungen (10) und 10a) mittels des erweiterten Green'schen Theorems aufsuchen.

Die erste Anwendung der Gleichung (7) machen wir auf 32
den inneren Raum der Röhre, diesen von der Ebene der Mündung bis zu einer damit parallelen Ebene genommen, welche in der Region der ebenen Wellen liegt. Die Function Φ der Gleichung (7) setzen wir hier:

$$\Phi = \cos kx.$$

Da sowohl Φ wie Ψ die Gleichung (3b) erfüllen innerhalb des hier betrachteten Raumes, so reducirt sich Gleichung (7) auf:

$$\int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega - \int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega = 0. \tag{7b}$$

Nun ist $d\Psi/dn$ nur an der Mündung und in dem Querschnitte der Röhre von Null verschieden, dort ist es gleich $-d\Psi/dx$, hier gleich $+d\Psi/dx$. Es wird also:

$$\int \Phi \frac{d\Psi}{dn} d\omega = -\cos 2\pi n t \int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} d\omega - \sin 2\pi n t \int \frac{d\overline{\Psi''}}{dx} d\omega$$
$$+ Q(A\cos kx - Bk\sin kx)\cos kx \cos(2\pi n t)$$
$$- Q\mathfrak{B}k \sin kx \cos kx \sin(2\pi n t).$$

Durch den Horizontalstrich $\overline{\Psi}$ oder $d\overline{\Psi}/dx$ sollen hier und fortan die Werthe bezeichnet werden, welche die betreffenden Functionen in der Ebene der Röhrenmündung haben. Mit Q ist die Grösse des Querschnitts des cylindrischen Theils der Röhre bezeichnet. Dagegen ist $d\Phi/dn$ am cylindrischen Theile der Röhrenwand und in der Oeffnung der Röhre gleich Null. Von Null verschieden ist es nur in dem Querschnitte der Röhre, wo es den Werth $-k\sin kx$ hat, und in dem nicht cylindrischen Theile der Röhrenwand. Nennt man den Winkel, den die nach innen gerichtete Normale der Röhrenwand mit den positiven x bildet, β, so ist, da $d\Phi/dy = d\Phi/dz = 0$:

$$\frac{d\Phi}{dn} = \cos\beta \frac{d\Phi}{dx} = -k\sin kx \cos\beta.$$

Wir haben also:

$$\int \Psi \frac{d\Phi}{dn} d\omega = -Q(A\sin kx + Bk\cos kx)\sin kx \cos(2\pi n t)$$
$$- Qk\mathfrak{B}\cos kx \sin kx \sin(2\pi n t)$$
$$+ k\cos(2\pi n t)\int \Psi' \sin kx \cos\beta\, d\omega$$
$$+ k\sin(2\pi n t)\int \Psi'' \sin kx \cos\beta\, d\omega.$$

Wenn man diese Werthe der Integrale in die Gleichung (7b)
33 einführt, und einzeln die mit $\cos(2\pi n t)$ und die mit $\sin(2\pi n t)$ multiplicirten Glieder gleich Null setzt, so erhält man:

$$AQ = \int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} d\omega + k\int \Psi' \sin kx \cos\beta\, d\omega, \tag{11}$$

$$0 = \int \frac{d\overline{\Psi''}}{dx} d\omega + k\int \Psi'' \sin kx \cos\beta\, d\omega. \tag{11a}$$

In beiden Gleichungen ist das erste Integral über die ganze Oeffnung der Röhre zu nehmen, das zweite über die Wand der Röhre; doch wollen wir gleich bemerken, dass an allen

Stellen, wo $\cos\beta$ von Null verschieden ist, kx nach unserer Annahme eine verschwindend kleine Grösse wird. In rein cylindrischen Röhren mit ganz offener oder theilweise gedeckter Mündung fallen diese letzteren Integrale ganz weg.

Die zweite Anwendung des Theorems (7) machen wir auf den freien Raum auf Seite der positiven x, der einerseits begrenzt gedacht wird durch die yz-Ebene, andererseits durch eine um den Anfangspunkt der Coordinaten als Mittelpunkt construirte halbe Kugelfläche, welche in die Region der kugeligen Wellen fällt. Innerhalb dieses Raumes liege der Punkt, dessen Coordinaten α, β, γ sind. Die Entfernung des Punktes x, y, z von ihm sei $r_,$, während $r_{,,}$ die Entfernung von dem Punkte sei, dessen Coordinaten $-\alpha, \beta, \gamma$ sind, und der ausserhalb des hier betrachteten Raumes liegt. Die Function Φ der Gleichung (7) setzen wir:

$$\Phi = \frac{1}{2}\frac{\cos(kr_, - 2\pi nt)}{r'} + \frac{1}{2}\frac{\cos(kr_{,,} - 2\pi nt)}{r_{,,}}.$$

Indem wir nun die Gleichung (7) anwenden mit Beachtung des in (7c) berücksichtigten Umstandes der Unstetigkeit von Φ im Punkte α, β, γ, erhalten wir:

$$\int \Psi \frac{d\Phi}{dn}\, d\omega - \int \Phi \frac{d\Psi}{dn}\, d\omega = 2\pi \cos(2\pi nt)\, \Psi_a, \tag{11b}$$

wo Ψ_a den Werth von Ψ im Punkte α, β, γ bezeichnet.

Wie im Falle der Gleichung (9) wird die Grösse $\Phi\, d\Psi/dn - \Psi\, d\Phi/dn$ an der weit entfernten Kugelfläche eine von der Zeit unabhängige Grösse, ebenso natürlich auch das Integral dieser Grösse über die Kugelfläche, welches wir mit $\mathfrak{C}$ bezeichnen wollen. An der yz-Ebene dagegen ist $d\Phi/dn$ überall gleich Null, ebenso $d\Psi/dn$ überall mit Ausnahme der Oeffnung, wo es gleich $d\overline{\Psi}/dx$ ist; Φ aber bekommt den Werth: 34

$$\overline{\Phi} = \frac{\cos(kr_, - 2\pi nt)}{r_,},$$

weil an der yz-Ebene $r_, = r_{,,}$ ist. So erhalten wir die Gleichung:

$$\mathfrak{C} - \int \frac{d\overline{\Psi}}{dx} \frac{\cos(kr_, - 2\pi nt)}{r_,}\, d\omega = 2\pi \cos(2\pi nt)\, \Psi_a. \tag{11c}$$

Setzen wir nun nach Gleichung (10b):

$$\Psi = \Psi' \cos(2\pi n t) + \Psi'' \sin(2\pi n t), \tag{10b}$$

so können wir in der Gleichung (11c), welche für alle Werthe von t erfüllt sein muss, die Quadrate und Producte von $\cos(2\pi n t)$ und $\sin(2\pi n t)$ durch $\cos(4\pi n t)$ und $\sin(4\pi n t)$ ausdrücken und dann einzeln gleich Null setzen: 1) die Glieder, welche nach der Zeit constant sind, 2) die Glieder, welche mit $\cos(4\pi n t)$ multiplicirt sind und 3) die mit $\sin(4\pi n t)$ multiplicirten, und erhalten dadurch folgende drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{C} &= \pi \Psi'_a + \tfrac{1}{2}\int\left(\frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\,\frac{\cos k r_{,}}{r_{,}} + \frac{d\overline{\Psi''}}{dx}\,\frac{\sin k r_{,}}{r_{,}}\right) d\omega, \\ 0 &= \pi \Psi'_a + \tfrac{1}{2}\int\frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\,\frac{\cos k r_{,}}{r_{,}}\, d\omega - \tfrac{1}{2}\int\frac{d\overline{\Psi''}}{dx}\,\frac{\sin k r_{,}}{r_{,}}\, d\omega, \\ 0 &= \pi \Psi''_a + \tfrac{1}{2}\int\frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\,\frac{\sin k r_{,}}{r_{,}}\, d\omega + \tfrac{1}{2}\int\frac{d\overline{\Psi''}}{dx}\,\frac{\cos k r_{,}}{r_{,}}\, d\omega. \end{aligned}\right\} \tag{11d}$$

Die Integrationen sind über die Oeffnung der Röhre auszudehnen. Durch die beiden letzten Gleichungen ist der Werth der Functionen Ψ' und Ψ'' für alle Punkte des Raumes auf Seite der positiven x gegeben, wenn die Werthe von $d\overline{\Psi'}/dx$ und $d\overline{\Psi''}/dx$ in der Oeffnung der Röhre bekannt sind. Die erste Gleichung folgt aus den beiden anderen mittels des Theorems (7d). Der Werth von Ψ_a wird demnach:

$$\left.\begin{aligned} \Psi_a = &- \frac{1}{2\pi}\int\frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\,\frac{\cos(k r_{,} - 2\pi n t)}{r_{,}}\, d\omega \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int\frac{d\overline{\Psi''}}{dx}\,\frac{\sin(k r_{,} - 2\pi n t)}{r_{,}}\, d\omega. \end{aligned}\right\} \tag{11e}$$

Wenn wir statt der rechtwinkligen Coordinaten Polarcoordinaten einführen, nämlich:

$$\alpha = \varrho \cos\omega,\quad \beta = \varrho \sin\omega \cos\vartheta,\quad \gamma = \varrho \sin\omega \sin\vartheta,$$

so wird in unendlich grosser Entfernung ϱ vom Anfangspunkte der Coordinaten mittels einer ähnlichen Umformung, wie sie in (8a) ausgeführt ist:

$$\Psi = M \frac{\cos(k\varrho - 2\pi n t)}{\varrho} - M_1 \frac{\sin(k\varrho - 2\pi n t)}{\varrho}, \tag{10a}$$

wo:

$$\left.\begin{aligned} M &= -\frac{1}{2\pi}\iint\left(\frac{d\overline{\Psi''}}{dx}\cos k\varepsilon + \frac{d\overline{\Psi''}}{dx}\sin k\varepsilon\right) dy\,dz, \\ M_1 &= -\frac{1}{2\pi}\iint\left(\frac{d\overline{\Psi''}}{dx}\cos k\varepsilon - \frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\sin k\varepsilon\right) dy\,dz, \end{aligned}\right\} \quad (11\,\mathrm{f})$$ 35

$$\varepsilon = y \sin\omega\cos\vartheta + z\sin\omega\sin\vartheta,$$

und wo die Integrationen über die Oeffnung der Röhre auszudehnen sind.

Eine dritte Anwendung des erweiterten Green'schen Satzes machen wir auf den Raum, welcher zwischen einem Querschnitte der Röhre in der Region der ebenen Wellen und einer halben Kugelfläche in der Region der kugeligen Wellen liegt. Für die Functionen Ψ und Φ der Gleichung (7) setzen wir Ψ' und Ψ'' und haben wie in (7b):

$$\int \Psi' \frac{d\Psi''}{dn}\, d\omega - \int \Psi'' \frac{d\Psi'}{dn}\, d\omega = 0. \qquad (7\,\mathrm{b})$$

Da längs der ganzen festen Wand des Raumes $d\Psi'/dn = d\Psi''/dn = 0$, so ist die Integration nur über den Querschnitt der Röhre und die Halbkugel auszudehnen. Im Querschnitt ist:

$$\Psi' = \frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx,$$

$$\Psi'' = \mathfrak{B}\cos kx,$$

$$\Psi'\frac{d\Psi''}{dx} - \Psi''\frac{d\Psi'}{dx} = -A\mathfrak{B}.$$

An der Kugelfläche ist:

$$\Psi' = M\frac{\cos k\varrho}{\varrho} + M_1\frac{\sin k\varrho}{\varrho},$$

$$\Psi'' = M\frac{\sin k\varrho}{\varrho} - M_1\frac{\cos k\varrho}{\varrho},$$

$$-\Psi'\frac{d\Psi''}{d\varrho} + \Psi''\frac{d\Psi'}{d\varrho} = -\frac{k(M^2 + M_1^2)}{\varrho^2}.$$

Wenn man die Integrale nimmt, wird:

$$0 = A\mathfrak{B}Q + k\int_0^{1/2\pi} d\omega \int_0^{2\pi} d\vartheta\,(M^2 + M_1^2)\sin\omega. \qquad (11\,\mathrm{g})$$

---

36 Endlich wenden wir noch das Theorem (7) auf den inneren Raum der Röhre an von der Ebene der Mündung bis zu einem Querschnitt in der Region der ebenen Wellen für die Function Ψ' und:

$$\Phi = \sin k x,$$

$$\int \Psi' \frac{d\Phi}{dn} d\omega - \int \Phi \frac{d\Psi'}{dn} = 0. \tag{7b}$$

Am Querschnitte der Röhre wird:

$$\Psi' \frac{d\Phi}{dx} - \Phi \frac{d\Psi'}{dx} = kB.$$

An der Wand der Röhre wird $d\Psi'/dn = 0$, an ihrer Mündung $\Phi = 0$, sodass das zweite Integral der Gleichung (7b) verschwindet. Im ersten wird an der Wand der Röhre:

$$\frac{d\Phi}{dn} = k \cos kx \cos\beta,$$

an der Mündung $d\Phi/dn = -k$. Also haben wir:

$$QB + \int \Psi' \cos kx \cos\beta \, d\omega - \int \overline{\Psi'} \, d\omega = 0, \tag{11h}$$

wo das erste Integral über den nicht cylindrischen Theil der Röhrenwand auszudehnen ist, so weit $\cos\beta$ sich von Null unterscheidet, das zweite über die Oeffnung der Röhre.

Wir haben jetzt in den Gleichungen (11), (11a), (11d), (11f), (11g), (11h) die Werthe der Coëfficienten A, B, $\mathfrak{B}$, M, M_1 und der Functionen Ψ' und Ψ'' im freien Raume zurückgeführt auf Integrale, in denen nur die Werthe vorkommen, welche Ψ', Ψ'' und ihre Differentialquotienten theils in der Mündung der Röhre selbst, theils an dem nicht cylindrischen Theile ihrer Wand haben. Wir wollen jetzt die Vereinfachungen dieser Ausdrücke einführen, welche daraus herfliessen, dass die Dimensionen der Mündung und die Länge des nicht cylindrischen Theiles der Röhre unserer Annahme nach gegen die Wellenlänge verschwindend klein sein sollen. Vernachlässigen wir Grössen von der Ordnung $k\varepsilon$ gegen 1, so nehmen unsere Gleichungen (11), (11a) und (11f) folgende Gestalt an:

$$AQ = \int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} \, d\omega, \tag{12}$$

$$0 = \int \frac{d\,\overline{\Psi''}}{dx}\, d\omega + k^2 \int \Psi'' x \cos\beta\, d\omega, \qquad (12\,\mathrm{a})$$ 37

$$M = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{d\,\overline{\Psi'}}{dx}\, d\omega = -\frac{1}{2\pi}\, AQ. \qquad (12\,\mathrm{b})$$

Für den Werth von M_1 ist zu bemerken, dass das von k unabhängige Glied desselben $\int d\,\overline{\Psi''}\,/\,dx\; d\omega$ nach (11a) selbst eine verschwindend kleine Grösse ist, dass ferner auch das mit der ersten Potenz von k multiplicirte $\int (d\,\overline{\Psi'}/dx)\, \varepsilon\, d\omega$ der Null gleich gemacht werden kann, wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten, über den bisher nur bestimmt ist, dass er in der Oeffnung der Röhre liegen solle, in den Schwerpunkt einer Masse verlegt, welche mit der Dichtigkeit $d\,\overline{\Psi'}\,/\,dx$ über die Fläche der Oeffnung verbreitet ist; also reducirt sich der Werth von M_1 auf verschwindend kleine Grössen, nämlich:

$$M_1 = \frac{k^2}{2\pi}\int \Psi'' x \cos\beta\, d\omega + \frac{k^2}{4\pi}\int \frac{d\,\overline{\Psi''}}{dx}\, \varepsilon^2\, d\omega. \qquad (12\,\mathrm{c})$$

Wir werden also M_1 gegen M vernachlässigen und letzteres als unabhängig von den Winkeln ω und ϑ betrachten dürfen, also aus (11g) erhalten:

$$A\mathfrak{B}Q = -2\pi k M^2,$$

oder mit Berücksichtigung von:

$$AQ = -2\pi M, \qquad (12\,\mathrm{b})$$

$$\mathfrak{B} = kM = -\frac{k}{2\pi} AQ, \qquad (12\,\mathrm{d})$$

endlich:

$$QB = \int \overline{\Psi'} d\omega - \int \Psi' \cos\beta\, d\omega. \qquad (12\,\mathrm{e})$$

Da nun übrigens nach (11e) in der Ebene der Mündung mit Vernachlässigung kleiner Grössen:

$$\overline{\Psi'} = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{d\,\overline{\Psi'}}{dx}\, \frac{d\omega}{r}$$

und:

$$M = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{d\,\overline{\Psi'}}{dx}\, d\omega = -\frac{1}{2\pi} AQ, \qquad (12\mathrm{b})$$

so sind M oder AQ und $\varepsilon\,\overline{\Psi'}$ Grössen von gleicher Ordnung. Nun können wir die Gleichung von (12e) schreiben:

$$QB = \pm \iint \Psi'\, dy\, dz.$$

38 wo die Integration über alle Werthe von z und y auszudehnen ist, welche der Oeffnung und Wand der Röhre angehören, und das + Zeichen sowohl an der Oeffnung als an denjenigen Theilen der Wand zu nehmen ist, deren Normale mit den negativen x einen spitzen Winkel bildet, das — Zeichen an den Theilen, deren Normale mit den positiven x einen spitzen Winkel bildet. QB ist also gleich den Werthen von Ψ' in der Nähe der Oeffnung integrirt über eine Fläche von der Grösse Q, also ist B von der Grössenordnung $\overline{\Psi'}$ oder AQ/ε. Wenn also der Querschnitt der Röhre von derselben Ordnung kleiner Grössen wie die Oeffnung, d. h. von der Ordnung ε^2 ist, ist B von der Ordnung $A\varepsilon$. Genauer lässt sich bei der Allgemeinheit unserer Annahmen das Verhältniss B/A nicht bestimmen. Wir werden später bei den Beispielen sehen, dass es von der Form der Mündung abhängt, von welcher wir das Verhältniss $\mathfrak{B}/A$ unabhängig gefunden haben, und dass es nicht merklich von dem Werthe von k abhängt, so lange der Querschnitt der Röhre und die Länge des nicht cylindrischen Theiles als verschwindend gegen die Wellenlänge zu betrachten sind. Ist übrigens die Oeffnung der Röhre sehr klein gegen den Querschnitt, so kann B/A jeden beliebigen grösseren Werth erreichen.

Innerhalb der tieferen Theile der Röhre ist also, wenn wir setzen:

$$\frac{kB}{A} = -\operatorname{tang} k\alpha, \tag{12f}$$

$$\Psi = \frac{A}{k\cos k\alpha}\sin k(x-\alpha)\cos(2\pi nt) - \frac{AkQ}{2\pi}\cos kx\sin(2\pi nt), \tag{12g}$$

und dazu gehört die Bewegung in den entfernten Stellen des freien Raumes, indem wir M_1 gegen M vernachlässigen,

$$\Psi = -\frac{AQ}{2\pi}\frac{\cos(k\varrho - 2\pi nt)}{\varrho}, \tag{12h}$$

in welchen beiden Gleichungen A eine willkürliche Constante ist, und α für jede besondere Röhrenform besonders bestimmt werden muss.

Die Natur des hier behandelten Problems wird noch klarer,

wenn man auf den Grenzfall übergeht, wo $k = 0$ wird. Dann werden die beiden Functionen Ψ' und Ψ'' voneinander unabhängig, und es entstehen aus unserem Problem folgende zwei Aufgaben:

1) Es ist eine Function Ψ' zu suchen, welche in dem ganzen 39
betrachteten Raume der Bedingung genügt, dass:

$$\nabla \Psi' = 0,$$

welche für grosse negative x übergeht in $Ax + B$, für grosse positive in $-AQ/2\pi\varrho$, und für die längs der ganzen festen Wand $d\Psi'/dn = 0$ ist. Es ist dies mathematisch dieselbe Aufgabe, als hätten wir einen homogenen elektrischen Leiter von der Gestalt unseres Luftraumes, welchen ein elektrischer Strom von bestimmter Intensität (AQ, wenn das Leitungsvermögen des Stoffes gleich 1 ist) durchfliesst, der aus dem cylindrischen Theile in den unendlichen Raum übergeht. Wir nennen bekanntlich den Leitungswiderstand zweier Leiter gleich, wenn bei gleicher Intensität des Stromes ihre Endflächen Flächen constanten Potentials sind und dieselbe Differenz des Potentials zeigen. Nun ist in irgend einem Querschnitte des cylindrischen Theiles die Potentialfunction $Ax + B$, für unendliche Entfernung im freien Raume Null. Denken wir uns dagegen den cylindrischen Leiter cylindrisch fortgesetzt und überall die Potentialfunction gleich $Ax + B$, so wird sie Null, wenn $x = -B/A = \alpha$. Es ist also $-(x - \alpha)$ die Länge eines cylindrischen Leiters von demselben Material, welcher denselben elektrischen Widerstand bietet wie der Leiter von Gestalt unseres Luftraumes, gerechnet von einem Querschnitt des cylindrischen Theiles in der Entfernung $-x$ von der Mündung bis in unendliche Entfernung im freien Raume. Nach der in der Elektricitätslehre gebräuchlichen Terminologie würde also $-(x - \alpha)$ die reducirte Länge jenes Leiters genannt werden können, und wir wollen dieselbe Benennung auch hier brauchen. Die Constante B oder α verschwindet also nicht mit k zugleich, obgleich andererseits einzusehen ist, dass sie meistens nicht gross sein kann, da der Widerstand unendlich ausgedehnter Leiter, wie der der Erde, immer sehr klein ist verglichen mit dem Widerstande cylindrischer Leiter von dem-

selben Material, aus denen die Elektricität in den unendlichen Leiter ausströmt, und es folgt auch weiter aus den bekannten Theoremen über Elektricitätsleitung, dass α desto grösser werden muss, je enger die Mündung der Röhre gemacht wird, was sich auch in den akustischen Versuchen durch die Veränderung des Tones der Röhren zeigt, dessen Abhängigkeit vom Werthe von α wir unten feststellen werden.

Wenn die Oeffnung sehr klein und kreisförmig ist, während die den Cylinder schliessende Wand in ihrer Nähe nahehin
40 eben ist, lässt sich annehmen, dass der Widerstand hauptsächlich nur von den dicht bei der Oeffnung gelegenen Theilen herrührt, wo die Bahn der Strömung am engsten ist. Der Widerstand einer kreisförmigen Oeffnung vom Radius R in einer isolirenden Ebene, welche zwei unendlich ausgedehnte Leiter voneinander trennt, ist aber ausgedrückt durch die Länge l eines Cylinders vom Querschnitt Q:

$$l = \frac{Q}{2R}, \tag{12i}$$

und dies würde in diesem Falle auch der Werth von $-B/A$ sein.

2) Es ist eine Function Ψ''/k zu suchen, welche im ganzen betrachteten Raume der Bedingung genügt, dass $\nabla \Psi'' = 0$, welche für grosse Entfernungen von der Mündung sowohl auf Seite der negativen wie der positiven x wird:

$$\frac{1}{k} \Psi'' = -\frac{AQ}{2\pi}$$

und längs der ganzen festen Wand des Luftraumes $d\Psi/dn = 0$. Offenbar ist unter diesen Umständen Ψ' im ganzen Raume constant. Hierbei wird dann ersichtlich, dass in der Oeffnung nicht blos, wie wir schon gesehen, die Grösse $\int \frac{d\,\Psi''}{dx}\, d\omega$, sondern auch $d\,\Psi''/dx$ selbst mit k zugleich verschwindet.

Die bisher gewonnenen Sätze lassen nun eine Reihe allgemeiner Folgerungen ziehen nicht blos über die Lage der Schwingungs-Minima und Maxima (Knoten und Bäuche der Schwingungen) und die davon abhängende Höhe der natürlichen Töne der Röhre, die wir als Töne stärkster Re-

sonanz charakterisiren können, welche Aufgaben schon die bisherigen Theorien mehr oder weniger genügend behandelt haben, sondern sie geben uns für eine Reihe besonderer Erregungsweisen der Töne auch bestimmte Auskunft über die Stärke und Phasen der in der Röhre erregten Schwingungen.

Die Geschwindigkeit der Lufttheilchen ist aus (12a) berechnet:

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{A}{\cos ka}\cos k(x-\alpha)\cos(2\pi nt) + \frac{Ak^2 Q}{2\pi}\sin kx \sin(2\pi nt) \quad (13)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dx} &= J\cos(2\pi nt + \tau), \\ &\text{wenn} \\ J &= A\sqrt{\frac{\cos^2 k(x-\alpha)}{\cos^2 k\alpha} + \frac{k^4 Q^2}{4\pi^2}\sin^2 kx}, \\ \text{tang}\,\tau &= -\frac{k^2 Q \sin kx \cos k\alpha}{2\pi \cos k(x-\alpha)}. \end{aligned}\right\} \quad (13\text{a})$$

Die Werthe von x, für welche J^3 ein Maximum oder Minimum wird, werden gefunden durch die Gleichung:

$$\text{tang}\, 2k(x-\alpha) = \frac{k^4 Q^2 \sin k\alpha \cos^2 k\alpha}{2\pi^2\left(1 - \frac{k^4 Q^2}{4\pi^2}\cos^3 k\alpha\right)}.$$

Wenn x_0 ein Werth ist, der für x gesetzt diese Gleichung erfüllt, so wird sie auch erfüllt durch:

$$x = x_0 + \mathfrak{a}\frac{\lambda}{4} = x_0 + \frac{\mathfrak{a}\pi}{2k},$$

worin $\mathfrak{a}$ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet. Die Maxima und Minima der Schwingung liegen also in der Röhre um Viertelwellenlängen von einander entfernt. Sie liegen aber nicht nothwendig um ein genaues Vielfache einer Viertelwellenlänge von der Oeffnung der Röhre entfernt. Wenn, wie wir im Folgenden immer annehmen wollen, $k^2 Q$ eine unendlich kleine Grösse ist, so wird mit Vernachlässigung der kleinen Grössen zweiter Ordnung die Gleichung (13b):

$$\text{tang}\, 2k(x-\alpha) = 0.$$

Dann wird J^2 ein Maximum $J_{,}^2$, wenn:

$$k(x-\alpha)=\mathfrak{a}\pi, \quad \text{also:} \quad \cos k(x-\alpha)=\pm 1,$$

$$J_{,}^2=\frac{A^2}{\cos^2 k\alpha},$$

und J^2 wird ein Minimum $J_{,,}^2$, wenn:

$$k(x-\alpha)=(\mathfrak{a}+\tfrac{1}{2})\pi, \quad \text{also:} \quad \cos k(x-\alpha)=0,$$

$$J_{,,}^2=A^2\frac{k^4Q^2}{4\pi^2}\cos^2 k\alpha.$$

Denken wir uns die ebenen Wellen bis zur Mündung der Röhre fortgesetzt, so würde in der kleinen Entfernung α vor der Oeffnung ein Maximum der Schwingung liegen. Denken wir uns die Entfernungen der Querschnitte der Röhre von diesem um die Länge α vor der Oeffnung in der Axe der
42 Röhre gelegenen Punkte gezählt und nennen diese Entfernungen die reducirten Längen des betreffenden Röhrenstückes, so erhalten wir Maxima der Schwingung überall, wo die reducirte Länge gleich einem geraden Vielfachen der Viertelwellenlänge und Minima der Schwingung (Knotenflächen), wo die reducirte Länge der Röhre einem ungeraden Vielfachen der Viertelwellenlänge gleich ist. In den Knotenflächen herrscht aber nicht absolute Ruhe, sondern die Bewegung wird nur sehr klein.

Am Orte der Maxima der Schwingung wird tang τ gleich einer unendlich kleinen Grösse, also $\tau=\mathfrak{a}\pi$, am Orte der Minima wird tang $\tau=\infty$, also $\tau=(\mathfrak{a}+\tfrac{1}{2})\pi$, folglich sind die Phasen der Bewegung am Orte der Maxima und Minima um eine Viertelschwingungsdauer verschieden.

Nach Gleichung (1f) ist die Verdichtung der Luft, wo keine äusseren Kräfte wirken:

$$\mathfrak{h}=-\frac{1}{a^2}\frac{d\Psi}{dt},$$

also in unserem Falle:

$$\mathfrak{h}=\frac{A}{a\cos k\alpha}\sin k(x-\alpha)\sin(2\pi nt)+\frac{Ak^2Q}{2\pi a}\cos kx\cos(2\pi nt) \quad (14)$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{h} &= L \sin(2\pi n t) + \tau_{,}),\\ &\text{wenn}\\ L &= \frac{A}{a}\sqrt{\frac{\sin^2 k(x-\alpha)}{\cos^2 k\alpha} + \frac{k^4 Q^2 \cos^2 kx}{4\pi^2}},\\ \operatorname{tang}\tau_{,} &= \frac{k^2 Q \cos kx \cos k\alpha}{2\pi \sin k(x-\alpha)}.\end{aligned}\right\} \qquad (14\text{a})$$

Die Bedingungsgleichung, welche die Werthe von x giebt, für welche L^2 ein Maximum oder Minimum wird, ist dieselbe wie (13b), welche oben für die Grenzwerthe von J^2 aufgestellt ist, aber wo letzteres ein Maximum ist, wird L^2 ein Minimum, und umgekehrt. Wo L ein Maximum, wird $\operatorname{tang}\tau_{,} = 0$ (oder vielmehr gleich einer verschwindend kleinen Grösse), also:

$$\mathfrak{h} = \pm \frac{A}{a \cos k\alpha} \sin(2\pi n t), \qquad \frac{d\Psi}{dx} = \pm \frac{A k^2 Q \cos k\alpha}{2\pi} \sin(2\pi n t),$$

wo L^2 ein Minimum ist, wird $\operatorname{tang}\tau_{,} = \infty$,

$$\mathfrak{h} = \pm \frac{A k^2 Q \cos k\alpha}{2\pi a} \cos(2\pi n t), \qquad \frac{d\Psi}{dx} = \pm \frac{A}{\cos k\alpha} \cos(2\pi n t).$$

An diesen Stellen also fällt das Maximum der Verdichtung mit dem Maximum der Geschwindigkeit in der Zeit zusammen, nicht aber an den zwischenliegenden Stellen. Denn wo weder 43
$\sin k(x-\alpha)$ noch $\cos k(x-\alpha)$ der Null nahe sind, sind sowohl $\operatorname{tang}\tau$ als $\operatorname{tang}\tau_{,}$ sehr kleine Grössen, und es wird also nahehin:

$$\mathfrak{h} = L \sin(2\pi n t), \qquad \frac{d\Psi}{dx} = J \cos(2\pi n t),$$

sodass hier die Maxima des Druckes und der Geschwindigkeit nahehin um eine Viertel-Undulationszeit auseinanderfallen.

Denkt man sich die ebenen Wellen bis zur Oeffnung der Röhre, wo $x = 0$, fortgesetzt, so wird dort $\operatorname{tang}\tau = 0$, dagegen:

$$\operatorname{tang}\tau_{,} = -\frac{k^2 Q}{2\pi} \operatorname{cotang} k\alpha.$$

Nun ist im Allgemeinen $\operatorname{tang} k\alpha$ eine kleine Grösse erster Ordnung, $k^2 Q$ eine solche zweiter Ordnung, also $\operatorname{tang}\tau_{,}$ sehr klein und $\tau_{,}$ nahe an Null. Aber es kann auch für besondere Röhrenformen $\alpha = 0$ werden, dann würde $\tau_{,} = \frac{1}{2}\pi$. Im ersteren Falle würden in der Oeffnung die Maxima der Geschwindig-

keit und der Verdichtung um eine Viertelundulation der Zeit nach auseinander liegen, im zweiten Falle zusammenfallen. Poissons Voraussetzung, dass die Verdichtung in der Oeffnung gleich der Geschwindigkeit multiplicirt mit einer sehr kleinen Constanten sei, ist also nur in einem besonderen Falle richtig, den er allerdings als den allgemeinen betrachtete. Auch in diesem Falle ist sie übrigens nur richtig, wenn man sich erlaubt, die ebenen Wellen bis zur Mündung der Röhre fortgesetzt zu denken, aber nicht, wenn man die wirklich in der Oeffnung stattfindenden mittleren Werthe der Geschwindigkeit und Verdichtung nimmt.

Was die Lage der einzelnen Wellenphasen in einem gegebenen Augenblicke betrifft, so finden wir die Lage der Geschwindigkeitsmaxima in der Region der ebenen Wellen, indem wir $d^2\Psi' / dx^2 = 0$ setzen, oder auch $\Psi' = 0$, da hier $d^2\Psi' / dx^2 + k^2\Psi' = 0$. Also:

$$0 = \frac{A}{k}\cos(2\pi nt)\sin kx + [B\cos(2\pi nt) + \mathfrak{B}\sin(2\pi nt)]\cos kx;$$

daraus folgt als Bedingung (s. (12f) und (12g))

$$\operatorname{tang} kx = \operatorname{tang} ka - \frac{k^2 Q}{2\pi}\operatorname{tang}(2\pi nt).$$

Wenn $t = 0$, wird:

$$\operatorname{tang} kx = \operatorname{tang} ka,$$

die Maxima der Geschwindigkeit liegen dann, wo $-(x-a) = \mathfrak{a}\lambda$,
44 die Minima, wo $-(x-a) = (\mathfrak{a}+\frac{1}{2})\lambda$. Wenn nun t wächst, so bleibt, weil $k^2 Q$ eine verschwindend kleine Grösse ist, doch immer noch $\operatorname{tang} kx$ unmerklich wenig verschieden von $\operatorname{tang} ka$, also die Lage der Maxima und Minima unverändert, so lange $\operatorname{tang}(2\pi nt)$ endliche Werthe hat. Wenn aber t sich dem Werthe einer Viertel-Schwingungsdauer nähert, wird auch $\operatorname{tang} kx$ gleichzeitig mit $\operatorname{tang}(2\pi nt)$ erst $+\infty$, dann $-\infty$, dann aber, so wie $\operatorname{tang}(2\pi nt)$ endliche negative Werthe erreicht hat, wird $\operatorname{tang} kx$ wieder gleich $\operatorname{tang} ka$, und so bleibt es wieder während beinahe einer halben Schwingungsdauer stationär, so lange $\operatorname{tang}(2\pi nt)$ endlich bleibt. So oft nun $\operatorname{tang} kx$ vom Werthe $\operatorname{tang} ka$ auf $+\infty$ wächst, dann von $-\infty$ durch die negativen Werthe bis 0 und wieder auf $\operatorname{tang} ka$ übergeht, muss kx um π wachsen und x selbst um $\frac{1}{2}\lambda$. So wird also ein

Maximum, welches zur Zeit $t=0$ da liegt, wo die reducirte Länge $\mathfrak{a}\lambda$ beträgt, um die Zeit $t=1/4n$ schnell übergehen auf die reducirte Länge $(\mathfrak{a}-\frac{1}{2})\lambda$, hier beinahe stillstehen bis $t=3/4n$, dann schnell fortschreiten auf $(\mathfrak{a}-1)\lambda$ u. s. w.

Im freien Raume dagegen bewegen sich die Maxima der Geschwindigkeit mit der gleichmässigen Fortpflanzungsgeschwindigkeit a vorwärts. In den entfernteren Theilen des freien Raumes liegen sie zur Zeit $t=0$, wo $\varrho=(\mathfrak{b}+\frac{1}{4})\lambda$. Der Abstand zweier Maxima der Geschwindigkeit, von denen eines im freien Raume in der x-Axe, das andere in der Röhre gelegen ist, zur Zeit $t=0$ ist $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\frac{1}{4})\ \lambda-\alpha$. Da bis zur Zeit $t=1/4n$ das Maximum in der Röhre fast ganz still steht, das im freien Raume um $\frac{1}{4}\lambda$ fortschreitet, so wächst die Entfernung beider Maxima bis auf nahehin $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\frac{1}{2})\ \lambda-\alpha$, geht dann ziemlich schnell zurück auf $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\lambda-\alpha$, um während der nächsten halben Schwingungsdauer wieder auf $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\frac{1}{2})\lambda-\alpha$ zu steigen, und bewegt sich so immer zwischen den genannten Grenzen.

Mit der Verdichtung verhält es sich ähnlich. Ihre Maximalwerthe werden gegeben durch die Gleichung:

$$\text{cotang}\, kx = -\text{tang}\, k\alpha + k^2 Q \cot\text{g}\,(2\pi nt).$$

Zur Zeit $t=1/4n$ ist $\cot\text{g}\,(2\pi nt)=0$, und die Maxima der Verdichtung liegen, wo die reducirte Länge der Röhre $(\mathfrak{a}-\frac{1}{4})\ \lambda$ beträgt. Diese Lage behalten sie auch unverändert bis nahehin $t=2/4n$, wo $\cot\text{g}\,(2\pi nt)$ unendlich gross wird. Dann rücken sie schnell vorwärts bis $(\mathfrak{a}-\frac{3}{4})\lambda$. In den entfernteren 45
Theilen des freien Raumes liegen sie, wenn $t=1/4n$, da, wo $\varrho=(\mathfrak{b}+\frac{1}{2})\lambda$. Ihr Abstand von denen in der Röhre beträgt also dann $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\frac{1}{4})\ \lambda-\alpha$, wächst allmählich auf $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\frac{1}{2})\ \lambda-\alpha$, sinkt schnell auf $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\ \lambda-\alpha$, wächst dann wieder allmählich u. s. w. Sowohl die Maxima des Druckes wie der Geschwindigkeit haben ihren grössten Werth in der Röhre, wenn sie stillstehen, ihren kleinsten, wenn sie vorwärts eilen. Uebrigens eilen die Maxima der Geschwindigkeit vorwärts zu den Zeiten und an den Orten, wo die des Druckes stillstehen, und umgekehrt.

Stärke der Resonanz in der Röhre. Denkt man sich

die Röhre nur bis $x = -l$ reichend und ihr Ende im Bereiche der ebenen Wellen gelegen, so kann die Erschütterung der Luft in der Röhre entweder an diesem Ende mitgetheilt werden oder von der vorderen Oeffnung der Röhre her, indem ein Schallwellenzug gegen die Mündung der Röhre schlägt. Was zunächst den ersten Fall betrifft, so kann nach Feststellung der Form der ebenen Wellen leicht der Fall behandelt werden, wo die Röhre durch irgend eine Platte von beliebiger Masse geschlossen ist, welche durch irgend eine elastische Kraft (z. B. einer über die Mündung der Röhre ausgespannten Membran) in ihrer Lage gehalten und durch eine beliebig periodisch wirkende Kraft in Erschütterung versetzt wird. Es lässt sich dann für jede Röhrenform und Tonhöhe, für welche der Werth der Constanten α bekannt ist, sowohl die Form der ebenen Wellen als der Kugelwellen in den entfernteren Theilen des freien Raumes vollständig angeben. Hier genüge es nur kurz den Fall zu erwähnen, wo eine Bewegung von bestimmter Geschwindigkeit mitgetheilt wird, der also praktisch etwa dem Falle entspricht, wo eine Stimmgabel die Schlussplatte der Röhre erschüttert.

Die Geschwindigkeit der der Schlussplatte mitgetheilten Bewegung sei:

$$G \cos(2\pi nt + \tau_{,,}),$$

wo wir unter $\tau_{,,}$ eine willkürliche Constante verstehen, mittels deren wir den Anfang von t passend bestimmen. Dann muss sein für $x = -l$:

$$\frac{d\Psi}{dx} = J\cos(2\pi nt + \tau) = G\cos(2\pi nt + \tau_{,,}),$$

also:

$$G = J = A\sqrt{\frac{\cos^2 k(l+\alpha)}{\cos^2 k\alpha} + \frac{k^4 Q^2}{4\pi^2}\sin^2 kl}, \tag{15}$$

$$\operatorname{tang}\tau_{,,} = \operatorname{tang}\tau = \frac{k^2 Q \sin kl \cos k\alpha}{2\pi \cos k(l+\alpha)}. \tag{15a}$$

46 Das Geschwindigkeitspotential in den ferneren Theilen des freien Raumes ist:

$$\Psi = M\frac{\cos(k\varrho - 2\pi nt)}{\varrho},$$

wo:

$$M = -\frac{AQ}{2\pi}. \tag{12b}$$

Es lässt sich also A und M aus G und l bestimmen. A, das Schwingungsmaximum in der Röhre, und ebenso M, die Intensität der Kugelwellen im freien Raume, wird bei constantem G, also bei constanter Bewegung der Schlussplatte der Röhre, am grössten, wenn der Factor von A in (15) am kleinsten ist, d. h. wenn:

$$\cos k(l + \alpha) = 0, \qquad k(l + \alpha) = (\mathfrak{n} + \tfrac{1}{2})\pi.$$

Dann ist:

$$A = \frac{2\pi}{k^2 Q \cos k\alpha} G = \frac{\lambda^2}{2\pi Q \cos k\alpha} G,$$

$$M = -\frac{\lambda^2}{4\pi^2 \cos k\alpha} G\,[1]),$$

$$\tau = (-1)^{\mathfrak{n}} \tfrac{1}{2}\pi.$$

Die stärkste Resonanz der Röhre und der stärkste Schall im freien Raume findet also statt, wenn die Bewegung der Luft am Orte einer Knotenfläche mitgetheilt wird. Die Stärke der Schallwellen wird dabei sehr gross, aber keineswegs unendlich. Denn damit der im Nenner der Werthe von A und M stehende Factor $\cos k\alpha$ Null werde, müsste die Fläche der Oeffnung gleich Null werden. Dabei zeigt sich zugleich, dass die Resonanz sowohl in der Röhre als auch im freien Raume desto mächtiger wird, je enger die Oeffnung der Röhre ist. Wenn wie gewöhnlich $k\alpha$ klein ist, kann $\cos k\alpha = 1$ gesetzt werden. Dann ist die Wirkung im freien Raume unabhängig von der Form der Röhre. Die Vibrationen der Schwingungsmaxima in der Röhre und der um ganze Wellenlängen von der Oeffnung entfernten Wellen im freien Raume unterscheiden sich dabei von denen der mitgetheilten Bewegung um eine Viertel-Undulation.

Das Minimum der Resonanz tritt ein, wenn der Factor von A im Werthe von G in (15) sein Maximum erreicht, d. h. wenn:

$$\cos k(l + \alpha) = 1, \qquad k(l + \alpha) = \mathfrak{n}\pi;$$

---

1) Der Factor $4\pi^2$ im Nenner fehlt irrthümlich im Original.

dann wird mit Weglassung kleiner Grössen:

$$G \cos k\alpha = A, \qquad \tau = \mathfrak{a}\pi, \qquad M = \frac{QG \cos k\alpha}{2\pi}.$$

47 Die Wirkung im freien Raume ist also, je nach dem Werthe von α, gleich oder kleiner, als wenn gar keine Röhre vorhanden wäre, und die erschütterte Schlussplatte der Röhre einen Theil der übrigens festen yz-Ebene bildete.

Die grosse Verschiedenheit der Schallstärke in der Luft bei gleicher Excursionsweite der schwingenden Endplatte der Röhre, von der die Wellen erregt werden, kann überraschen. Sie beruht darauf, dass, wenn auch die Excursion der Schwingungen dieselbe bleibt, doch die Arbeit, die die schwingende Platte durch die Bewegung der Luft leistet, eine ausserordentlich verschiedene ist, je nachdem sie gegen verdichtete oder nicht verdichtete Luft sich vorwärts bewegen muss. Bei stärkster Resonanz findet am Ende der Röhre auch der stärkste Wechsel von Verdichtung und Verdünnung statt.

Gehen wir jetzt über zu dem anderen Falle, wo der Schall im freien Raume in grösserer Entfernung von der Oeffnung der Röhre erregt wird, letztere aber an der Stelle $x = -l$ fest geschlossen ist. Da die in dem tönenden Punkte, dessen Coordinaten α, β, γ seien, erregten Wellen von der festen yz-Ebene reflectirt werden, müssen wir uns die Bewegung im freien Raume zusammengesetzt denken aus den Wellen, welche der tönende Punkt erregt, und denen, welche sein Spiegelbild, dessen Coordinaten $-\alpha$, β, γ sind, erregen würde. Setzen wir das Geschwindigkeitspotential Φ dieser Bewegung auf Seite der positiven x im freien Raume:

$$\Phi = H\left[\frac{(\cos kr_{,} - 2\pi nt + c)}{r_{,}} + \frac{\cos(kr_{,,} - 2\pi nt + c)}{r_{,,}}\right]. \qquad (16)$$

wo $r_{,}$ die Entfernung vom Punkte α, β, γ und $r_{,,}$ die von seinem Spiegelbilde $-\alpha$, β, γ bedeutet, so ist an der ganzen yz-Ebene:

$$\frac{d\Phi}{dx} = 0.$$

Ist der tönende Punkt weit von der Oeffnung der Röhre entfernt und diese klein gegen die Wellenlänge, so können wir die kleinen Verschiedenheiten des Werthes von Φ in verschiedenen Punkten der Oeffnung vernachlässigen und hier setzen:

$$\overline{\Phi} = G \cos(2\pi nt + \tau_{\prime\prime}),$$

wo:

$$G = \frac{2H}{r_\prime},$$

$$\operatorname{tang} \tau_{\prime\prime} = -\operatorname{tang}(kr_\prime + c).$$

Innerhalb der Röhre setzen wir dann: 48

$$\Phi = G \cos kx \cos(2\pi nt + \tau_{\prime\prime}). \tag{16a}$$

Dann ist Φ an der Oeffnung continuirlich und $d\Phi/dx$ innen und aussen eben da gleich Null. Innerhalb der Röhre können wir bei dieser Annahme $d\Phi/dn = 0$ setzen, indem wir die verschwindend kleinen Werthe, welche es am nicht cylindrischen Theile der Röhre annimmt, vernachlässigen. Nur am verschlossenen Ende ist $d\Phi/dx$ im allgemeinen nicht gleich Null. Hier müssen wir setzen:

$$\frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Psi}{dx} = 0$$

und das Geschwindigkeitspotential im ganzen Raume gleich $\Phi + \Psi$, wo Ψ das von uns früher bestimmte Bewegungspotential der ebenen Wellen in der Röhre, die in den freien Raum übergehen, ist. Dadurch ist allen Bedingungen der Aufgabe genügt. Wir haben also für $x = -l$:

$$-kG \sin kl \cos(2\pi nt + \tau_{\prime\prime}) = J \cos(2\pi nt + \tau), \tag{16b}$$

also:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{\prime\prime} &= \tau + \pi, \\ kG \sin kl = J &= A \sqrt{\frac{\cos^2 k(l+\alpha)}{\cos^2 k\alpha} + \frac{k^4 Q^2}{4\pi^2} \sin^2 kl}. \end{aligned}\right\} \tag{16c}$$

Das Minimum von A bei gleichen Werthen von G tritt offenbar ein, wenn $\sin kl = 0$; dann wird $A = 0$, und die Bewegung im freien Raume so, als wäre die Mündung der Röhre gar nicht in der yz-Ebene vorhanden. Das Maximum aber tritt ein, wenn $\cos k(l + \alpha) = 0$; dann wird:

$$A = G \frac{2\pi}{kQ},$$

und wieder wird beim Maximum der Resonanz der Phasenunterschied von einer Viertel-Undulation zwischen den erregenden Wellen und den erregten eintreten. Das Maximum der Resonanz in der an einem Ende geschlossenen Röhre tritt also in beiden Fällen, sowohl wenn der Schall vom geschlossenen als wenn er vom offenen Ende her der Luft der Röhre mitgetheilt wird, ein, wenn die reducirte Länge der Röhre ein ungerades Vielfaches der Viertelwellenlänge ist. Aus dem Reciprocitätsgesetz des Schalles, welches in (9a) ausgesprochen ist, lässt sich nun dasselbe Gesetz auch für jede andere Lage des tönenden Punktes ableiten. Es passt auf unseren Fall direct die Form, welche wir dem Gesetze in (9c) gegeben
40 haben. Die dortige Constante A, welche der Intensität des tönenden Punktes b entspricht, indem dort Φ unendlich wird, wie:

$$\Phi = A \frac{\cos k r_b}{r_b} \cos(2\pi n t),$$

wollen wir gleich 1 setzen. Der Werth von $d\Psi/dn$ ist in (9c) an der erschütterten Stelle da der Wand gleichgesetzt worden:

$$\frac{d\Psi_a}{dn} = B \cos(2\pi n t).$$

Am Grunde der Röhre ist $d\Psi_a/dn = d\Psi_a/dx$, und in dem Falle, wo der Boden der Röhre erschüttert wird, von uns in den Gleichungen (15) und (15a) gesetzt worden:

$$\frac{d\Psi_a}{dx} = G \cos(2\pi n t + \tau_{,,});$$

wir haben also die Constante B der Gleichung (9c) mit G zu vertauschen und im Ausdrucke für Ψ statt $2\pi n t$ zu schreiben $2\pi n t - \tau_{,,}$. Ausserdem ist in dem Falle unserer Anwendung nicht blos ein einziges Flächenelement da erschüttert worden, sondern der ganze Boden der Röhre; wir müssen also über diesen integriren, und erhalten so:

$$4\pi \Psi_b = - G \int \Phi_a d\omega, \tag{17}$$

wo die Integration über den Boden der Röhre auszudehnen ist. Ist nun der tönende Punkt vom Boden der Röhre nur

weit genug entfernt, dass hier ebene stehende Wellen entstehen können, also Φ hier von Form ist:

$$\Phi = f \cos k(l + x) \cos(2\pi n t + c),$$

so wird aus (17):

$$4\pi \Psi_b = -f G Q \cos(2\pi n t + c),$$

$$4\pi \left[\Psi'_b \cos(2\pi n t - \tau_{,,}) + \Psi''_b \sin(2\pi n t - \tau_{,,})\right] = -f G Q \cos(2\pi n t + c),$$

$$\left.\begin{aligned} 4\pi(\Psi'_b \cos\tau_{,,} - \Psi''_b \sin\tau_{,,}) &= -f G Q \cos c, \\ 4\pi(\Psi'_b \sin\tau_{,,} + \Psi''_b \cos\tau_{,,}) &= f G Q \sin c, \end{aligned}\right\} \quad (17\text{a})$$

$$4\pi \sqrt{(\Psi'_b)^2 + (\Psi''_b)^2} = f G Q.$$

Nun ist der Werth der Functionen Ψ' und Ψ'' für jeden Punkt b proportional der in den Gleichungen (10) bis (16) vorkommenden Constanten A, deren Verhältniss zu G für eine bestimmte Röhrenlänge gegeben ist in Gleichung (15). Also ist bei wechselnder Röhrenlänge auch f proportional dem Verhältniss A/G. Dies Verhältniss wird, wie aus (15) hervorgeht, ein Maximum, wenn:

$$l + \alpha = (2\mathfrak{a} + 1)\tfrac{1}{4}\lambda.$$

Daraus folgt also, dass auch bei einer beliebigen Lage des tönenden Punktes die ebenen Wellen im Innern der Röhre, wenn dergleichen überhaupt entstehen, das Maximum ihrer Intensität erreichen, wenn die Länge der Röhre ein ungerades Vielfaches der Viertelwellenlänge ist.

Die ebenen Wellen im Innern einer an beiden Seiten offenen Röhre lassen sich mittels der aufgestellten Probleme behandeln, wenn die Mündungen der Röhre nach der von uns gemachten Annahme in zwei parallelen festen Ebenen liegen, die den Luftraum in zwei Theile trennen, und der Schall auf der einen Seite von einem weit entfernten tönenden Punkte ausgeht. Auf der einen Seite dieser Wand setzt man das Geschwindigkeitspotential gleich der in den Gleichungen (10) bis (12) gebrauchten Function Ψ, auf der anderen Seite gleich der in den Gleichungen (16) bis (16c) vorkommenden Form $\Phi + \Psi$, welche der Resonanz einer Röhre entspricht, in welche

der Schall von der offenen Mündung eintritt. Man hat dann nur die Coëfficienten der ebenen Wellen in der Röhre in diesen beiden Ausdrücken des Geschwindigkeitspotentials so zu bestimmen, dass hier beide Functionen identisch werden. Da das weiter keine Schwierigkeiten macht, möge das Gesagte genügen. Die Resonanz in der Röhre wird am stärksten, wenn die reducirte Länge der Röhre, an welcher man die Correctionen für beide Mündungen anzubringen hat, ein Vielfaches der halben Wellenlänge ist.

§ 8. Reducirte Länge verschiedener Röhrenformen.

Wir wollen schliesslich noch eine Reihe von Röhrenformen aufsuchen, für welche mit den bis jetzt bereiten Hülfsmitteln der Analysis sich die Luftbewegung in der Mündung und die reducirte Länge vollständig wenigstens für Schallwellen von so grosser Wellenlänge bestimmen lässt, dass gegen diese die Dimensionen der Röhrenöffnung, ihres Querschnitts und des von der Cylindergestalt abweichenden Theiles der Mündung verschwinden. Die Wand der Röhre sei übrigens eine Rotationsfläche, welche in kleiner Entfernung von der kreisförmigen Mündung, deren Radius R sei, übergeht in einen Cylinder von kreisförmigem Querschnitt, dessen Radius wir R_1 nennen wollen. Wir setzen ferner voraus, dass auch die Bewegung der Luft überall symmetrisch um die Axe der Röhre
51 vor sich gehe. Wir können nun im Allgemeinen nicht so zu Werke gehen, dass wir eine bestimmte Röhrenform annehmen und dazu die Potentiale der Bewegung suchen, sondern wir müssen umgekehrt von der Potentialfunction ausgehen und die dazu gehörige Röhrenform bestimmen, was sich in jedem Falle ausführen lässt. Nur müssen wir eben solche Formen der Potentialfunction suchen, welche Röhren geben, die in kleiner Entfernung von der Mündung in einen Cylinder übergehen.

Dem Bewegungspotentiale der Luft haben wir die Form gegeben:

$$\Psi = \Psi' \cos(2\pi nt) + \Psi'' \sin(2\pi nt).$$

Für die tieferen Theile der Röhre haben wir in (12g) gefunden:

$$\Psi'' = -\frac{AkQ}{2\pi} \cos kx. \tag{12k}$$

Im freien Raume ist aber, wenn wir $d\Psi''/dx = 0$ setzen, wel-

ches, wie wir oben schon gefunden haben, mit k verschwindet, nach (11 d).

$$\Psi'' = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\,\frac{\sin kr_{,}}{r_{,}}\,d\omega,$$

welches innerhalb der Mündung, wo wir $kr_{,}$ verschwinden lassen dürfen, wird:

$$\overline{\Psi''} = -\frac{k}{2\pi}\int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx}\,d\omega = -\frac{AkQ}{2\pi}. \tag{12l}$$

Sowohl (12 k) wie (12l) giebt innerhalb der Mündung den gleichen Werth von $\overline{\Psi''}$ und den Werth Null für $d\overline{\Psi''}/dx$. Sie gehen also an der Mündung der Röhre continuirlich ineinander über. Längs der festen Wände des Luftraumes geben beide $d\overline{\Psi''}/dn = 0$, nur an dem nicht cylindrischen Theile der Röhrenwand wird dieser Differentialquotient nicht genau Null aber verschwindend klein. Es ist also Ψ'' unter dieser Annahme eine continuirliche Function, die den Bedingungen der Aufgabe Genüge leistet, und kann unmittelbar berechnet werden, nachdem Ψ' gefunden ist.

Die Function Ψ' hat im freien Raume die Form:

$$\left.\begin{aligned} \Psi' &= \int h\,\frac{\cos kr}{r}\,d\omega, \\ \text{wo } h &= -\frac{1}{2\pi}\,\frac{d\overline{\Psi'}}{dx}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Im Innern der Röhre werden wir ihr eine andere analytische Form Ψ_i geben müssen, welche die Eigenschaft haben muss:

1) im Innern der Röhre die Bedingung zu erfüllen:

$$\nabla \Psi_i + k^2 \Psi_i = 0, \tag{18a}$$

2) für grosse negative Werthe von x folgende Form an- 52
zunehmen:

$$\Psi_i = \frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx, \tag{18b}$$

3) an der Fläche der Oeffnung den Bedingungen zu genügen:

$$\overline{\Psi_i} = \overline{\Psi'} \text{ und } \frac{d\overline{\Psi_i}}{dx} = \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} = -2\pi h. \tag{18c}$$

Dann wird die Form der Röhre gefunden durch die Bedingung, dass an der Wand:

$$\frac{d\Psi_i}{dn} = 0, \tag{18d}$$

welche Form aber noch der Bedingung genügen muss, dass nur für solche Werthe von x, welche gegen die Wellenlänge λ verschwindend klein sind, die Fläche eine merkliche Neigung gegen die x-Axe haben darf, weil wir vorher auch:

$$\frac{d \cos kx}{dn} = 0$$

gesetzt haben längs der ganzen Ausdehnung der Röhrenwand, und weil nur unter dieser Bedingung die Form der Röhrenwand von der Wellenlänge unabhängig gefunden wird. Indem wir setzen:

$$\varrho \cos \omega = y, \qquad \varrho \sin \omega = z,$$

und berücksichtigen, dass nach der Voraussetzung Ψ nur eine Function von ϱ und x, nicht von ω sein soll, wird Gleichung (18a):

$$\frac{d^2\Psi_i}{dx^2} + \frac{d^2\Psi_i}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{d\Psi_i}{d\varrho} + k^2\Psi_i = 0. \tag{18e}$$

Wir setzen:

$$\Phi = \frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx + \Sigma\left[E_m e^{+x\sqrt{m^2+k^2}}\, U_{(m\varrho)}\right], \tag{19}$$

wo E_m beliebige Constanten, $U_{(m\varrho)}$ folgende Function bedeutet:

$$U_{(m\varrho)} = 1 - \frac{m^2\varrho^2}{2.2} + \frac{m^4\varrho^4}{2.2.4.4} - \frac{m^6\varrho^6}{2.2.4.4.6.6} \text{ u. s. w.}, \tag{19a}$$

und unter dem Summenzeichen für m diejenigen Werthe zu setzen sind, welche $dU_{(m\varrho)}/d\varrho = 0$ machen, wenn $\varrho = R_1$. Dann ist Φ eine Function, welche der Differentialgleichung (18e) Genüge leistet und an der Wand einer cylindrischen Röhre vom Radius R_1 auch der Bedingung genügt, dass $d\Phi/dn = 0$. In dem Exponenten von e muss der Wurzel immer das positive Vorzeichen gegeben werden, wenn die Röhre unendlich lang ist, damit Φ für unendliche negative x endlich bleibt. Ist die
53 Röhre aber irgendwo abgeschlossen, so sind auch negative Vorzeichen der Wurzel zu nehmen, und die Coëfficienten derselben so zu bestimmen, dass die Grenzbedingungen an dem geschlos-

senen Ende erfüllt werden. Da übrigens der kleinste Werth von mR_1, der die Bedingung $dU/d\varrho$ für $\varrho = R_1$ erfüllt, 3,83171, der zweite 7,01751 ist, während die folgenden sich allmählig der Grösse $(\mathfrak{a} + \frac{1}{4})\pi$ nähern, so nehmen alle diese Exponentialfunctionen schnell ab, wenn man sich von dem Ende der Röhre entfernt, an welchem sie einen merklichen Werth haben, und so oft die Länge der Röhre beträchtlich gross gegen den Durchmesser ist, werden sie in der Mitte oder am Ende derselben zu vernachlässigen sein. Es wird also im allgemeinen genügen, dass wir uns auf die Glieder beschränken, für welche die Wurzel im Exponenten ein positives Vorzeichen hat. Da übrigens mR_1 nach dem Gesagten eine endliche, kR_1 aber eine verschwindend kleine Zahl ist, so können wir in dem Exponenten k^2 gegen m^2 vernachlässigen und setzen:

$$\Phi = \frac{A}{k} \sin kx + B \cos kx + \Sigma \{ E_m e^{mx} U_{(m\varrho)} \}. \qquad (19\text{b})$$

Diese Function erfüllt also allerdings die Forderung der Gleichungen (18a) und (18b), welche wir oben für die Function Φ_i aufgestellt haben, sie wird aber im allgemeinen nicht der dritten Bedingung (18c) entsprechen, dass, wenn wir setzen:

$$\frac{d\overline{\Phi}}{dx} = \frac{d\overline{\Psi'}}{dx},$$

auch sei:

$$\overline{\Phi} = \overline{\Psi'} = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{d\overline{\Psi'}}{dx} \frac{\cos kr}{r} d\omega,$$

oder, da innerhalb der Oeffnung kr unendlich klein ist, kann man diese Bedingung auch darauf reduciren, dass sein müsste:

$$\overline{\Phi} = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{d\overline{\Phi}}{dx} \frac{d\omega}{r}.$$

Wäre diese letztere Bedingung durch besondere Annahmen über die Grösse der Coëfficienten erfüllt, so würde die Gestalt der Röhre einfach cylindrisch sein. Ich habe aber keine Methode finden können, um die Coëfficienten dieser Bedingung gemäss zu bestimmen und somit die Aufgabe für ganz cylindrische Röhren streng zu lösen. Auch lässt sich einsehen, dass die Convergenz der Reihe für Φ in Gleichung (19) für diesen Fall eine sehr langsame sein würde, da die Geschwindigkeit

der Lufttheilchen $d\Phi/dx$ am Rande der Oeffnung, die durch eine scharfe rechtwinkelige Kante begrenzt sein würde, unend-
54 lich gross wie $(R-\varrho)^{-\frac{1}{3}}$ werden müsste, und daher die Reihe für $d\Phi/dx$ für den Werth $\varrho = R$ und $x = 0$ überhaupt nicht convergiren kann.

Wir fügen deshalb zu Φ noch eine andere Function hinzu, die in grösserer Entfernung von der Oeffnung verschwindet, also auch nur in der Nähe der Oeffnung Einfluss auf die Gestalt der Röhre ausübt, aber die Continuität an der Oeffnung herstellt.

Bezeichnen wir der Einfachheit wegen die Potentialfunction einer auf der Kreisfläche der Oeffnung mit der Dichtigkeit h verbreiteten Masse mit P_h, also:

$$P_h = \int h \frac{\cos kr}{r}\, d\omega, \tag{20}$$

dieses Integral über die ganze Fläche der Oeffnung genommen. Wenn die Distanz des Punktes, für welchen wir P_h bestimmen, von der Oeffnung klein ist, so ist $\cos kr = 1$ und:

$$P_h = \int \frac{h\, d\omega}{r}. \tag{20a}$$

Setzen wir ferner:

$$h = i + l, \tag{21}$$

$$i = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\overline{\Phi}}{dx}, \tag{21a}$$

und bestimmen wir l so, dass in der Fläche der Oeffnung:

$$\overline{P_l} = \tfrac{1}{2}\overline{\Phi}, \tag{21b}$$

was sich immer ausführen lässt, weil die Vertheilung einer Masse auf einer Kreisscheibe, die an der Oberfläche dieser Scheibe eine Potentialfunction von gegebener Grösse giebt, nach bekannten Methoden gefunden werden kann. Setzen wir ferner auf Seite der positiven x, wie schon oben geschehen:

$$\Psi' = P_h = P_i + P_l; \tag{21c}$$

in der Röhre dagegen, also für negative x:

$$\Psi_i = \Phi + P_i - P_l, \tag{21d}$$

so genügen die Functionen Ψ' und Ψ_i allen für sie gestellten

Bedingungen. Dass nämlich Ψ' im freien Raume und Ψ_i im Innern der Röhre der Bedingung genügen:

$$\nabla \Psi + k^2 \Psi = 0, \tag{18a}$$

ist aus der Bildungsweise dieser Functionen klar. Das Ψ_i für grosse Werthe von $-x$ übergeht in: 55

$$\Psi_i = \frac{A}{k} \sin kx + B \cos kx,$$

erhellt daraus, dass P_i und P_l in einer gegen die Oeffnung der Röhre grossen Entfernung unendlich klein werden, Φ aber wirklich in jene Form übergeht. Da ferner in der Fläche der Oeffnung:

$$\overline{P_l} = \tfrac{1}{2} \overline{\Phi}, \tag{21b}$$

wird:

$$\overline{\Psi'} = \overline{\Psi_i} = \overline{P_i} + \overline{P_l}. \tag{21e}$$

Da ferner an der Fläche der Oeffnung:

$$\frac{dP_i}{dn} = -2\pi i = \frac{1}{2} \frac{d\overline{\Phi}}{dx}$$

und auf Seite der positiven x:

$$\frac{dP}{dn} = \frac{d\overline{P}}{dx},$$

auf Seite der negativen aber:

$$\frac{dP}{dn} = -\frac{d\overline{P}}{dx},$$

so ist:

$$\frac{d\overline{\Psi'}}{dx} = \frac{d\overline{\Psi_i}}{dx} = \frac{dP_i}{dn} + \frac{dP_l}{dn} = -2\pi(i + l). \tag{21f}$$

Somit sind die gestellten Bedingungen (18a), (18b) und (18c) erfüllt.

Die Form der Röhrenwand wird endlich durch die Gleichung gegeben:

$$\frac{d\Psi_i}{dn} = 0. \tag{18d}$$

Da wir die Bedingung gemacht haben, dass, wenn r eine innerhalb des nicht cylindrischen Theiles der Röhre liegende Entfernung ist, k^2r^2 gegen 1 zu vernachlässigen sei, können wir entsprechend der zur Gleichung (7d) gemachten Bemerkung in

dieser Gleichung der Röhrenwand $k = 0$ setzen, werden dann aber natürlich auch die Aufgabe nur für solche Werthe von k als gelöst betrachten dürfen, für welche diese Bedingung erfüllt ist. Dann ist also für diesen Zweck in der Nähe der Röhrenmündung zu setzen statt (19b):

$$\Phi = Ax + B + \Sigma \{E_m e^{mx} U_{(m\varrho)}\}, \tag{22}$$

$$P_i = \int \frac{i\,d\omega}{r}, \qquad P_l = \int \frac{l\,d\omega}{r}, \tag{20a}$$

$$i = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\overline{\Phi}}{dx}, \qquad \overline{P_l} = \tfrac{1}{2}\,\overline{\Phi}, \tag{21a), (21b}$$

$$\Psi_i = \Phi + P_i - P_l. \tag{21d}$$

56 In der That sind auch alle diese Functionen von einer solchen Form, dass sich ihr Werth in der Nähe der Mündung nicht ändert dadurch, dass man $k = 0$ setzt. Die Bedingung (18d) ergiebt, dass die Röhrenwand eine zu allen Flächen, deren Gleichung $\Psi_i = \text{Const.}$ ist, orthogonale Rotationsfläche sein muss, oder wenn wir die Gleichung der Röhrenwand (und überhaupt der Strömungscurven) ausdrücken durch:

$$\varrho\chi = \text{Const.},$$

so muss sein:

$$\frac{d\Psi_i}{dx}\frac{d(\varrho\chi)}{dx} + \frac{d\Psi_i}{d\varrho}\frac{d(\varrho\chi)}{d\varrho} = 0. \tag{22a}$$

Zu bemerken ist noch, dass man, um die Form der Function Φ festzustellen, die Grösse des Radius des cylindrischen Theiles der Röhre R_1 bestimmen muss, weil von dessen Grösse die in der Summe vorkommenden Werthe von m abhängen. Um P_i und P_l zu finden, muss wiederum die Grösse des Radius der Oeffnung R festgestellt sein, und schliesslich, wenn man die Röhrenform aus der Gleichung $d\Psi_i/dn = 0$ bestimmt, wird die Stromescurve, welche von dem Rande der Oeffnung ausgeht, nicht nothwendig in einen Cylinder vom Radius R_1 übergehen. Um dies nun zu bewirken, muss man eine der Constanten von Φ durch die oben gefundene Gleichung:

$$AQ = -2\pi M \tag{12b}$$

bestimmen, worin in unserem Falle Q der Querschnitt der Röhre:

$$Q = \pi R_1^2,$$

$$M = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{d\overline{\Psi}}{dx}\,d\omega = \int (i + l)\,d\omega.$$

Daraus folgt:

$$AR_1^2 = -2\int (i + l)\,d\omega. \tag{22b}$$

Wenn R und R_1 gegeben sind, giebt diese Gleichung eine Bedingung, welche durch die Coëfficienten des Ausdruckes für Φ in (22) erfüllt werden muss, sodass einer von ihnen durch die anderen bestimmt werden kann.

§ 9. Einfachste Röhrenformen.

Wir wollen endlich noch einige Röhrenformen berechnen, welche den einfachsten Annahmen über die Function Φ entsprechen. Setzen wir:

$$\Phi = \frac{A}{k}\sin kx + B\cos kx, \tag{23}$$

so wird nach (21a): 57

$$i = -\frac{A}{4\pi}, \quad \int i d\omega = -\tfrac{1}{4}AR^2 \tag{23a}$$

und in der Ebene der Mündung nach (21b):

$$\overline{P_l} = \tfrac{1}{2}B,$$

woraus nach bekannten Sätzen über Elektricitätsvertheilung auf einer leitenden Kreisscheibe folgt, dass:

$$l = \frac{B}{2\pi^2\sqrt{R^2 - \varrho^2}}, \quad \int l d\omega = \frac{BR}{\pi}. \tag{23c}$$

Somit folgt aus Gleichung (22b):

$$AR_1^2 = \tfrac{1}{2}AR^2 - \frac{2}{\pi}BR. \tag{23d}$$

Den Unterschied α der wahren und reducirten Röhrenlänge haben wir oben (12a) definirt durch die Gleichung:

$$-\frac{kB}{A} = \operatorname{tang} k\alpha. \tag{12f}$$

Da ka eine sehr kleine Grösse ist, so oft das Verhältniss $R_1 : R$ endlich ist, können wir diesem Falle annähernd setzen:

$$\alpha = -\frac{B}{A} = \frac{\pi}{2}\frac{R_1^2}{R} - \frac{\pi}{4}R, \tag{23e}$$

wodurch für die hier in Betracht kommenden Röhrenformen der Unterschied zwischen wahrer und reducirter Länge gegeben ist, wenn die Radien des Cylinders und seiner Mündung bestimmt sind. Die reducirte Länge der Pfeife ist gleich der wahren, also $\alpha = B = 0$, wenn $R = R_1\sqrt{2}$.

Wenn die Mündung ebenso weit ist wie der Cylinder, also $R = R_1$, wird $\alpha = R\pi/4$ und $B = -RA\pi/4$. Wenn R sehr klein gegen R_1 ist, wird annähernd:

$$\frac{B}{A} = -\frac{\pi R_1^2}{2R} = -\frac{Q}{2R},$$

wie es schon oben für diesen Fall in (12i) gefunden ist. Unter diesen Umständen kann natürlich nicht die abgekürzte Form (23e) für die Gleichung (12f) angewendet werden.

Die Bedeutung der Function χ der Gleichung (22a), welche zur Bestimmung der Strömungscurven dient, setzen wir durch folgende Geichung fest:

$$\varrho\chi = \int_0^\varrho \frac{d\psi_i}{dx}\varrho\, d\varrho, \tag{24}$$

58 worin unter dem Integralzeichen x einen constanten Werth behält. Daraus folgt zunächst:

$$\frac{d}{d\varrho}(\varrho\chi) = \varrho\frac{d\Psi_i}{dx}, \tag{24a}$$

$$\frac{d}{dx}(\varrho\chi) = \int_0^\varrho \frac{d^2\Psi_i}{dx^2}\varrho\, d\varrho.$$

Da wir nun für unseren jetzt vorliegenden Zweck uns erlauben durften in den Functionen Φ, P_i und P_i (s. (22) und (20a)), aus denen Ψ_i zusammengesetzt ist, $k = 0$ zu setzen, so reducirt sich die Gleichung (18e) in der Nähe der Mündung auf:

$$\frac{d^2\Psi_i}{dx^2} = -\frac{d^2\Psi_i}{d\varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{d\Psi_i}{d\varrho},$$

und wir erhalten also:

$$\frac{d}{dx}(\varrho\chi) = -\int_0^\varrho \left(\varrho\frac{d^2\Psi_i}{d\varrho^2} + \frac{d\Psi_i}{d\varrho}\right) d\varrho,$$

$$\frac{d}{dx}(\varrho\chi) = -\varrho\frac{d\Psi_i}{d\varrho}; \tag{24b}$$

aus (24a) und (24b) folgt, dass die Function χ der Bedingung genügt:

$$\frac{d(\varrho\chi)}{d\varrho}\frac{d\Psi_i}{d\varrho} + \frac{d(\varrho\chi)}{dx}\frac{d\Psi_i}{dx} = 0,$$

und dass in einer durch die x-Axe gelegten Ebene die Curven

$$\varrho\chi = \text{Const.}$$

orthogonal sind zu den Curven:

$$\Psi_i = \text{Const.},$$

erstere also Stromescurven sind.

Wenn wir in die Gleichung (24) für Ψ_i setzen:

$$\Psi_i = \Phi + P_i - P_l, \tag{21d}$$

so können wir auch χ ähnlich zerfällen:

$$\chi = \chi_0 + \chi_, - \chi_{,,}, \tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned} \varrho\chi_0 &= \int_0^\varrho \frac{d\Phi}{dx}\varrho\, d\varrho, \\ \varrho\chi_, &= \int_0^\varrho \frac{dP_i}{dx}\varrho\, d\varrho, \\ \varrho\chi_{,,} &= \int_0^\varrho \frac{dP_l}{dx}\varrho\, d\varrho. \end{aligned}\right\} \tag{25a}$$

Da sich Φ hier reducirt auf:

$$\Phi = Ax + B,$$

so ist: 59

$$\chi_0 = \tfrac{1}{2} A\varrho. \tag{25b}$$

Um die Berechnung von $\chi_,$ abzukürzen, bemerke ich Folgendes. Es sei W eine Potentialfunction, die auf Seite der negativen x der Differentialgleichung genügt:

$$\frac{d^2W}{dx^2} + \frac{d^2W}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dW}{d\varrho} = 0,$$

und ferner sei:
$$P_i = \frac{dW}{dx}, \tag{25c}$$
so ist:
$$\varrho\chi_{,} = \int_0^\varrho \frac{d^2 W}{dx^2}\varrho\, d\varrho = -\int_0^\varrho \frac{d}{d\varrho}\left(\varrho\frac{dW}{d\varrho}\right) d\varrho = -\varrho\frac{dW}{d\varrho}. \tag{25d}$$
Nun ist P_i die Potentialfunction einer Masse, die mit der constanten Dichtigkeit $-A/4\pi$ auf einer Kreisscheibe vom Radius R ausgebreitet ist. Die Gleichung (25c) erfüllen wir, wenn wir W zur Potentialfunction eines soliden Cylinders machen, dessen Basis die kreisförmige Röhrenmündung ist, und der von $x = 0$ bis $x = +\infty$ reicht und mit Masse von der constanten Dichtigkeit $-A/4\pi$ gefüllt ist. Man braucht sich nur den Cylinder um ein unendlich kleines Stück in der Richtung der positiven x verschoben zu denken und die neue Dichtigkeit so wie die neue Potentialfunction von der früheren abzuziehen, so erhält man das angegebene Resultat. Die Gleichung (25d) kann man aber schreiben, weil $y = \varrho\cos\omega$:
$$\chi_{,}\cos\omega = -\frac{dW}{d\varrho}\cos\omega = -\frac{dW}{dy}. \tag{25e}$$
Es ist aber $-dW/dy$ die Potentialfunction der Oberfläche des Cylinders, die mit Masse von der Dichtigkeit $-(A/4\pi)\cos\omega$ bedeckt ist, wie sich wieder leicht ergiebt, wenn man den Cylinder in Richtung der negativen y unendlich wenig verschoben denkt. Also lässt sich $\chi_{,}$ unmittelbar finden:
$$\chi_{,} = -\frac{A}{4\pi}\int_0^{2\pi} da \int_0^\infty \frac{R\cos\omega\, d\omega}{\sqrt{(x-a)^2 + (\varrho - R\cos\omega)^2 + R^2\sin^2\omega}}. \tag{26}$$
Der Werth, mit Hülfe elliptischer Integrale ausgedrückt, ist folgender:
$$\chi_{,} = \frac{AR}{\pi}\left\{\frac{\varkappa_{,}\cos\vartheta}{\varkappa^2\sqrt{1-\varkappa^2_{,}\sin^2\vartheta}}(K-E)\right. \tag{26a}$$
$$\left. - \frac{\varkappa_{,}\sin\vartheta}{1-\varkappa^2_{,}\sin^2\vartheta}\left[\tfrac{1}{2}\pi + (K-E)F'_{\vartheta} - KE'_{\vartheta}\right]\right\} - c,$$
69 worin gesetzt ist:
$$\varkappa^2 = \frac{4R\varrho}{x^2 + (R+\varrho)^2}, \quad \varkappa^2_{,} = 1 - \varkappa^2, \quad \varkappa_{,}\sin\vartheta = \pm\frac{R-\varrho}{R+\varrho},$$
$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\omega}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\omega}}, \qquad E = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\omega\, d\omega},$$

$$F_\vartheta = \int_0^\vartheta \frac{d\omega}{\sqrt{1-\varkappa^2{}_{,}\sin^2\omega}}, \qquad E'_\vartheta = \int_0^\vartheta \sqrt{1-\varkappa^2{}_{,}\sin^2\omega}\, d\omega,$$

$$c = \frac{AR^2}{4\varrho}, \qquad \text{wenn } \varrho > R,$$

$$c = \frac{A\varrho}{4}, \qquad \text{wenn } R > \varrho,$$

oder in beiden Fällen:

$$c = \frac{AR}{4} \cdot \frac{1-\varkappa_{,}\sin\vartheta}{1+\varkappa_{,}\sin\vartheta}.$$

Uebrigens ist für $\sin\vartheta$, für $\cos\vartheta$, wie für $\varkappa$, immer der positive Werth zu nehmen, der sich aus den obigen Formeln ergiebt.

Endlich ergiebt sich $\chi_{,,}$ leicht aus den bekannten Sätzen über Potentialfunctionen, die durch elliptische Coordinaten ausgedrückt sind. Setzen wir:

$$x = R\mu s,$$
$$\varrho = R\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1+s^2},$$

so ist die Potentialfunction P_l einer Scheibe, auf welcher selbst die Potentialfunction constant gleich $\frac{1}{2}B$ ist,

$$P_l = \frac{B}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{s}.$$

Die Linien $\mu = C$ sind confocale Hyperbeln und orthogonal gegen die Linien $s = C$, welche confocale Ellipsen sind. Da die letzteren in unserem Falle Curven gleichen Potentials sind, sind die Linien $\mu = C$ Strömungscurven, und wir brauchen die Grösse $\varrho\chi_{,,}$ nur für den Scheitelpunkt derselben in der Scheibe zu bestimmen, so muss sie denselben Werth in der ganzen Länge haben.

An der Scheibe selbst wird $s = 0$, für sehr kleine Werthe von s und $-x$ wird:

$$\mu = \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{R^2}}, \qquad s = -\frac{x}{\sqrt{R^2-\varrho^2}},$$

$$P_l = -\frac{B}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{R^2-\varrho^2}}{x},$$

$$\frac{dP_l}{dx} = +\frac{B}{\pi}\frac{1}{\sqrt{R^2-\varrho^2}},$$

61 $$\varrho\chi_{\prime\prime} = \int\limits_0^{\varrho} \frac{dP_\iota}{dx}\,\varrho\,d\varrho = \frac{BR}{\pi}(1-\mu). \qquad (27)$$

Um μ in den bei den elliptischen Integralen gebrauchten Hülfsgrössen auszudrücken, dient, wenn ϑ für $\varrho > R$ negativ genommen wird, die Gleichung:

$$\mu = \sqrt{\frac{2\varkappa_{\prime}(1+\sin\vartheta)}{(1+\varkappa_{\prime})(1+\varkappa_{\prime}\sin\vartheta)}}.$$

Somit haben wir denn in den Gleichungen (25b), (26) und (27) die Werthe von χ_0, $\chi_{\prime}$ und $\chi_{\prime\prime}$, und die Gleichung der Strömungscurven wird:

$$\varrho(\chi_0 + \chi_{\prime} + \chi_{\prime\prime}) = \text{Const.}$$

Soll die Strömungscurve der Röhrenwand entsprechen, so muss sie durch den Rand der Oeffnung gehen, und die Constante ist:

$$\text{Const.} = \int\limits_0^{R} \frac{d\Psi'}{dx}\,\varrho\,d\varrho = \tfrac{1}{2}AR_1^2;$$

folglich wird die Gleichung der Röhrenwand:

$$\varrho(\chi_0 + \chi_{\prime} - \chi_{\prime\prime}) = \tfrac{1}{2}AR_1^2. \qquad (27\text{b})$$

Um die Röhrenform zu erhalten, für welche die Differenz zwischen der wahren und reducirten Länge verschwindet, müssen wir $B = 0$, $R = R_1\sqrt{2}$ setzen, dann verschwindet auch $\chi_{\prime\prime}$, und die Gleichung der Röhrenwand reducirt sich auf:

$$\varrho\chi_{\prime} = \tfrac{1}{2}A(R_1^2 - \varrho^2).$$

Es giebt dies eine Röhre mit trompetenförmigem, schwach erweitertem Ende. Die Krümmung der Wand ist überall nach innen convex, und ihr Krümmungshalbmesser, der vom cylindrischen Theile an gegen die Mündung allmählig abnimmt, wird am Rande der Oeffnung zuletzt unendlich klein.

Macht man den Radius der Oeffnung gleich dem der Röhre, so nähert sich die Form der Röhre am meisten einem reinen Cylinder. Es wird dann die Differenz zwischen der reducirten und wahren Länge der Röhre, wie schon oben bemerkt, gleich $\frac{1}{4}\pi R$. Da in diesem Falle die Grösse:

$$\varkappa_{\prime}^2 \sin^2\vartheta = \frac{(R-\varrho)^2}{(R+\varrho)^2}$$

immer sehr klein bleibt, und also auch $\sin\vartheta$ für alle nicht zu kleinen Werthe von $\varkappa_{,}$ sehr klein bleibt, kann man zur Berechnung von $\varkappa = 0$ bis $\varkappa = \sin 89^0$ die höheren Potenzen als die erste von $\varkappa_{,} \sin\vartheta$ und als die zweite von $\sin\vartheta$ vernachlässigen. Die so vereinfachte Gleichung für die Röhrenwand, aus der man $\sin\vartheta$ für eine Reihe von Werthen von $\varkappa_{,}$ leicht mit Hülfe der Tafeln von **Legendre** berechnen kann, ist: 62

$$0 = \frac{4\varkappa_{,}}{\pi\varkappa^2}(K - E) - \sqrt{\frac{2\varkappa_{,}}{1+\varkappa_{,}}}$$
$$+ \varkappa_{,} \sin\vartheta \left\{ \frac{8\varkappa_{,}}{\pi\varkappa^2}(K - E) + 6 + \frac{1-\varkappa_{,}}{\sqrt{2\varkappa_{,}(1+\varkappa_{,})}} \right\}$$
$$- \varkappa_{,} \sin^2\vartheta \left\{ \frac{2\varkappa_{,}}{\pi\varkappa^2}(K - E) - \frac{4E}{\pi} - \frac{1}{4\sqrt{2\varkappa_{,}(1+\varkappa_{,})}} \right\}.$$

Aus den zusammengehörigen Werthen von $\varkappa_{,}$ und ϑ lassen sich endlich $\varkappa$ und ϱ berechnen, deren Werthe in diesem Falle sind:

$$\frac{\varrho - R}{R} = \frac{2\varkappa_{,} \sin\vartheta}{1 + \varkappa_{,} \sin\vartheta},$$
$$\frac{x}{R} = - \frac{2\varkappa_{,} \cos\vartheta}{\varkappa(1 - \varkappa_{,} \sin\vartheta)}.$$

In der folgenden Tabelle bedeutet demnach $(\varrho - R)/R$ den Abstand zwischen der Wand unserer Pfeifenform und der des Cylinders, ausgedrückt in Theilen des Radius, und ebenso x/R den Abstand der betreffenden Stelle von der Oeffnung, ausgedrückt in Theilen des Radius.

ang. $\sin\varkappa_{,}$	ϑ	$\frac{\varrho - R}{R}$	$\frac{x}{R}$
0°	90°	0	0
1°	26° 2′	0,0153	0,03161
2°	15° 42′	0,0187	0,06787
3°	10° 59′	0,0197	0,10392
4°	8° 14′	0,0198	0,13979
5°	6° 26′	0,0193	0,17556
6°	5° 9′	0,0186	0,21132
7°	4° 13′	0,0177	0,24708
8°	3° 30′	0,0168	0,28291
9°	2° 56′	0,0159	0,31888
10°	2° 29′	0,0149	0,35496
15°	1° 11′ 40″	0,0107	0,53867
20°	0° 37′ 50″	0,0075	0,73058
25°	0° 21′ 0″	0,0051	0,93502
30°	0° 12′ 0″	0,0035	1,15668

In grösserer Entfernung von der Scheibe findet man:

$$\frac{\varrho - R}{R} = \tfrac{1}{32}\left(\frac{2R - x}{2R + x}\right)^2.$$

63 Am schnellsten ändert die Curve ihre Natur dicht an der Oeffnung. Zwischen $\varkappa_{,} = 0$ und $\varkappa_{,} = \sin 1^0$ kann man folgende annähernd richtige Gleichung brauchen:

$$0 = \log\left(\frac{4}{\varkappa_{,}}\right) - 1 + (\tfrac{3}{2}\pi + \vartheta)\,.\,\text{tang}\,\vartheta - \frac{\pi}{4\sqrt{\varkappa_{,}}\,\sin(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\vartheta)}.$$

Wenn $\varkappa_{,}$ sehr klein wird, verschwindet $\log \varkappa_{,}$ gegen $1/\sqrt{\varkappa_{,}}$ und $\text{tang}\,\vartheta$ muss sehr gross, ϑ nahe gleich $\frac{1}{2}\pi$ werden, dann ist:

$$0 = \text{tang}\,\vartheta - \frac{1}{8\sqrt{\varkappa_{,}}},$$

oder:

$$\frac{\varrho - R}{x} = \frac{\sqrt{2R}}{8\sqrt[4]{(\varrho - R)^2 + x^2}},$$

oder, da x auch sehr klein gegen $\varrho - R$ werden muss:

$$(\varrho - R)^3 = \tfrac{1}{32} R x^2.$$

Aus dieser letzten Gleichung folgt, dass die Wandfläche die verlängerte Ebene der Oeffnung an deren Rande tangirt und hier einen unendlich kleinen Krümmungshalbmesser hat.

§ 10. Tonhöhe von Resonatoren.

Das verallgemeinerte Theorem von Green liefert uns auch einige allgemeine Gesetze der Schallbewegung für solche Hohlkörper, deren sämmtliche Dimensionen verschwindend klein gegen die Wellenlänge sind, und die mit einer oder mehreren Oeffnungen versehen sind, deren Flächeninhalt sehr klein gegen die ganze Oberfläche des Hohlraumes ist. Da solche Hohlkörper mit kleinen Oeffnungen beim Anblasen oder durch Resonanz sehr tiefe Töne geben, so ist die erstere Bedingung für diese ihre tiefsten Töne immer erfüllt.

Wenn Ψ das Geschwindigkeitspotential im Innern des überall begrenzten Raumes S darstellt, der keine tönenden Punkte enthalten soll, und der Punkt α, β, γ, von welchem ab die Entfernung r gerechnet wird, innerhalb der Raumes S liegt, so ist nach (7b):

$$\int \frac{\sin kr}{r}\frac{d\Psi}{dn}\,d\omega = \int \Psi \frac{d}{dn}\left(\frac{\sin kr}{r}\right) d\omega.$$

Wenn nun alle Dimensionen des Raumes S gegen die Wellenlänge verschwindend klein sind, so können wir kr gegen 1 vernachlässigen, so oft r, wie hier der Fall ist, die Entfernung zweier Punkte, die innerhalb S gelegen sind, bezeichnet. Wir setzen also:

$$\frac{\sin kr}{r} = k - \frac{k^3 r^2}{2.3}.$$

Dies in die obige Gleichung eingeführt giebt: 64

$$\int \frac{d\Psi}{dn} d\omega = \frac{k^2}{2.3} \int \frac{d\Psi}{dn} r^2 d\omega - \frac{k^2}{3} \int \Psi r \frac{dr}{dn} d\omega. \tag{28}$$

Nehmen wir jetzt an der Raum S sei von einer festen Wand umgeben, in der nur eine oder einige Oeffnungen seien, an der festen Begrenzung sei überall $d\Psi / dn = 0$, in den sämmtlichen Oeffnungen aber habe $d\Psi / dn$ endliche positive Werthe. Das Verhältniss der Fläche sämmtlicher Oeffnungen zur ganzen Oberfläche des Raumes S sei $\eta^2 : 1$, und η eine verschwindend kleine Grösse, so ist das Integral $\int (d\Psi / dn)\, d\omega$ von derselben Ordnung kleiner Grössen wie η^2, das erste Integral rechts $(k^2 / 2.3) \int (d\Psi / dn)\, r^2\, d\omega$ aber von der Ordnung $k^2 r^2 \eta^2$, also zu vernachlässigen. Lassen wir nun k immer mehr sich der Null nähern, so muss dabei offenbar das Integral $\int \Psi r\, (dr / dn)\, d\omega$ und also auch die Function Ψ selbst immer grösser und grösser werden. Bezeichnen wir $k^2\, \Psi$ mit χ, so würde χ eine Function sein, die bei abnehmendem k von constanter Grössenordnung bleibt, und in eine Function übergeht, welche der Differentialgleichung $\nabla \chi = 0$ in ganzer Ausdehnung des Raumes S genügt, und für welche an der ganzen Oberfläche des Raumes S $d\chi / dn = 0$. Daraus folgt nach den bekannten Sätzen über elektrische Potentialfunctionen, dass χ im ganzen Raume S constant sein müsse.

Dem entsprechend wollen wir nun zeigen, dass, wenn die Dimensionen des Raumes S überall endlich sind, d. h. wenn man den Raum S nicht durch eine unendlich kleine Schnittfläche in zwei Theile von endlicher Grösse zerlegen kann, dass dann Ψ höchstens in unendlich kleinen Theilen des Raumes S von der Ordnung η^2 sich um endliche Theile seiner Grösse von einer Constanten C unterscheiden könne. Wenn Ψ und

seine ersten Differentialquotienten nämlich, wie es hier sein soll, innerhalb S überall continuirlich und eindeutig sind, so ist, wie bekannt:

$$\iiint\left[\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2\right]dx\,dy\,dz$$
$$=-\int\Psi\frac{d\Psi}{dn}d\omega-\iiint\Psi\nabla\Psi\,dx\,dy\,dz,$$

wo die dreifachen Integrale über den ganzen Raum S auszudehnen sind. Berücksichtigt man, dass $k^2\Psi+\nabla\Psi=0$, und denkt man sich weiter beide Seiten der Gleichung mit einer constanten Grösse ε^2 multiplicirt, die so gewählt sein soll, dass
65 $\varepsilon^2\Psi$ eine endliche Grösse ist, wozu nach Gleichung (28) ε^2 von gleicher Ordnung mit $k^2 r/\eta^2$ sein muss, so erhält man:

$$\varepsilon^2\iiint\left[\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2\right]dx\,dy\,dz \tag{28a}$$
$$=-\varepsilon^2\int\Psi\frac{d\Psi}{dn}d\omega+k^2\varepsilon^2\iiint\Psi^2\,dx\,dy\,dz.$$

Da nun die Integrale auf der rechten Seite dieser Gleichung verschwindend klein von der Ordnung η^2 sind, so ist es auch das dreifache Integral links. Da hier unter dem Integralzeichen eine überall positive Grösse steht, so können die Werthe von $\varepsilon\, d\Psi/dx$, $\varepsilon\, d\Psi/dy$ und $\varepsilon\, d\Psi/dz$ im allgemeinen selbst nur von derselben Ordnung kleiner Grössen wie η sein, oder wenigstens nur in Theilen des Raumes S, welche selbst von der Ordnung η^2 sind, endlich werden.

Nun denke man die Flächen construirt, welche der Gleichung:

$$\Psi=\text{Const.}$$

entsprechen, und für den Theil des Raumes S, welcher zwischen zwei beliebigen solchen Flächen liegt, bilde man das Integral:

$$\varepsilon\iiint\sqrt{\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2}\,dx\,dy\,dz=\Xi. \tag{28b}$$

Nach dem Vorausgesagten kann dies Integral nur von derselben Ordnung kleiner Grössen wie η sein. Man kann nun die Integration so ausführen, dass man zuerst diejenigen Theile des Integrals zusammennimmt, welche zwischen zwei unendlich

nahen Potentialflächen liegen. Es sei $d\omega$ ein Flächenelement einer solchen Fläche, in der das Potential den Werth Ψ hat, dn die Entfernung zwischen $d\omega$ und der nächsten Fläche, an der der Werth des Potentials $\Psi + d\Psi$ ist, dann ist $d\omega\, dn$ ein Element des Volumens und:

$$\sqrt{\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2}\, d\omega\, dn = d\Psi\, d\omega,$$

also:

$$\Xi = \varepsilon \int_{\Psi_0}^{\Psi_1} d\Psi \int d\omega,$$

wenn Ψ_0 und Ψ_1 die Werthe von Ψ an den äussersten Potentialflächen sind, zwischen denen man integrirt. Für jeden Werth von Ψ ist nun $\int d\omega$ gleich dem Flächeninhalt Q des- 66
jenigen Theiles der betreffenden Potentialfläche, der innerhalb des Raumes S liegt. Also wird:

$$\Xi = \varepsilon \int_{\Psi_0}^{\Psi_1} Q\, d\Psi,$$

worin Q als Function des Werthes von Ψ anzusehen ist. Wenn nun Q überall endlich ist, darf die Differenz $\varepsilon\Psi_0 - \varepsilon\Psi_1$, innerhalb deren die Variable sich ändert, nur von der Ordnung η sein, da der Werth von Ξ von der Ordnung η ist. Oder es muss, wenn $\varepsilon\Psi_0 - \varepsilon\Psi_1$ endlich ist, innerhalb dieses Intervalles Q von der Ordnung η sein. Da nun nach unserer Voraussetzung der Raum S nicht eine solche Gestalt haben darf, dass man ihn durch eine unendlich kleine Schnittfläche in zwei Theile von endlichem Volumen theilen kann, wie das z. B. der Fall sein würde, wenn er aus zwei durch ein röhrenförmiges Stück verbundenen Hohlräumen bestände, so folgt aus dem Gesagten, dass nur in unendlich kleinen Theilen desselben, und namentlich auch nur in unendlich kleinen Theilen seiner Oberfläche, der Werth von $\varepsilon\Psi$ um eine endliche Grösse von einem constanten Werthe C abweichen könne.

Nach diesen Bemerkungen reducirt sich die Gleichung (28) auf:

$$\int \frac{d\Psi}{dn}\, d\omega = -\frac{k^2 C}{3} \int r \frac{dr}{dn}\, d\omega = k^2 CS. \qquad (28\text{c})$$

Wenn wir nämlich die vom Punkte α, β, γ auf die Tangentialebene von $d\omega$ gefällte Normale n nennen, ist $dr/dn = -n/r$, und $-\frac{1}{3}r(dr/dn)\,d\omega = n d\omega/3$ gleich dem Volumen eines Kegels, dessen Grundfläche $d\omega$ und dessen Spitze α, β, γ ist. Desshalb ist:

$$-\frac{1}{3}\int r\frac{dr}{dn}\,d\omega = S.$$

Setzen wir jetzt voraus, der Raum S habe eine Oeffnung, die in einem nahehin ebenen Theile der Wand gelegen sei, dessen Ebene wir äusserlich unendlich verlängert und den freien Raum nach einer Seite begrenzend voraussetzen, wählen wir wie früher diese Ebene als Ebene der yz und verlegen den Anfangspunkt der Coordinaten in die Oeffnung selbst. Nehmen wir ferner an, dass die Vibrationen des Hohlraumes erregt werden durch einen Schallwellenzug, der gegen die Oeffnung schlägt. Wir müssen nun an der Oeffnung den Werth von Ψ so bestimmen, dass er aussen und innen continuirlich
67 wird und im Innern in einer gegen die Dimensionen der Oeffnung grossen Entfernung in den constanten Werth $C\cos(2\pi nt)$ übergeht.

Es sei h eine Grösse, welche in verschiedenen Punkten der Oeffnung des Hohlraums verschiedene Werthe hat. Wir setzen, indem wir die Integration über die Fläche der Oeffnung ausdehnen, für den freien Raum:

$$\Psi = \int h\frac{\cos(kr - 2\pi nt)}{r}\,d\omega + H\cos kx\cos(2\pi nt) \qquad (29)$$
$$+ J\cos kx\sin(2\pi nt).$$

Dieses Geschwindigkeitspotential stellt einen Zug ebener Wellen dar, die an der yz-Ebene reflectirt sich in stehende verwandeln, und ein System fortschreitender Wellen, welche von der Oeffnung ausgehen. Statt der unendlich ausgedehnten ebenen Wellen lässt sich übrigens ebenso gut die etwas allgemeinere Voraussetzung der Gleichung (16) hier anwenden, dass nämlich die Wellen von einem weit von der Oeffnung entfernten tönenden Punkte ausgehen, dann bekommen sie, wie dort gezeigt, dicht vor der Oeffnung die in (29) angenommene Form.

An der yz-Ebene ist ausserhalb der Oeffnung $d\Psi/dx = 0$, in der Oeffnung:

$$\frac{d\overline{\Psi}}{dx} = -2\pi h \cos(2\pi nt) \tag{29a}$$

und annähernd:

$$\overline{\Psi} = \left[\int \frac{h}{r}\, d\omega + H\right] \cos(2\pi nt) + \left[k \int h\, d\omega + J\right] \sin(2\pi nt). \tag{29b}$$

Innerhalb des Raumes S setzen wir dagegen:

$$\Psi = \left[C - \int \frac{h \cos kr}{r}\, d\omega\right] \cos(2\pi nt). \tag{29c}$$

Dann ist in der Oeffnung:

$$\frac{d\overline{\Psi}}{dx} = -2\pi h \cos(2\pi nt), \tag{29d}$$

$$\overline{\Psi} = \left[C - \int \frac{h\, d\omega}{r}\right] \cos(2\pi nt). \tag{29e}$$

Die Werthe von $d\overline{\Psi}/dx$ aus (29a) und (29d) sind identisch. Damit auch die von $\overline{\Psi}$ aus (29b) und (29e) identisch seien, muss sein:

$$J + k \int h\, d\omega = 0, \tag{29f}$$

$$C - H = 2 \int \frac{h\, d\omega}{r}. \tag{29g}$$

Es muss also die Grösse h für die einzelnen Punkte der Oeff- 68
nung so bestimmt werden, dass ihre Potentialfunction innerhalb der Oeffnung constant wird. Die Bedingung endlich, dass $d\Psi/dn = 0$ ist längs der Oberfläche von S mit Ausnahme der Mündung, wird durch die Gleichung (29c) erfüllt, wenn die Wand, in der die Oeffnung sich befindet, so weit merklich eben ist, als das Potential von h nicht gegen C verschwindet.

Endlich wird für diesen Fall die Gleichung (28c):

$$2\pi \int h\, d\omega = k^2 CS. \tag{29h}$$

Aus (29f) und (29h) folgt:

$$J = -\frac{k^3 CS}{2\pi}. \tag{29i}$$

Nennen wir nun M die Masse, welche nöthig ist, um, auf der

Fläche der Oeffnung passend vertheilt, in dieser die Potentialfunction constant gleich 1 zu machen, so ist:

$$\int h\,d\omega = \tfrac{1}{2}\,(C - H)\,M, \tag{29k}$$

da die Dichtigkeit h nach (29g) den Potentialwerth $\frac{1}{2}(C - H)$ hervorbringt. Wir haben also nach (29f):

$$J + \tfrac{1}{2}\,k\,(C - H)\,M = 0. \tag{29l}$$

Das Maximum des Potentials der stehenden Wellen im freien Raume ist $\sqrt{H^2 + J^2}$, das Maximum in dem Hohlkörper S ist C. Aus (29i) und (29l) folgt:

$$\frac{H^2 + J^2}{C^2} = \left(1 - \frac{k^2 S}{\pi M}\right)^2 + \left(\frac{k^3 S}{2\pi}\right)^2.$$

Dieses Verhältniss erreicht seinen Minimalwerth, die Resonanz wird also am stärksten, wenn das erste der beiden Quadrate, gegen welches im allgemeinen das zweite verschwindend klein ist, gleich Null wird. Die Bedingung für das Maximum der Resonanz ist also:

$$\pi M = k^2\,S, \tag{30}$$

oder wenn wir statt k seinen Werth setzen durch die Schwingungszahl n und die Schallgeschwindigkeit a ausgedrückt:

$$k = \frac{2\pi n}{a}. \tag{3a}$$

69 so ist:

$$n^2 = \frac{a^2 M}{4\pi S}. \tag{30a}$$

Ist die Oeffnung kreisförmig, so ist (s. (23b) und (23c)):

$$M = \frac{2R}{\pi},$$

oder, wenn wir die Fläche der Oeffnung mit s bezeichnen:

$$s = \pi R^2, \qquad M = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{s}{\pi}},$$

$$n = \frac{a\sqrt[4]{s}}{\sqrt{2}\,\sqrt[4]{\pi^5}\,\sqrt{S}}.$$

Wenn wir für die Schallgeschwindigkeit den Werth 332 290 mm (entsprechend 0° und trockner Luft) nehmen, so wird:

$$n = 56174 \frac{\sqrt[4]{s}}{\sqrt{S}}, \quad \frac{\text{Mm.}}{\text{Secd.}}$$

während Sondhauss aus seinen Versuchen für n die empirische Formel für kreisförmige und quadratische Oeffnungen herleitet:

$$n = 52400 \frac{\sqrt[4]{s}}{\sqrt{S}}, \quad \frac{\text{Mm.}}{\text{Secd.}}$$

worin nur der von Sondhauss gegebene Zahlencoëfficient halbirt ist, weil Sondhauss nach der Art der französischen Physiker die Schwingungszahlen der Töne doppelt so hoch nimmt, als es nach unserer Bezeichnungsweise geschieht.

Noch besser stimmt die Berechnung für einige Versuche von Wertheim, bei denen das Verhältniss der Oeffnung zum Volumen des Hohlkörpers noch kleiner ist, als bei den Versuchen von Sondhauss. Ich habe aus den Versuchen, welche er mit drei verschiedenen Glaskugeln angestellt hat[1]), deren Volumen durch Eingiessen von Wasser verkleinert wurde, diejenigen nach der theoretischen Formel berechnet, bei welchen der Durchmesser der Oeffnung weniger als $\frac{1}{10}$ des Durchmessers einer Kugel war, deren Volumen dem des Hohlraumes gleich ist, und setze die Zahlen hierher, um zu zeigen, wie gut die theoretische Formel mit den Versuchen übereinstimmt. (Siehe umstehende Tabelle.)

Zur Erleichterung der Vergleichung sind in der letzten Rubrik unter $\triangle$ die Logarithmen des berechneten n dividirt durch das beobachtete n hinzugefügt. Der Logarithmus des halben Tones $\frac{16}{15}$ beträgt 0,028. Die Werthe von $\triangle$ zeigen, dass nur bei den verhältnissmässig zur Oeffnung kleineren Werthen des Volumens die Differenz zwischen Rechnung und Beobachtung sich einem halben Tone nähert.

1) Annales de Chimie et de Physique Sér. 3, Tome XXXI, p. 428.

70

	Durchmesser der Oeffnung.	Volumen des Hohlraumes in Ccm.	2*n* beobachtet	2*n* berechnet	Δ
Erste Kugel.	20 mm	6528	184,2	193,1	0,020
Volumen 6528 cc.		5712	206,4	206,4	0,000
Temperatur 24°.		4896	218,8	222,9	0,008
$a = 3\;46\,550$ mm.		4080	232,9	244,2	0,021
	10 mm	2030	234,9	242,3	0,013
		1827	262,6	255,5	– 0,012
		1624	285,1	270,9	– 0,022
Zweite Kugel.		1421	300,5	290,3	– 0,015
Volumen 2030 cc.		1218	320,0	312,9	– 0,010
Temperatur 18°.		1015	345,0	342,7	– 0,003
$a = 3\;43\,030$ mm.		812	372,6	383,2	+ 0,008
		609	416,3	442,5	0,026
	15 mm	2030	286,0	296,8	0,016
		1827	298,7	322,8	0,020
	6 mm	715	328,2	317,4	– 0,015
		615	340,4	342,2	+ 0,002
		515	373,7	374,0	0,000
Dritte Kugel.		415	416,3	416,6	0,000
Volumen 715 cc.		315	481,2	478,2	– 0,003
Temperatur 20°.		215	581,8	578,8	– 0,002
$a = 3\;44\,210$ mm.		115	766,5	791,4	+ 0,014
	10 mm	715	384,4	409,7	0,028
		615	411,6	441,8	0,031

Für Ellipsen von der Excentricität ε und der grossen Axe R ist die Masse M, welche, auf der Fläche passend vertheilt, in dieser das constante Potential 1 giebt[1]),

71

$$M = \frac{R}{K_\prime},$$

worin $K_\prime$ das ganze elliptische Integral erster Gattung für den Modul ε bezeichnet. Es wird also nach (30a.) für Hohlräume mit einer elliptischen Oeffnung:

$$n^2 = \frac{a^2 R}{4\pi K S},$$

1) S. Clausius in Poggendorff's Annalen LXXXVI S. 161.

oder wenn man den Flächeninhalt s der elliptischen Oeffnung einführt und setzt:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{1 - \varepsilon^2},$$
$$s = \pi R^2 \varepsilon_1,$$

so wird:

$$n = \sqrt{\frac{\pi}{2K\sqrt{\varepsilon_1}}} \cdot \frac{a\sqrt[4]{s}}{\sqrt[4]{\pi^5}\sqrt{2S}} \cdot$$

Der Werth von n^2 ist also von dem für eine kreisförmige Oeffnung gültigen durch den Factor $\pi / 2K\sqrt{\varepsilon_1}$ verschieden, und da dieser Factor grösser ist als 1, so wird der Ton einer elliptischen Oeffnung von gleicher Fläche etwas höher als der einer kreisförmigen.

Hat der Hohlraum noch eine zweite Oeffnung, die ebenfalls in einem nahin ebenen Theile der Wand liegt, so setze man für den äusseren vor ihr liegenden Raum:

$$\Psi = \int h_1 \frac{\cos(kr - 2\pi nt + \tau)}{r} d\omega,$$

in dem ihr benachbarten Theile des innerren Raumes:

$$\Psi = \left[C_1 - \int \frac{h_1 \cos kr}{r} d\omega\right] \cos(2\pi nt - \tau) + k\int h_1 d\omega . \sin(2\pi nt - \tau).$$

Es sind wie vorher an der Oeffnung die Werthe von $d\Psi / dn$ übereinstimmend, die Werthe von $\overline{\Psi}$ werden:

$$\overline{\Psi} = \int \frac{h_1 d\omega}{r} \cdot \cos(2\pi nt - \tau) + k\int h_1 d\omega \sin(2\pi nt - \tau),$$

$$\overline{\Psi} = \left[C_1 - \int \frac{h_1 d\omega}{r}\right] \cos(2\pi nt - \tau) + k\int h_1 d\omega \sin(2\pi nt - \tau).$$

Es muss also sein:

$$C_1 = 2\int \frac{h_1 d\omega}{dr},$$

und setzen wir wie bei der ersten Oeffnung in (29k): 72

$$\int h_1 d\omega = \tfrac{1}{2} C_1 M_1,$$

so wird in den von der Oeffnung entfernteren Stellen des inneren Raumes:

$$\Psi = C_1 \cos(2\pi nt - \tau) + \tfrac{1}{2} k C_1 M_1 \sin(2\pi nt - \tau).$$

Dies muss aber gleich werden dem früher festgesetzten Werthe von Ψ^i im Innern der Kugel:

$$\Psi^i = C \cos(2\pi nt).$$

Daraus folgt, dass:

$$C_1 [\cos\tau - \tfrac{1}{2} k M_1 \sin\tau] = C,$$
$$\sin\tau + \tfrac{1}{2} k M_1 \cos\tau = 0.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt, dass τ sehr klein ist, und demgemäss aus der ersten, dass mit Vernachlässigung kleiner Grössen:

$$C = C_1.$$

Nun wird aus Gleichung (28c):

$$\int \frac{d\Psi^i}{dn} d\omega = 2\pi \int h\, d\omega + 2\pi \int h_1\, d\omega = k^2 CS$$

oder:

$$\pi M(C - H) + \pi M_1 C = k^2 CS, \tag{31}$$

dazu:

$$J = -\frac{k^3 CS}{2\pi},$$

$$\frac{H^2 + J^2}{C^2} = \frac{[\pi(M + M_1) - k^2 S]^2}{\pi^2 M^2} + \frac{k^3 S}{2\pi} \tag{31a}$$

Damit $(H^2 + J^2)/C^2$ ein Minimum werde, und die stärkste Resonanz eintrete, setzen wir:

$$\pi(M + M_1) = k^2 S, \tag{31b}$$

durch welche Gleichung die Tonhöhe der stärksten Resonanz bestimmt ist, wie es in (30) für eine Oeffnung geschehen war. Diese Gleichung stimmt, wenn die Oeffnungen geometrisch ähnlich sind, mit dem von Sondhauss aus den Versuchen abgeleiteten Gesetze. Sind beide Oeffnungen congruent, so verhält sich die Schwingungszahl des Körpers zu der desselben Körpers mit einer Oeffnung, wie $\sqrt{2}:1$. Der Ton ist also im ersten Falle um eine verminderte Quinte höher als im zweiten Falle, was genau mit einigen Versuchen von Sondhauss[1]) übereinstimmt.

Heidelberg, im März 1859.

1) Poggendorff's Annalen LXXXI S. 366.

XVII.

Ueber den Einfluss der Reibung in der Luft auf die Schallbewegung.

Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg. Bd. III. S. 16—20. Sitzung vom 27. Februar 1863. — Heidelberger Jahrbücher der Litteratur. 1863. Nr. 17.

Der Vortragende hat in einer früheren Arbeit die mathe- 257
matische Theorie der Schallschwingungen in cylindrischen Röhren gegeben. Er hat damals gezeigt, warum ein Unterschied zwischen der wirklichen Länge der Orgelpfeifen und ihrer nach der älteren Theorie berechneten Länge existiren muss. Der Grund war darin zu suchen, dass an einem offenen Ende einer solchen Röhre die ebenen Schallwellen des Innern nicht plötzlich in die kugeligen Wellen des freien Raumes übergehen können, und sich daher noch etwas über die Mündung der Röhre hinaus ausbreiten. Die Theorie erlaubte für einzelne Gestalten der Röhrenmündungen diesen Unterschied der wahren und reducirten Länge zu berechnen. Bei cylindrischen Röhren vom Radius R, deren kreisförmige Oeffnung in einer weit ausgedehnten ebenen Platte liegt, fand er sich gleich $\pi R / 4$.

Es wurden durch diese Untersuchung die auffallendsten Unterschiede zwischen der Theorie und der Erfahrung zwar beseitigt, indessen konnte man nicht sagen, dass die Uebereinstimmung dadurch eine vollständig genaue geworden wäre. Namentlich zeigten die Versuche von Zamminer, dass der Unterschied zwischen der wahren und reducirten Länge bei engen Röhren merklich grösser war, als die Theorie erwarten

liess, und gerade bei solchen hätte man die beste Uebereinstimmung erwarten dürfen.

Der Vortragende hat nun gefunden, dass die Uebereinstimmung viel vollständiger wird, wenn man die Reibung in der Luft mit in Rechnung zieht, sich dabei stützend auf die theoretischen Untersuchungen und die Bestimmung der Reibungsconstante von Stokes.

Der erste Theil der Untersuchung bezog sich auf die Fortpflanzung kugeliger oder ebener Wellen in unendlich ausgedehnten, mit Luft gefüllten Räumen. Es zeigt sich, dass
258 die Reibung dabei die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls der Theorie nach zwar etwas vermindern müsse, aber in einer praktisch ganz unerheblichen Weise. Ausserdem hat die Reibung zur Folge, dass die Schallwellen, indem sie fortlaufen, etwas an Intensität abnehmen. Der Ausdruck für ihre Intensität findet sich nämlich näherungsweise mit dem Factor:

$$e^{-\frac{4\pi^2 n^2 k^2 z}{a.a.a}}$$

multiplicirt, worin n die Schwingungszahl, a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, z die Länge des Weges und k die Reibungsconstante bezeichnet, welche nach Stokes gleich 2,946 mm ist, wenn man die Secunde als Zeiteinheit benutzt.[1])

Jener Ausdruck lässt erkennen, dass die Abnahme desto bedeutender ist, je grösser n, also je höher der Ton ist. Bei den Tönen der gewöhnlichen musikalischen Scala ist jene Abnahme äusserst unbedeutend, bei sehr hohen Tönen kann sie aber sehr merklich werden. Wenn man berechnet, wie weit sich ein Zug ebener Schallwellen fortpflanzen muss, ehe seine Intensität durch Reibung auf die Hälfte vermindert wird, so findet man:

Ton	Schwingungszahl	Weglänge in Metern
a_1	440	383545
a_5	7040	1498
d_8	38016	52,7
a_{11}	450560	0,365

1) (1881) Es ist die auf S. 196 und 225 dieser Sammlung gebrauchte Bezeichnungsweise hier benutzt, und keine Reibung bei Condensation oder Dilatation des Volumens angenommen. Kommt letztere hinzu, wie in den auf S. 159 gebrauchten Gleichungen, so ist k^2 noch mit 4/3 zu multipliciren.

Darin ist a_1 das gewöhnlich bei der Stimmung der Instrumente gebrauchte eingestrichene a, a_5 der höchste Ton der Pianofortes, d_8 der höchste Ton, der bisher erreicht worden ist bei Despretz's Versuchen mit kleinen Stimmgabeln. Man sieht, dass eine merkliche Abnahme des letzteren schon eintreten könnte bei einer nicht übermässig grossen Weglänge. Dagegen würden noch höhere Töne, wenn sie sich auch hervorbringen liessen, unfähig sein sich durch längere Luftstrecken fortzupflanzen. Das a_{11} der Tabelle würde nach einem Wege von 1 Fuss schon fast auch die Hälfte reducirt sein.

Es ist dieser Umstand wichtig, weil er eine obere Grenze für die Höhe physikalisch möglicher Töne anzeigt.

Der zweite Theil meiner Untersuchung betrifft die Fortpflanzung ebener Wellen in cylindrischen Röhren. Hierbei zeigt sich, dass sowohl die Abnahme der Intensität als auch namentlich die Verzögerung der Fortpflanzung in solchen Röhren wegen der Reibung an den Wänden viel bedeutender werden, als bei der Fortpflanzung im freien Raume. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einer cylindrischen Röhre vom 259
Radius R ist mit Beibehaltung der oben gebrauchten Bezeichnungen:

$$a\left[1 - \frac{k}{2R\sqrt{\pi n}}\right].$$

Der Coëfficient, welcher die Abnahme der Intensität anzeigt, ist:

$$e^{-\frac{2kz\sqrt{\pi n}}{aR}}.$$

Wegen der verminderten Fortpflanzunggeschwindigkeit müssen Orgelpfeifen ebenfalls kürzer gemacht werden, als die ältere Theorie verlangt, und zwar ist der Unterschied bei engeren Röhren gar nicht unbedeutend. Die Rechnung ergab für einige der von Zamminer gebrauchten Röhren folgende Correctionen; wobei die Längen in Millimetern gegeben sind:

Röhren-		Verkürzung wegen Reibung, wenn	
Länge	Durchmesser	offen	gedeckt
522	25	4	5,4
207,6	10	2,4	3,4
229	59	0,5	

Man sieht, dass bei den engeren Röhren die Verkürzung zum Theil über ein Procent der ganzen Länge beträgt, während sie bei den weiteren Röhren fast unmerklich ist.

Was die Stärke der Resonanz in solchen Röhren betrifft, wenn ein schwingender fester Körper ihrer Mündung genähert wird, so habe ich in meiner früheren Untersuchung bei Vernachlässigung der Reibung mit der Erfahrung übereinstimmend gefunden, dass die Resonanz einer an beiden Seiten offenen Röhre am stärksten ist, wenn ihre reducirte Länge einer geraden Anzahl von Viertelwellenlängen gleich ist. Aber in Bezug auf den Einfluss der Weite der Röhre widersprach die Theorie der Erfahrung. Der Theorie nach hätte die Resonanz desto stärker sein sollen, je enger die Röhre, weil die Reflexion der Wellen an den offenen Enden desto vollständiger ist, je enger diese sind. Dagegen zeigte die Erfahrung, das enge Röhren namentlich für tiefe Töne schlecht resoniren. Wenn man die Reibung der Luft berücksichtigt, erklärt sich dieser Unterschied. In engen Röhren erlöschen die Schallwellen bald, wenn sie oft hin und her reflectirt werden, wegen der starken Reibung an den nahen Wänden. Es giebt daher eine gewisse mittlere Weite, bei welcher die Resonanz am stärksten ist.
260 Die Theorie ergiebt für die vortheilhafteste Weite, wenn m bezeichnet, wie viel Schwingungen des angegebenen Tons auf eine Schwingung des Grundtons der Röhre kommen, und λ die Wellenlänge:

$$R^3 = \frac{m k \lambda^2 \sqrt{\lambda}}{16 \pi \sqrt{\pi a}}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass wir den Radius R der Röhre kleiner machen müssen für höhere Töne, sowohl wenn wir m unverändert lassen, also die Röhre im Verhältniss der abnehmenden Wellenlänge verkürzen, als auch, wenn wir die Röhrenlänge, welche gleich $m\lambda/4$ oder $m\lambda/2$ ist, unverändert lassen, und einen höheren Oberton derselben hervorrufen. Im letzteren Falle müsste R^2 in demselben Verhältnisse abnehmen wie λ.

Obgleich wir den mechanischen Vorgang beim Anblasen der Röhren noch nicht genau zergliedern können, so zeigt sich doch allgemein, dass das Anblasen diejenigen Töne hervor-

bringt, welche in der Röhre die stärkste Resonanz finden. Das bestätigt sich auch für den Einfluss der Weite. Die obige Gleichung giebt nämlich ziemlich genau die Höhe der Töne an, welche in Röhren von gegebenem Radius und Länge am leichtesten ansprechen.

Am überraschendsten ist aber die Uebereinstimmung mit der von dem berühmtesten Orgelbauer des vorigen Jahrhunderts, Silbermann, gegebenen Regel, dass man, um Register von gleichmässiger Klangfarbe zu erhalten, die Weite der Pfeiffen bei abnehmender Länge so abnehmen lassen müssen, dass die None den halben Durchmesser bekomme. Gleichbleibende Klangfarbe bedeutet gleichbleibende relative Stärke der Obertöne. Soll $R = 1/2$ werden, bei gleichbleibend guter Resonanz, so zeigt unsere Formel, dass werden müsse:

$$\lambda = \left(\frac{1}{2}\right)^{6/5} = 0{,}435,$$

während für die None $\lambda = 0{,}444$.

Wir erhalten also durch die Berücksichtigung der Reibung auch die Erklärung für den Umstand, dass eine gewisse Weite für die Pfeifen nöthig ist, und dass engere Pfeifen leichter höhere Töne ansprechen lassen, weitere tiefe, eine Thatsache, für welche bisher noch jede Erklärung fehlte.

XVIII.

Zur Theorie der Zungenpfeifen.

Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg vom 26. Juli 1861. Bd. II S. 159—164. — Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie. Bd. 114 S. 321—327.

---

321 Unter Zungenpfeifen verstehe ich alle solche Blasinstrumente, in denen dem Luftstrom der Weg durch einen schwingenden elastischen Körper bald geöffnet, bald verschlossen wird. Die erste Arbeit, welche die Mechanik der Zungenpfeifen verständlich machte, war die von W. Weber. Er experimentirte aber hauptsächlich mit metallenen Zungen, die wegen ihrer grossen Masse und Elasticität nur dann von der Luft kräftig bewegt werden, wenn sich der von der Pfeife angegebene Ton nicht zu sehr von dem Eigenton der freien Zunge unterscheidet. Daher sind die Pfeifen mit metallenen Zungen in der Regel nur fähig einen einzigen Ton anzugeben, nämlich nur denjenigen unter den theoretisch möglichen Tönen, welcher dem eigenen Tone der Zunge am nächsten liegt.

Anders verhält es sich mit Zungen von leichtem, wenig Widerstand leistendem Material, wie es die Rohrzungen der Clarinette, Oboe, des Fagotts, die menschlichen Lippen in den Trompeten, Posaunen, Hörnern sind. Sehr geeignet für die Versuche sind auch membranöse Zungen aus vulkanisirtem Kautschuk, ähnlich den Stimmbändern des Kehlkopfes gestellt; nur muss man sie, damit sie leicht und gut ansprechen, schräg gegen den Luftstrom stellen.

Die Wirkung der Zungen ist wesentlich verschieden, je
322 nachdem die von ihnen geschlossene Oeffnung sich öffnet, wenn

sich die Zunge dem Winde entgegen nach der Windlade zu bewegt, oder wenn sie sich mit ihm gegen das Ansatzrohr bewegt. Die ersteren nenne ich einschlagende Zungen, die letzteren ausschlagende. Die Zungen der Clarinette, Oboe, des Fagotts, der Zungenwerke der Orgel sind alle einschlagende Zungen. Die menschlichen Lippen in den Blechinstrumenten repräsentiren dagegen ausschlagende Zungen. Die von mir gebrauchten Kautschukzungen kann man einschlagend und ausschlagend stellen.

Die Gesetze für die Tonhöhe der Zungenpfeifen ergeben sich vollständig, wenn man die Bewegung der Zunge unter dem Einflusse des periodisch wechselnden Luftdruckes im Ansatzrohr und Windrohr bestimmt, und berücksichtigt, dass das Maximum des Ausströmens der Luftmenge nur erreicht werden kann, wenn die von der Zunge gedeckte Oeffnung ihre grösste Weite erreicht hat.

1) Zungen mit cylindrischem Ansatzrohr ohne Windrohr. Die Zunge wird betrachtet als ein Körper, der durch elastische Kräfte in seine Gewichtslage zurückgeführt wird, und durch den, wie der Sinus der Zeit periodisch wechselnden, Druck im Ansatzrohre wieder daraus entfernt wird. Die Bewegungsgleichungen[1]) zeigen, dass der Augenblick stärksten Druckes in der Tiefe des Ansatzrohres fallen muss zwischen eine grösste Elongation der Zunge nach aussen, die ihm voraufgeht, und eine grösste Elongation nach innen, welche nachfolgt, und wenn man sich die Schwingungsdauer gleich der Peripherie eines Kreises in 360 Grade abgetheilt denkt, ist der Winkel ε, um welchen das Maximum des Druckes nach dem Durchgange der Zunge durch ihre Mittellage eintritt, gegeben durch die Gleichung:

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{L^2 - \lambda^2}{\beta^2 L^2 \lambda},$$

wo L die Wellenlänge des Tones der freien Zunge in der Luft bezeichnet, λ die des wirklich eingetretenen Tones und β^2 eine Constante ist, welche bei Zungen von leichtem Material 323

1) Aehnlich zu behandeln wie Seebeck's Theorie des Mittönens. Repertorium der Physik. VIII. 60—64.

und grösserer Reibung grösser ist als bei schwerem nnd vollkommen elastischem Material. Der Winkel ε ist zu nehmen zwischen -90^0 und $+90^0$.

In derselben Weise muss nun bestimmt werden die Zeit, um welche der grösste Druck in der Tiefe des Ansatzrohres abweicht von der grössten Geschwindigkeit, welche letztere wieder zusammenfallen muss mit derjenigen Stellung der Zunge, wo die Oeffnung am weitesten ist. Die Berechnung dieser Grösse ergiebt sich aus meinen Untersuchungen über die Luftbewegung im Innern eines offenen cylindrischen Rohres.[1] Das Maximum der nach der Oeffnung gerichteten Geschwindigkeit geht dem Maximum des Druckes voraus um einen Winkel δ (die Schwingungsdauer als Peripherie eines Kreises betrachtet), der gegeben ist durch die Gleichung:

$$\text{tang}\ \delta = \frac{-\lambda^2}{4\pi Q} \sin\left[\frac{4\pi(l+a)}{\lambda}\right],$$

worin Q den Querschnitt, l die Länge des Ansatzrohres bezeichnet und a eine von der Form der Oeffnung abhängige Constante, welche bei cylindrischen Röhren vom Radius ϱ ist, gleich $\pi/4\ \varrho$ ist. Der Winkel δ ist wieder zwischen -90^0 und $+90^0$ zu nehmen.

Da nun Luft in das Ende des Ansatzrohres nur eintreten kann, wenn die Zunge geöffnet ist, so muss bei einschlagenden Zungen das Maximum der nach aussen gerichteten Strömungsmenge der Luft zusammenfallen mit der grössten Elongation der Zunge nach innen; es muss also sein:

$$-\varepsilon = \delta + 90^0$$

und δ sowie ε müssen negativ sein.

Bei ausschlagenden Zungen dagegen muss das Maximum der Luftausströmung zusammenfallen mit der grössten Elongation der Zunge nach aussen, es muss sein:

$$90^0 = \delta + \varepsilon$$

und δ wie ε müssen positiv sein.

---

1) S. diese Sammlung S. 347 und 349, wo $\delta = \tau - \tau_1 + \pi/2$.

Beide Fälle vereinigen sich in der Gleichung: 324

$$\tan \varepsilon = \cot \delta$$

oder:

$$\sin \frac{4\pi(l+a)}{\lambda} = \frac{4\pi}{\lambda} Q\beta^2 \cdot \frac{L^2}{\lambda^2 - L^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

bei der die Zungen beziehlich einschlagen oder ausschlagen müssen, je nachdem die auf beiden Seiten der Gleichung 1 stehenden Grössen positiv oder negativ ausfallen.

Da Q und β^2 sehr kleine Grössen sind, kann $\sin[4\pi(l+a)/\lambda]$ nur in dem Falle einen erheblichen Werth annehmen, wenn $\lambda^2 - L^2$ sehr klein ist, also der Ton der Pfeife dem der freien Zunge nahe kommt, wie das bei den metallenen Zungen meist der Fall ist. Wenn aber der Unterschied beider Töne $\lambda - L$ gross ist, muss im Gegentheil $\sin[4\pi(l+a)/\lambda]$ sehr klein sein, also nahehin:

$$l + a = \mathfrak{a}\,\frac{\lambda}{4}$$

worin $\mathfrak{a}$ eine beliebige ganze Zahl bezeichnet.

Der Druckwechsel in der Tiefe des Ansatzrohres ist nun proportional $\sin[2\pi(l+a)/\lambda]$, also ein Maximum, wenn:

$$l + a = 2\mathfrak{a}\,\frac{\lambda}{4}$$

und ein Minimum, wenn:

$$l + a = (2\mathfrak{a} + 1)\,\frac{\lambda}{4}$$

Im ersten Fall ist die Kraft des Luftdruckes nicht ausreichend, um die Zunge zu bewegen, im zweiten Falle genügt sie bei nicht zu schweren und widerstehenden Zungen. Daher sprechen gut an die Töne, bei welchen nahehin:

$$l + a = (2\mathfrak{a} + 1)\,\frac{\lambda}{4}$$

bei denen also die Luftsäule des Ansatzrohres wie die einer gedackten Pfeife schwingt. Gleichzeitig sieht man, dass diese Töne fast unabhängig sind von der eigenen Tonhöhe der Zunge.

Von dieser Art sind die Töne der Clarinette; auch mem- 325
branöse einschlagende Kautschukzungen an Glasröhren bis zu 16 Fuss Länge sprechen leicht an, und lassen verschiedene Obertöne hervorbringen, die der Gleichung 1 gut entsprechen. Ausschlagende Zungen müssen sehr tief gestimmt sein, um reine

Töne des Rohres zu geben, daher die menschlichen Lippen dazu geeignet sind, in denen die elastischen Faserzüge mit einer grossen Masse wässerigen unelastischen Gewebes belastet sind. Cylindrische Glasröhren können leicht wie Trompeten angeblasen werden und geben die Töne einer gedackten Pfeife. Von diesen sind die höheren, in denen die Differenz $L^2 - \lambda^2$ gross ist, fest anzugeben, und rein gestimmt, die unteren dagegen nicht ganz unabhängig vom Werthe von L, d. h. der Spannung und Dicke der Lippen, daher unsicher und veränderlich.

2) Zungen mit kegelförmigem Ansatzrohr ohne Windrohr. Es findet ein sehr merkwürdiger Unterschied statt zwischen cylindrischen und kegelförmigen Ansatzröhren. Die Luftbewegung im Innern der letzteren lässt sich nach denselben Grundsätzen bestimmen, welche ich für die cylindrischen Röhren gebraucht habe, indem man innerhalb des Rohres das Potential der Luftbewegung setzt gleich:

$$\frac{A}{r} \sin 2\pi \frac{(R - r + a)}{\lambda} + \frac{B}{r} \cos 2\pi \frac{(R - r)}{\lambda}$$

worin r der Abstand eines beliebigen Punktes von der Spitze des Kegels ist, R der Werth von r für die weite Mündung der Röhre. Man erhält, wenn man B/A vernachlässigt:

$$\operatorname{tang} \delta = - \frac{\lambda^2}{2\pi Q} \cdot \sin \frac{2\pi(l + a)}{\lambda}$$
$$+ \left[\cos \frac{2\pi(l + a)}{\lambda} + \frac{\lambda}{2\pi r} \sin \frac{2\pi(\lambda + a)}{\lambda} \right]$$

worin r auf den Ort der Zunge zu beziehen ist. Auch hier ist zu setzen:

$$\operatorname{cotang} \delta = \operatorname{tang} \varepsilon.$$

Es interessiren uns hier hauptsächlich die von dem Zungen-
326 ton stark abweichenden Töne der Pfeife, für welche also
$(L^2 - \lambda^2)$ gross, tang ε daher ebenfalls sehr gross ist, und tang δ sehr klein. Für diese muss also entweder nahehin sein:

$$\sin \frac{2\pi(l + a)}{\lambda} = 0$$

was aber keine Töne giebt, weil hierbei der Druckwechsel in der Tiefe des Ansatzrohres zu schwach ist, oder:

$$\operatorname{tang} \frac{2\pi(l+a)}{\lambda} = -\frac{2\pi r}{\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Diess ist die Gleichung für die kräftig ansprechenden höheren Töne der Röhre.

Ich gebe hier folgend die Reihe der aus Gleichung 2 berechneten Töne für eine kegelförmige Röhre aus Zink, welche folgende Maasse hatte:

Länge $l = 122,7$ ctm.
Durchmesser der Oeffnungen 5,5 und 0,7 ctm.
Reducirte Länge $l + a$, berechnet 124,77 ctm.

Ton	Wellenlänge berechnet	Länge der entsprechenden offenen Pfeife	Länge der entsprechenden gedackten Pfeife
1) H −	283,61	$= \frac{2}{1} \cdot 141,80$	$= \frac{4}{1} \cdot 70,90$
2) h −	139,83	$= \frac{2}{2} \cdot 139,84$	$= \frac{4}{3} \cdot 104,88$
3) fis_1	91,81	$= \frac{2}{3} \cdot 137,71$	$= \frac{4}{5} \cdot 114,76$
4) h_1 +	67,94	$= \frac{2}{4} \cdot 135,88$	$= \frac{4}{7} \cdot 118,89$
5) dis_2	53,76	$= \frac{2}{5} \cdot 134,39$	$= \frac{4}{9} \cdot 120,95$
6) g_2	44,40	$= \frac{2}{6} \cdot 133,21$	$= \frac{4}{11} \cdot 122,11$
7) b_2 −	37,79	$= \frac{2}{7} \cdot 132,26$	$= \frac{4}{13} \cdot 122,82$
8) c_3	32,87	$= \frac{2}{8} \cdot 131,50$	$= \frac{4}{15} \cdot 123,28$
9) dis_3	29,22	$= \frac{2}{9} \cdot 131,47$	$= \frac{4}{17} \cdot 124,17$

Die Töne vom 2 ten bis 9 ten konnten beobachtet werden, und fanden sich vollständig übereinstimmend mit der Rechnung. Man sieht aus den beiden letzten Rubriken, dass die hohen Töne sich fast genau denen einer gedackten Pfeife anschliessen, deren Länge der reducirten Länge der Röhre 124,7 gleich ist; die tieferen schliessen sich näher an die einer offenen Pfeife, 327
deren Länge bis zur Spitze des Kegels reichte. Die reducirte Länge einer solchen wäre $R + a = 142,6$ ctm. Gewöhnlich werden die Töne der Blechinstrumente den Tönen einer offenen Pfeife gleich gesetzt, aber die oberen sind verhältnissmässig zu tief gegen die unteren, in unserem Falle um mehr als einen halben Ton. Bei den Trompeten und Hörnern wird dieser Fehler vielleicht einigermassen durch den Schallbecher an der Mündung corrigirt. Bei den Posaunen helfen die Auszüge nach.

Während die Trompeten, Posaunen und Hörner zu den Zungenwerken dieser Klasse mit kegelförmigem Rohr und tiefen ausschlagenden Zungen gehören, tragen die Oboen und Fagotte hohe einschlagende Zungen. Sie geben bei der Ueberblasung ebenfalls die höhere Octave und dann die Duodecime, wie eine offene Pfeife. Die Rechnung nach Gleichung 2 stimmt für die Oboe sehr gut mit Zamminer's Messungen.

XIX.

Ueber die Vocale.

Archiv für die holländischen Beiträge zur Natur- und Heilkunde. Bd. I S. 354–355. (1857.)

Betreffs der Vocale habe ich leider vergessen, Ihnen einen 354
Versuch vorzumachen, den Sie aber leicht selbst anstellen können. Heben Sie bei einem gut gestimmten Clavier den Dämpfer und singen Sie auf irgend einen der Claviertöne die Vocale a, e, i, o, u, ä, ö, ü, å kräftig gegen den Resonanzboden, so klingen ganz deutlich auf den Saiten diese Vocale nach. Es kommt dabei nur darauf an den betreffenden Ton genau zu treffen und festzuhalten. Geübteren Sängern gelingt der Versuch deshalb besser; meiner Frau besser, als mir selbst. Es gelingt auch, aber weniger deutlich, wenn man den Dämpfer von nur einer Saite hebt. Ich halte diese Erfahrung für interessant für die Theorie der Vocale, und werde mich bemühen die Art der Bewegung einer Saite, welche einen Vocal nachtönt, genauer zu bestimmen.

Ich theilte Ihnen schon mit, dass ich noch vor Ihren Ermittelungen über die Reibungsgeräusche der Luft bei den Vocalen gefunden hatte, dass die Vocale sich auch durch die höheren Nebentöne, welche den Grundton begleiten, unterscheiden. Aber es ist ziemlich schwer diese Unterschiede genau zu bestimmen.

Wenn man sich auch einübt nach der Methode, die ich in meinem Aufsatze über die Combinationstöne angegeben habe, die höheren Nebentöne, welche überhaupt da sind, zu
hören, so ist es doch schwer ihre Stärke einigermassen mit 355

der des Grundtons zu vergleichen. Singt man in das Clavier hinein, so bringt man leicht bei a, o und e die den höheren Nebentönen entsprechenden Saiten zum Nachklingen; u und i aber kann man nicht stark genug singen, um auf diesem Wege über ihre Nebentöne zu entscheiden. Nenne ich den Grundton den ersten Ton, den höheren Ton, welcher zwei-, drei-, vier- u. s. w. mal so viele Schwingungen macht, den zweiten, dritten, vierten u. s. w. Ton, so glaube ich den Charakter der Hauptvocale folgendermassen bezeichnen zu können:

A. Neben dem ersten ist deutlich der dritte und fünfte, schwächer 2, 4 und 7 vorhanden.

O. Etwas schwächer als bei A ist 3, sehr schwach 2 und 5.

U. Fast allein der Grundton, schwach 3.

E. Sehr kräftig 2, die höheren kaum hörbar.

I. Es scheint mir 2 und 3 in Verhältniss zu dem schwachen Grundtone den hellen Charakter des Vocals zu bedingen. — Schwach ist auch 5 vorhanden.

Sehr deutlich hört man übrigens die höheren Nebentöne mitklingen, wenn man den zuerst erwähnten Versuch ausführt, und bei gehobenem Dämpfer in das Clavier hineinsingt.

XX.

Ueber die Klangfarbe der Vocale.

Gelehrte Anzeigen der k. bayerischen Akademie der Wissenschaften. Sitzung vom 2. April 1859. Nr. 67—69. S. 537—541; 545—549; 553—556.
Poggendorff's Annalen Bd. 108 S. 280—290.

Ein musikalischer Ton wird hervorgebracht durch eine in 280.
gleichen und hinreichend kleinen Zeitabschnitten sich in gleicher Weise wiederholende periodische Bewegung der Luft. Innerhalb jeder einzelnen Schwingungsperiode bleibt die Bewegung dabei ganz willkürlich, wenn nur dieselbe Bewegung, welche innerhalb der ersten Periode stattgefunden hat, in allen folgenden Perioden ebenso wiederkehrt.

Wenn die Lufttheilchen während einer jeden Schwingungsperiode sich genau in derselben Weise einmal hin und her bewegen, wie der Schwerpunkt eines Pendels bei einer sehr kleinen Schwingung thut, so hören wir nur einen einfachen und einzigen Ton, dessen musikalische Höhe durch die Anzahl der gleichen Perioden bestimmt ist, die in einer Secunde enthalten sind. In diesem Falle ist sowohl die Geschwindigkeit wie der Druck der Luft in jedem einzelnen Punkte der schwingenden Luftmasse einfach mathematisch auszudrücken durch einen Ausdruck von der Form $A \sin (2\pi nt + c)$. Ich selbst habe in einer früheren Arbeit über die Combinationstöne eine Methode nachgewiesen, vermittels deren man dergleichen einfache pendelartige Schwingungen der Lufttheilchen, oder, wie ich sie zu nennen vorschlug, **einfache Luftwellen**, hervorbringen kann. Ich benutzte dazu Stimmgabeln, die angeschlagen und frei in die Luft gehalten, ihre Schwingungen nicht in merklicher Weise der Luftmasse mittheilen. Wenn man sie aber

vor die Oeffnung von Resonanzröhren hält, deren tiefster Ton mit dem der Stimmgabel im Einklang ist, so wird dieser tiefste Ton der Stimmgabel der Luft kräftig mitgetheilt. Wenn auch die Stimmgabel beim Anschlagen noch höhere Töne geben kann, so lässt es sich doch leicht so einrichten, dass die höheren
281 Töne der Stimmgabel nicht im Einklang mit den höheren Tönen der Resonanzröhre sind, und deshalb, durch die Resonanzröhre nicht verstärkt, unhörbar bleiben.

Wenn aber die Luftbewegung während einer Schwingungsperiode nicht dem einfachen Gesetze der Pendelbewegung folgt, sondern einem beliebigen anderen Gesetze, so hört man bei gehörig gerichteter Aufmerksamkeit der Regel nach mehrere Töne, selbst wenn die Luftbewegung nur von einem einzigen tönenden Körper hervorgebracht wird. Nun kann nach dem bekannten Theorem von Fourier eine jede periodische Bewegung der Luft mathematisch ausgedrückt werden durch eine Summe von Gliedern, deren jedes von der Form $A \sin(2\pi mt + c)$ ist, und also einer einfachen pendelartigen Schwingung der Lufttheilchen entspricht. In diesem Ausdrucke sind A und c abhängig vom Werthe von m, und m durchläuft die Werthe n, $2n$, $3n$, $4n$ u. s. w., wo n wieder wie früher die Zahl der einfachen Perioden in der Sekunde bedeutet.

In allen solchen Fällen nun, wo die Form der Bewegung des tönenden Körpers theoretisch vollständig gefunden werden kann, und wo man sich diese Bewegung mathematisch als eine Summe von solchen Sinusgliedern dargestellt hat, hört das Ohr bei gehöriger Aufmerksamkeit in der That die Töne von n, $2n$, $3n$ u. s. w. Schwingungen, obgleich es in allen den Fällen, wo eine solche Luftbewegung nicht wirklich von verschiedenen Tonquellen her hervorgerufen ist, eben nur eine mathematische Fiction ist, dass eine Anzahl von einfachen pendelartigen Schwingungen der Lufttheilchen neben einander existiren.

Die Allgemeinheit dieser Wahrnehmung veranlasste das berühmte frühere Mitglied dieser Akademie G. S. Ohm es als Definition des einfachen Tones aufzustellen, dass ein solcher nur hervorgebracht werde durch eine einfache pendelartige Luftbewegung von der Form $A \sin(2\pi mt + c)$. Diese Definition des Tons von Ohm wurde von Seebeck heftig ange-

griffen, welcher behauptete, dass die Definition zu eng sei, und dass die Empfindung eines einzigen Tons auch durch Luft- 282
bewegungen hervorgerufen werden könnte, welche beträchtlich von der Form der einfachen pendelartigen Schwingung abwichen. Ich kann hier nicht auf eine vollständige Widerlegung der Einwürfe von Seebeck eingehen, und behalte mir vor bei einer anderen Gelegenheit darauf zurückzukommen. Ich bemerke nur, dass seine Einwürfe wesentlich auf der Schwierigkeit beruhen, die man in vielen Fällen findet, die höheren Töne wahrzunehmen. In der That muss man hier wie bei allen Sinneswahrnehmungen zweierlei von einander trennen, nämlich die unmittelbare körperliche Empfindung des Hörnerven, und die Vorstellung, welche in Folge davon durch psychische Processe entsteht, und in welcher auf das Vorhandensein eines bestimmten tönenden Körpers geschlossen wird. In der unmittelbaren Empfindung werden allerdings die einzelnen vorhandenen einfachen Töne bei gehörig angespannter Aufmerksamkeit immer von einander getrennt, während sie in der Vorstellung zusammenfliessen in den sinnlichen Eindruck, den der Ton eines bestimmten tönenden Körpers auf unser Ohr macht, und es gehört meist eine künstliche Unterstützung der Aufmerksamkeit dazu, um die einzelnen Elemente der zusammengesetzten Empfindung voneinander zu scheiden, ebenso wie es z. B. besondere Beobachtungsmethoden erfordert, um sich zu überzeugen, dass die Anschauung der Körperlichkeit eines betrachteten Gegenstandes auf der Verschmelzung zweier verschiedener Bilder desselben in beiden Augen beruhe.

Ich habe deshalb auch früher schon vorgeschlagen, die ganze zusammengesetzte Empfindung, wie sie die von einem einzelnen tönenden Körper ausgehende Luftbewegung erregt, mit dem Namen Klang zu bezeichnen, den Namen des Tons aber zu beschränken auf die einfache Empfindung, wie sie durch eine einfache pendelartige Luftbewegung hervorgebracht wird. Die Empfindung eines Klanges ist demnach in der Regel aus der Empfindung mehrerer einfacher Töne zusammengesetzt. Lässt man Alles, was Seebeck in dem Streite mit Ohm behauptet hat, vom Klange gelten, und was Ohm be- 283
hauptet hat, vom Tone, so sind beide ausgezeichnete Akustiker

mit ihren Behauptungen im Rechte, und beide Behauptungen können ungestört neben einander bestehen.

Diese Bezeichnung wollen wir im Folgenden beibehalten, und dabei festsetzen, dass unter Tonhöhe eines Klanges die Höhe des tiefsten darin enthaltenen einfachen Tones von nSchwingungen, seines Grundtones oder ersten Tones verstanden werde, während wir die übrigen als Obertöne bezeichnen. Den Ton von $2n$Schwingungen, die höhere Octave des vorigen bezeichne ich als zweiten Ton, den von $3n$Schwingungen als dritten Ton u. s. w.

Ich bin nun daran gegangen die Consequenzen des Ohmschen Satzes für die Lehre von der Klangfarbe zu untersuchen, und danke der Gnade Sr. Maj. des Königs von Bayern die Geldmittel zur Anschaffung der Apparate für diese Untersuchung. In physikalischer Beziehung war man längst zu der Erkenntniss gelangt, dass dem, was unser Ohr als verschiedene Klangfarbe unterscheidet, die verschiedene Form der Luftwellen innerhalb jeder einzelnen Schwingungsperiode entspreche; aber freilich beruhte dieser Satz nur darauf, dass keine andere Möglichkeit übrig blieb, die Verschiedenheiten der Klangfarbe zu erklären, und bedurfte noch der experimentellen Bestätigung, die durch meine Versuche nun gegeben werden kann. In physiologischer Beziehung liess sich aus Ohm's Satze noch eine weitere Consequenz ziehen.

Da nämlich alle Schwingungen, die nicht der einfachen pendelartigen Bewegung entsprechen, in der Empfindung des Ohres zerlegt werden in eine gewisse Zahl einfacher Töne, so müssen Klänge von verschiedener Klangfarbe und gleicher Höhe des Grundtons für das Ohr durch verschiedene Stärke der harmonischen Obertöne verschieden sein. Wenn wir nun absehen von der verschiedenen Weise, wie die Klänge verschiedener Instrumente und Stimmen anheben oder ausklingen, ferner von den mancherlei sausenden, kratzenden, knarrenden, unregelmässigen Geräuschen, welche viele davon begleiten, und
284 die nicht eigentlich zu dem musikalischen Theile des Tones zu rechnen sind, und den Theil der Klangfarbe, der eben nicht von den genannten Nebenumständen abhängt, die musikalische Klangfarbe des Tons nennen, so war die aufzu-

stellende Frage: Unterscheidet sich die musikalische Klangfarbe nur durch die verschiedene Stärke der darin enthaltenden Nebentöne?

Denkt man eine Wellenform aus den in ihr enthaltenen einfachen Wellen zusammengesetzt, so kommt es nicht nur darauf an, dass die letzteren die richtige Schwingungsweite haben, sondern auch darauf, dass die Phasenunterschiede zwischen ihnen und dem Grundtone richtig gewählt werden. Wir bekommen ganz verschiedene Wellenformen, wenn wir die Welle eines Grundtones und seiner ersten höheren Octave zusammensetzen, je nachdem wir das Verdichtungs-Maximum des Grundtones mit dem der Octave zusammenfallen lassen, oder etwa mit dem Verdichtungsminimum der Octave oder mit irgend einer dazwischen liegenden Phase der Octave, und es concentrirte sich nun jene Frage in folgende speciellere Form: Beruht die Unterscheidung der musikalischen Klangfarbe nur in der Empfindung von Obertönen verschiedener Stärke, oder unterscheidet das Ohr auch die Phasenunterschiede?

Die Entscheidung dieser Frage wurde am einfachsten gewonnen, wenn man geradezu versuchte Töne verschiedener Klangfarbe durch directe Zusammensetzung einfacher Töne, wie man sie durch Stimmgabeln erzeugen kann, herzustellen. Als eines der passendsten Objecte der Nachahmung boten sich die verschiedenen Vocale der menschlichen Sprache dar, weil diese als gleichmässig anhaltende musikalische Töne hervorgebracht und ziemlich, wenn auch nicht ganz frei von unmusikalischen Geräuschen gehalten werden können.

Mein Apparat besteht aus einer Reihe von 8 Stimmgabeln, die dem B (in der tiefsten Octave der Männerstimmen), und seinen harmonischen Obertönen bis zum b_2 (in den höchsten Soprantönen) entsprechen, nämlich den Tönen B, b, f_1, b_1, d_2,
f_2, as_2 und b_2. Jede Stimmgabel ist zwischen den Schenkeln 285
eines kleinen hufeisenförmig gebogenen Elektromagneten befestigt, und mit einer abgestimmten Resonanzröhre verbunden. Die Oeffnungen der Resonanzröhren sind mit beweglichen Deckeln versehen, welche durch Fäden, deren Enden an einer kleinen Claviatur befestigt sind, fortgezogen werden können. Die Stimmgabeln werden in Bewegung gesetzt durch intermittirende elektrische

Ströme, die nach dem Princip des Neef'schen Hammers erzeugt werden, und deren Zahl in der Secunde gleich ist der Schwingungszahl der tiefsten Gabel, nämlich 112. Die Einrichtungen sind so getroffen, — ich hatte dabei mit ziemlich bedeutenden Schwierigkeiten zu kämpfen — dass man, nachdem der Apparat in Gang gesetzt ist, kaum ein leises Summen von den Gabeln hört, so lange die Resonanzröhren alle geschlossen sind; sobald man aber mittels der Claviatur eine oder einige der Resonanzröhren öffnet, treten die betreffenden Töne kräftig hervor. Die Stärke der Töne, welche man angeben will, kann man leicht reguliren, indem man die betreffenden Röhren mehr oder weniger vollständig öffnet.

Ich verfuhr nun so, dass ich erst die zwei tiefsten Töne allein combinirte, dann den dritten und allmählig immer mehrere hinzunahm, und die entstandenen Klänge mit der Stimme nachzuahmen suchte. So lernte ich allmählig die verschiedenen Vocalklänge mehr oder weniger vollständig nachbilden, und zwar ziemlich gut und deutlich U, O, Oe, E, etwas weniger gut J, Ue, bei welchen das Sausen der Luft in der Mundhöhle, auf dessen verschiedenen Charakter bei den Vocalen Donders aufmerksam gemacht hat, verhältnissmässig am lautesten ist, und weniger gut auch A und Ae, weil bei diesen eine sehr grosse Anzahl von Tönen zusammenwirken muss, die sich nicht alle einzeln so vollständig in ihrer Stärke beherrschen lassen, ja beim A sogar noch eine Reihe höherer Töne hinzutreten müsste, für welche ich keine Gabeln mehr hatte.

Ueberhaupt ist zu bemerken, dass die mittels Stimmgabeln
286 zusammengesetzten Vocaltöne den gesungenen Tönen der menschlichen Stimme ähnlicher waren als den gesprochenen. Bei dem trockenen Klange der gewöhnlichen Sprache wählt man eine andere Art der Intonation, wobei der Grundton viel schwächer zum Vorschein kommt, als die höheren Nebentöne und die Geräusche; dadurch eben aber werden die Unterschiede der Klangfarbe viel deutlicher als beim Singen, wo der Grundton stärker hervortritt, und die Nebentöne mehr bedeckt. Am ähnlichsten sind die künstlich zusammengesetzten Vocale denen, welche auf einem Claviere nachklingen, wenn man einen der Vocale stark hineinsingt.

Im einzelnen waren meine Resultate nun folgende:

Der einfache Grundton hat verglichen mit den zusammengesetzten Klängen die Klangfarbe des U. Noch etwas deutlicher wird der Vocal, wenn der Grundton ganz schwach vom dritten Tone begleitet wird.

Das O entsteht, wenn der Grundton kräftig von der höheren Octave begleitet wird. Eine ganz schwache Begleitung durch den dritten und vierten Ton ist vortheilhaft aber nicht nothwendig.

Das E wird namentlich durch den dritten Ton charakterisirt, bei mässiger Stärke des zweiten. Schwach kann man auch den vierten und fünften mitklingen lassen.

Der Uebergang von O zu E geschieht also dadurch, dass man den zweiten Ton abnehmen, den dritten anschwellen lässt, giebt man beide genannte Nebentöne stark an, so entsteht Oe.

Ue entsteht durch den Grundton der in mässiger Stärke von dem dritten Tone begleitet ist.

Bei J muss man den Grundton schwächen, den zweiten verhältnissmässig zum Grundton stark, den dritten ganz schwach, aber den vierten, der für diesen Vocal charakteristisch ist, stark angeben, den fünften dazu in mässiger Stärke gesellen. Man kann ohne wesentliche Aenderung des Charakters übrigens die schwachen Töne, den dritten und fünften, auch weglassen.

Bei A und Ae dagegen sind es die höheren Nebentöne,
welche charakteristisch werden. Man kann den zweiten Ton 287
ganz weglassen, den dritten schwach angeben, dann aber die höheren Töne hervortreten lassen, soweit es die Stärke der Gabeltöne erlaubt, die aber für diese höchsten Töne überhaupt bei der angegebenen Erregungsweise gering ist. Beim Ae kommt es namentlich auf den vierten und fünften Ton an, beim A auf den fünften bis siebenten. Wenn man bei A den dritten Ton ganz weglässt, bekommt es einen nasalen Klang.

Uebrigens muss ich bemerken, dass die angegebenen Verhältnisse zwischen Grundton und Obertönen zunächst nur zu beziehen sind auf die Tonhöhe meiner Gabeln. Der Grundton *B* entspricht etwa der Tonhöhe, in welcher mässig tiefe Männerstimmen zu sprechen pflegen. Ich habe meine Untersuchungen über die Vocale in höheren Tonlagen noch nicht

abzuschliessen Zeit gehabt, mit den Gabeln liess sich die Untersuchung darüber nicht viel weiter führen, weil mir die höheren Töne fehlten. Wählte ich das *b*, welches bisher zweiter Ton war, als Grundton, so hatte ich nur drei dazu passende Nebentöne. Mit diesen liessen sich U, O, Oe, E, Ue und J nach der gegebenen Regel herstellen, nur unvollkommen wegen Mangels der höheren Töne A und Ae, sodass auch hier dasselbe Verhältniss der Nebentöne zum Grundtone entscheidend für den Vocalcharakter zu sein schien, wie in der tieferen Lage. Es entspricht diese höhere Lage ungefähr der, in welcher Altstimmen zu sprechen pflegen.

Dagegen habe ich die Untersuchung weiter geführt durch directe Beobachtung der menschlichen Stimme mittels eines besonderen Hülfsmittels, welches auch den ganz Ungeübten in den Stand setzt, die Obertöne jedes musikalischen Tons herauszuhören, was bisher eine Aufgabe war, die nur durch andauernde Uebung und mit grosser Anstrengung der Aufmerksamkeit gelöst werden konnte. Ich benutze dazu nämlich eigenthümliche Resonatoren, die an das Ohr selbst angesetzt werden. Die beste Form dieser Resonatoren sind Glaskugeln
288 mit zwei Oeffnungen, von denen die eine in einen ganz kurzen trichterförmigen Hals ausläuft, dessen Ende in den Gehörgang einpasst. Bewaffnet man ein Ohr mit einem solchen Resonator; während man das andere schliesst, so hört man die meisten äusseren Töne nur sehr gedämpft, denjenigen aber, der dem eigenen Tone der Glaskugel (diese in Verbindung mit dem Gehörgange genommen) entspricht, in ausserordentlicher Stärke; in derselben Stärke treten nun auch diejenigen Obertöne äusserer Töne auf, welche dem Tone der Glaskugel entsprechen. Setzt man z. B. eine Kugel an das Ohr, deren Ton f_1 ist, und singt auf *B*, dessen dritter Ton jenes f_1 ist, die Vocale, so hört man bei *u*, *i*, *ü*, *a*, *ä* nur schwach den Ton der Kugel, während er bei *o* und *ö* sich stark hervorhebt, und bei *e* gewaltig in das Ohr hineinschmettert. Mit Hülfe solcher Resonatoren werden eine Menge akustischer Phänomene, die objectiven Combinationstöne, die Obertöne und ihre Schwebungen, die sonst schwer zu untersuchen waren, ausserordentlich leicht zugänglich. Die damit ausgeführte Untersuchung der mensch-

lichen Stimmtöne bestätigte nun durchaus, wenn auf *B* gesungen wurde, die Resultate, die ich mit den Stimmgabeln erhalten hatte, für höhere Stimmlagen traten aber einige Abweichungen ein. Es stellte sich nämlich heraus, dass für die Nebentöne einzelner Vocale gewisse Gegenden der musikalischen Scala besonders günstig sind, sodass die in diese Theile der Scala fallenden Nebentöne stärker werden als in anderen Höhelagen; so ist für das O die obere Hälfte der eingestrichenen Octave eine solche begünstigte Stelle. Der dritte und vierte Oberton, welche in der tiefen Lage des Vocals deutlich zu hören sind, liegen in dieser Gegend, und treten nicht so deutlich heraus, wenn O höher gesungen wird. Für das A ist die obere Hälfte der zweigestrichenen Octave begünstigt. Der 2., 3., 4. Ton, die in der tiefen Lage schwach waren, treten sehr mächtig heraus, wenn das A zwischen b und b_1 gesungen wird. Uebrigens fand ich mittels der beschriebenen Resonatoren, dass namentlich beim Vocal A auch noch höhere schwach hörbare Obertöne da sind, als meine Gabeln reichen. Es re- 230
sonirte bei dem Vocal A gesungen auf *F*, noch eine Kugel merklich, welche auf es_3 abgestimmt war, welcher Ton 14 mal so viel Schwingungen macht als jenes *F*.

Was nun die Einwirkung der Phasenunterschiede betrifft, so hat sich eine solche bei meinen Versuchen nicht gezeigt. Die Schwingungsphasen der Stimmgabeln habe ich nach der optischen Methode von Lissajou controliren können. Man kann erstens durch Umkehrung der elektrischen Ströme in dem Elektromagnet einer jeden einzelnen Gabel deren Schwingung um eine halbe Undulation verändern, sodass Maximum und Minimum ihrer Abweichung miteinander vertauscht werden, und man kann ferner durch etwas aufgeklebtes Wachs die Gabeln ein wenig verstimmen, dann wird ihre Schwingung schwächer, und die Phasen verschieben sich desto mehr, je grösser die Verstimmung ist, bis zur Grenze einer Viertel-Undulation. Noch leichter auszuführen ist die Veränderung der Phasen der schwächeren Töne, wenn man sie bald durch grössere Entfernung der Resonanzröhren schwächt, wobei die Phase der Luftschwingung nicht verändert wird, bald durch unvollständige Oeffnung der Resonanzröhren, wobei eine Ver-

änderung der Phasen der Luftwellen eintritt, wie aus den Resultaten einer theoretischen Arbeit über die Schallschwingungen hervorgeht, die gegenwärtig in *Crelle's* Journal für Mathematik gedruckt wird.[1]) Alle die Phasenänderungen, welche auf solche Weise hervorgebracht werden können, verändern nicht die Klangfarbe, wenn die Stärke der Töne dieselbe bleibt, sodass also die früher gestellte Frage im Allgemeinen dahin beantwortet wird, dass *die musikalische Klangfarbe nur abhängt von der Anwesenheit und Stärke der Nebentöne, die in dem Klange enthalten sind, nicht von ihren Phasenunterschieden.*

Indessen muss ich gleich bemerken, dass scheinbare Ausnahmen vorkommen. Es können sich bei hinreichend starken Tönen Combinationstöne einmischen, die je nach den Phasen-
290 unterschieden die primären Töne theils schwächen, theils verstärken, sodass dadurch auch Unterschiede der Klangfarbe eintreten. Hier glaube ich aber neben den übrigen Erfahrungen die Erklärung festhalten zu dürfen, dass der Klangunterschied eben nur von dem Unterschiede der Tonstärke bedingt ist, welcher letztere aber unter solchen Verhältnissen vom Phasenunterschiede abhängt.

Ferner möchte ich den ausgesprochenen Satz vorläufig wenigstens noch einschränken auf die unteren, in der Scala weit auseinanderliegenden Nebentöne bis etwa zum 6. oder 8ten. Die höheren Nebentöne geben Dissonanzen miteinander und Schwebungen; und wenn nun eine Menge solcher schwebender Tonpaare zusammenwirken, wird es für die Empfindung wahrscheinlich nicht gleichgültig sein, ob die Pausen aller dieser Schwebungen zusammenfallen oder nicht. Das hängt aber von den Phasenunterschieden ab. Uebrigens halte ich es auch für wahrscheinlich, dass diese Masse hoher dissonanter Obertöne das bildet, was das Ohr als begleitendes Geräusch hört, und was wir schon von anderer Seite her ausgeschlossen haben von unserer Betrachtung der musikalischen Klangfarbe.

Ich habe schon an einem anderen Orte die Hypothese

1) S. oben S. 354 bis 358.

ausgesprochen, dass jede Nervenfaser des Hörnerven für die Wahrnehmung einer besonderen Tonhöhe bestimmt ist, und in Erregung kommt, wenn der Ton das Ohr trifft, welcher der Tonhöhe des mit ihr verbundenen elastischen Gebildes (Cortischen Organs oder Borste in den Ampullen) entspricht. Danach würde sich die Empfindung verschiedener Klangfarben darauf reduciren, dass gleichzeitig mit der Faser, welche den Grundton empfindet, gewisse andere in Erregung gesetzt werden, welche den Nebentönen entsprechen. Diese einfache Erklärung würde nicht gegeben werden können, wenn die Phasenunterschiede der tieferen Nebentöne in Betracht kämen.

XXI.

Ueber Klangfarben.

Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg. Bd. II S. 57 vom 20. Juli 1860.

---

57 Professor Helmholtz setzte die Resultate fortgesetzter Untersuchungen über die Klangfarbe der Vocale auseinander. Die früheren Untersuchungen hatten sich nur auf die Zusammensetzung der Vocalklänge bezogen, wenn diese auf der Note B von einer Männerstimme gesungen wurden, und die Obertöne waren nur bis zum b_2 hin untersucht worden. Er hat nun die Untersuchung für alle Tonhöhen des gesungenen Vocales ausgedehnt, und gefunden, dass bei gewissen Vocalen noch höher liegende Obertöne charakteristisch sind. Die Resultate sind folgende:

1) Die Vocale sind in drei Reihen einzutheilen. Die erste derselben geht von U durch O in A über; die zweite von I durch E in A, und die dritte liegt zwischen den beiden anderen, geht von Ü durch Ö und Öa (französisch oeu) in A über.

2) Im allgemeinen sind die Obertöne der Vocale desto schwächer, je mehr die Mundhöhle verengt und geschlossen ist, in jeder der drei Reihen nehmen sie deshalb vom A an nach dem anderen Ende der Reihe hin in Stärke ab, und die erste Reihe mit weiter Mundhöhle hat im Ganzen stärkere Obertöne als die anderen beiden. Die höheren Obertöne sind im Allgemeinen schwächer als die tieferen.

3) Von dieser allgemeinen Regel bilden für jeden Vocal einzelne Obertöne eine Ausnahme, indem sie viel stärker zum Vorschein kommen, als jener Regel entspricht. Die erste

Reihe der Vocale hat nur in einer Gegend der Tonleiter verstärkte Obertöne, und zwar ist diese Gegend dadurch bestimmt, dass die Mundhöhle für sie abgestimmt ist. Die verstärkten Töne des U liegen in der Gegend des f. Beim reinen O ist die Mundhöhle für h_1 abgestimmt, und die diesem Tone benachbarten Obertöne erscheinen verstärkt. Bei A entspricht die Abstimmung der Mundhöhle und Verstärkung der Töne dem h_2.

4) Die zweite Reihe der Vocale hat zwei Gegenden der Scala mit verstärkten Tönen. Die oberen davon scheinen der Abstimmung der Mundhöhle zu entsprechen. Für Ä liegen diese Verstärkungen in der Gegend des c_2 und e_3, für E bei f_1 und g_3, für I bei f und c_4.

5) Die dritte Reihe hat ebenfalls zwei Verstärkungsstellen. Für Ü fällt die untere mit der des U und der unteren des I auf f, die obere mit den oberen des E zusammen auf g_3. Für Ö fällt die untere mit der des E und OU zusammen auf f_1, die obere mit der des Ä auf e_3.

6) Für weibliche Stimmen liegen die Verstärkungsstellen ebenso wie für männliche nur fallen die tiefen des U, I und Ä weg, weil diese ausserhalb oder an der Grenze des Stimmumfanges liegen.

Zusatz (1881).

Die weitere Entwickelung dieser Sätze ist in meinem Buche: „Die Lehre von den Tonempfindungen. Braunschweig. (1. Auflage 1863, 4. Auflage 1877) gegeben.

XXII.

Ueber die Bewegung der Violinsaiten.

Aus: Proceedings of the Glasgow Philosophical Society. Dec. 19, 1860. — Phil. Magaz. 4 Series. T. 21 p. 393—396, zurück übersetzt.

---

393 Seit einiger Zeit bin ich beschäftigt, die Ursachen der verschiedenen Qualitäten des Klanges zu studiren; und da ich fand, dass diese Unterschiede hauptsächlich von der Zahl und Stärke der harmonischen Obertöne, die den Grundton begleiten, abhängen: so war ich genöthigt, die Formen der elastischen Schwingungen zu untersuchen, die von verschieden tönenden Körpern ausgeführt werden. Unter diesen Schwingungen, deren Formen noch nicht genau bekannt sind, erscheinen die durch einen Geigenbogen hervorgebrachten Schwingungen der Saiten besonders interessant. Th. Young bezeichnet sie als sehr unregelmässig; ich vermuthe jedoch, dass diese Aussage sich hauptsächlich nur auf die Bewegungen beziehe, welche zurückbleiben, nachdem der Bogen zu wirken aufgehört hat. Ich selbst wenigstens fand die Bewegung sehr regelmässig, so lange nur der Bogen an einem Ende der Saite in der richtigen Art und Weise, wie Violinspieler es zu thun pflegen, angesetzt wird. Ich bediente mich einer Beobachtungsmethode, die derjenigen von Lissajous sehr ähnlich ist. Schon ohne alle Hülfe von Instrumenten kann man wahrnehmen, dass die durch den Bogen bewegte Saite nur in einer Ebene schwingt, nämlich derjenigen, in welcher die Saite selbst und die Haare des Bogens sich befinden. Diese Ebene war horizontal bei meinen

Versuchen. Die Saite wurde mit Amylum bepudert und stark beleuchtet. Auf eines der kleinen Stärkekörnchen, das als heller Punkt erschien, wurde ein senkrecht gerichtetes Mikroskop eingestellt, dessen Objectivglas an einer Zinke einer Stimmgabel befestigt war. Die Stimmgabel, welche 120 Schwingungen in der Secunde macht, wurde zwischen die Enden eines hufeisenförmigen Elektromagnets gebracht, welcher durch einen unterbrochenen Strom magnetisirt wurde; die Zahl der Unterbrechungen betrug ebenfalls 120 pro Secunde. Auf diese Weise konnte die Stimmgabel so lange als ich es wünschte in Schwingung erhalten werden. Die Linse des Mikroskops vibrirte parallel zur Saite, demzufolge senkrecht zu der Schwingungsrichtung ihrer Theilchen. Die von mir benützte Saite war die zweite Violinsaite, welche die Note a′ giebt; sie war aber etwas höher als gewöhnlich, auf 480 Schwingungen gestimmt, und vollzog also vier Schwingungen auf eine Schwingung der Stimmgabel. Durch das Mikroskop sah ich das Stärkekörnchen eine leuchtende Curve beschreiben, deren horizontale Abscissen den Elongationen der Stimmgabel und deren verticale den Elongationen der Saite entsprachen. Ich fand es sehr wichtig, hierbei eine Geige von bester Construction zu benützen, und war so glücklich, mir ein schönes Instrument von Guadanini für diese Versuche verschaffen zu können. Auf den gewöhnlichen Instrumenten von geringerer Güte konnte ich die Curve nicht constant genug erhalten, um die kleinen Einschnitte, die ich nachher beschreiben werde, zu zählen, obwohl der Gesammtcharakter der Curve derselbe blieb bei allen Instrumenten, die ich untersuchte: Die Curve pflegte sich sprungweise längs der Abscissenlinie zu verschieben, und jeder Sprung war von einem kratzenden Ton des Bogens begleitet. Dies geschah schnell hinter einander bei den schlechteren Instrumenten; bei dem italienischen Instrument dagegen gelang es mir nach einiger Uebung eine ganz ruhige Curve zu erzielen, so lange der Bogen sich in einer Richtung bewegte, und der Klang war sehr rein und frei von Kratzen.

Wir können uns die Bewegung der Saite als aus zwei verschiedenen Schwingungsarten zusammengesetzt denken; deren erste in Bezug auf Grösse der Amplitude bei weitem über-

wiegt. Ihre Periode entspricht der Periode des Grundtons der Saite, und sie ist unabhängig von der Stelle, an der der Bogen angesetzt wird. Die zweite Bewegung bringt nur ganz kleine Einschnitte in der Curve hervor. Ihre Schwingungsperiode entspricht einem der höheren Obertöne der Saite. Es ist bekannt, dass eine Saite, wenn sie uns einen der höheren Obertöne hervorbringt, sich in verschiedene schwingende Abtheilungen von gleicher Länge theilt, welche durch ruhende Knotenpunkte von einander getrennt sind. In allen Knotenpunkten des Obertons der der kleineren hier erwähnten Bewegung der Saite entspricht, erscheint die Hauptbewegung allein; auch an anderen Stellen der Saite können die Einschnitte, welche der zweiten Bewegung entsprechen, leicht undeutlich werden, wenn die Lichtlinie zu breit ist.

Die Hauptbewegung der Saite ist derartig, dass jeder Punkt derselben erst mit einer constanten Geschwindigkeit in der einen Richtung vorwärts geht und dann mit einer andern constanten Geschwindigkeit in die erste Lage zurückkehrt.

Figur 7 stellt vier solcher Schwingungen dar, welche einer Schwingung der Stimmgabel entsprechen. Die horizontalen

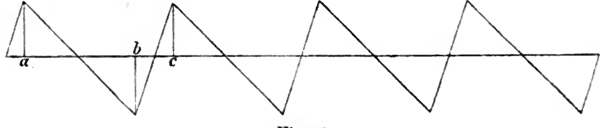


Fig. 7.

Abscissen sind proportional der Zeit, die senkrechten Ordinaten sind proportional der Ablenkung des schwingenden Punktes. Jede Schwingung wird auf der Curve durch zwei gerade Linien gebildet. Die Curve wird nicht ganz in dieser Gestalt durch's Mikroskop gesehen, weil dieses ihre horizontalen Abscissen nicht der Zeit, sondern dem Sinus der Zeit proportional zeigt. Man muss sich vorstellen, dass die Curve (Fig. 7) um einen durchsichtigen Cylinder aufgewickelt sei, sodass die beiden Enden derselben zusammenstossen, und dass das Ganze perspektivisch aus grosser Entfernung gesehen werde; auf diese Weise giebt es das wirkliche Aussehen der Curve wieder, wie es in Figur 8

in zwei verschiedenen Ansichten dargestellt ist. Wenn die Zahl der Saitenschwingungen in gleicher Zeit genau viermal grösser ist, als die der Stimmgabelschwingungen, so verharrt die Curve ruhig in derselben Stellung. Wenn dagegen ein kleiner Unterschied in der Stimmung stattfindet, so sieht es aus, als ob der Cylinder sich langsam um seine Axe drehte, und durch die Bewegung der Curve erhält der Beobachter den lebhaften Eindruck einer cylindrischen Oberfläche mit darauf gezeichneten Linien, als ob er ein stereoskopisches Bild vor sich hätte. Derselbe Eindruck kann hervorgebracht werden, wenn man die beiden Zeichnungen Fig. 8 stereoskopisch vereinigt.

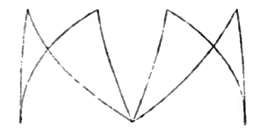
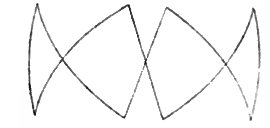



Fig. 8.

Wir lernen demnach aus diesen Versuchen: 1) dass die Saiten einer Violine, wenn ein Bogen darüber geführt wird, in einer Ebene schwingen; 2) dass jeder Punkt der Saite in constanter Geschwindigkeit sich hin und her bewegt.

Diese beiden Daten genügen, um die vollständige Gleichung für die Bewegung der ganzen Saite zu finden. Es ist die folgende:

$$y = A \Sigma_n \left\{ \frac{1}{n^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right\} \quad \cdots\cdots\cdots \; (1)$$

y ist die Elongation des Punktes, dessen Entfernung von einem Ende der Saite mit x bezeichnet ist, l die Länge der Saite; t die Zeit; T die Dauer einer Schwingung; A eine willkürliche Constante; n bezeichnet die Reihe der ganzen Zahlen, nach denen zu addiren ist, wie das Zeichen Σ anzeigt.

Eine anschauliche Vorstellung von der durch diese Gleichung ausgedrückten Bewegung kann auf folgende Weise gegeben werden:

Man lasse ab, Fig. 9 die Gleichgewichtsstellung der Saite sein. Während der Schwingung wird ihre Form $ac'b$ sein, zu-

sammengesetzt aus zwei geraden Linien *ac* und *bc*, die sich in dem Punkte schneiden. Man lasse diesen Schnittpunkt mit gleichbleibender Geschwindigkeit sich längs zweier flacher kreisförmiger Bogen fortbewegen, die zu beiden Seiten der Saite symmetrisch liegen und durch deren Enden gehen, wie Fig. 9 zeigt. So erhält man eine Bewegung, die der der wirklichen Saite entspricht.

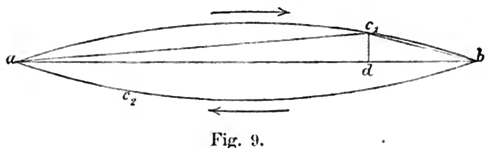


Fig. 9.

Die Bewegung jedes einzelnen Punktes betreffend, so kann aus Gleichung (1) hergeleitet werden, dass die zwei Theile *a b* und *b c* (Fig. 7) der Zeitdauer jeder Schwingung proportional sind den zwei Theilen, in die die Saite durch den beobachteten Punkt getheilt wird. Die beiden Geschwindigkeiten sind natürlich umgekehrt proportional zu den Zeiten *a b* und *b c*. In derjenigen Hälfte der Saite, welche vom Bogen berührt wird, hat die kleinere Geschwindigkeit dieselbe Richtung, als der Bogen; in der anderen Hälfte der Saite hat sie die entgegengesetzte Richtung: Indem ich die Geschwindigkeit des Bogens mit der Geschwindigkeit des von ihm berührten Punktes verglich, fand ich, dass dieser Punkt der Saite ganz fest am Bogen haftet und der Bewegung des letztern während der Zeitdauer *a b* vollständig folgt; dann reisst er sich los und kehrt zu seiner ersten Stellung *b c* zurück, bis der Bogen ihn wieder packt und festhält.

Mit dieser Hauptschwingungsform setzen sich, wie schon erwähnt, kleinere Schwingungen zusammen, deren Art ich nur in dem Falle genau anzugeben vermag, wenn der Bogen einen Punkt berührt, dessen Entfernung vom nächsten Ende der Saite $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ oder $\frac{1}{7}$ seiner ganzen Länge, allgemein also $1/m$ ist, wenn m eine ganze Zahl bezeichnet. Da der Punkt, wo der Bogen angesetzt wird, nicht durch irgend welche Schwingung, die zum $m$ten, $2m$ten etc. Oberton gehört, in Bewegung gesetzt

wird, so ist es ganz gleichgültig für die Bewegung dieses Punktes und für die Anstösse, die der Bogen der Saite mittheilt, ob Schwingungen, die den *m*ten Oberton entsprechen, existiren oder nicht. Th. Young hat bewiesen, dass wenn wir die Schwingungen einer Saite dadurch hervorrufen, dass wir sie mit dem Finger zupfen, wie bei der Harfe, oder sie mit einem Schlage treffen, wie beim Clavier, in der darauf folgenden Bewegung alle diejenigen Obertöne fehlen, welche an dem berührten Punkte einen Knoten haben. Ich schloss also daraus, dass auch der Bogen diejenigen Obertöne nicht erregen kann, welche einen Knotenpunkt an der Stelle haben, wo er angesetzt wird; und ich fand in der That, dass das Ohr, wenn der Punkt $1/m$ vom Ende entfernt ist, den *m*ten Partialton nicht hört, selbst wenn es sehr wohl alle anderen Obertöne unterscheidet. Deshalb werden in der Gleichung (1) alle diejenigen Bestandtheile der Summe fehlen müssen, in denen n gleich m oder $2m$ oder $3m$ etc. ist. Diese Glieder zusammengenommen, bilden eine Schwingung der Saite mit m schwingenden Abtheilungen. Jede dieser Abtheilungen schwingt in derselben Weise, wie ich es für die Hauptschwingung der ganzen Saite vorher beschrieben habe. Diese kleinen Schwingungen müssen von der Hauptschwingung der ganzen Saite abgezogen werden, um die wirkliche Schwingung zu erhalten. Curven, die nach dieser theoretischen Ansicht gebildet werden, entsprechen sehr gut den wirklich beobachteten Curven.

Wenn $m = 5$ und der beobachtete Punkt $\frac{1}{10}$ der Saiten-

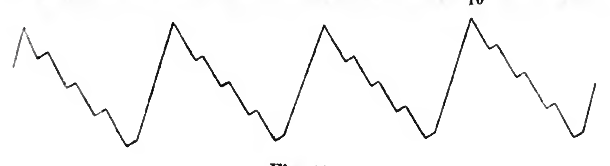


Fig. 10.

länge vom anderen Ende der Saite entfernt ist, so entsteht die in Fig. 10[1]) dargestellte Form der Bewegung. Nahe dem Ende

1) Die Figur ist neu construirt, um sie deutlicher und richtiger zu machen (1881).

der Saite, da wo die Geiger gewöhnlich den Bogen ansetzen, liegen die Knotenpunkte der verschiedenen Obertöne sehr nahe beisammen, sodass der Bogen fast immer auf oder doch ganz nahe an einem solchen Knoten ist. Wenn ich die Saite in der Mitte zwischen zwei Knoten anschlug, so konnte ich keine Curve hervorbringen, die genügend constant für sichere Beobachtung gewesen wäre. Wenn ich sehr nahe an dem Ende streiche, so wechselt der Ton sehr oft zwischen dem Grundton und dem zweiten und dritten Oberton, was sich durch allmählige und entsprechende Veränderungen an der Curve zeigt.

Zusatz (1881).

Vollständigere Behandlung desselben Themas findet sich in meiner „Lehre von den Tonempfindungen" Abth. I. Absch. 5. Nr. 4 und Beilage VI. Aus letzteren ergänze ich im Folgenden die in der vorstehenden Abhandlung fehlende mathematische Behandlung des Problems:

Rechnen wir die Zeit in Fig. 7 von der Abscisse des Punktes a ab, sodass für a $t = 0$, setzen wir ferner für den Punkt b $t = \mathfrak{T}$, und für den Punkt c $t = T$, sodass letzteres die Dauer einer ganzen Periode bezeichnet, dann ist der Werth von y zu setzen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{von } t = 0 \text{ bis } t = \mathfrak{T} & y = ft + h \\ \text{von } t = \mathfrak{T} \text{ bis } t = T & y = g(T - t) + h \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

wobei für $t = \mathfrak{T}$ sich ergiebt, dass:

$$f\mathfrak{T} = g(T - \mathfrak{T}).$$

Wenn wir nun y entwickelt denken in eine Fourier'sche Reihe:

$$y = A_1 \sin\frac{2\pi t}{T} + A_2 \sin\frac{4\pi t}{T} + A_3 \sin\frac{6\pi t}{T} \text{ etc.}$$

$$+ B_1 \cos\frac{2\pi t}{T} + B_2 \cos\frac{4\pi t}{T} + B_3 \cos\frac{6\pi t}{T} \text{ etc.},$$

so ergiebt sich durch Integration:

$$A_n \int_0^T \sin^2 \frac{2n\pi t}{T}\, dt = \int_0^T y \sin\frac{2n\pi t}{T}\, dt$$

$$B_n \int_0^T \cos^2 \frac{2n\pi t}{T}\, dt = \int_0^T y \cos \frac{2n\pi t}{T}\, dt$$

und dies giebt folgende Werthe von A_n und B_n:

$$A_n = \frac{(g+f)\,T}{2n^2\pi^2} \sin \frac{2n\pi\mathfrak{T}}{T}$$

$$B_n = -\frac{(g+f)\,T}{2n^2\pi^2} \left\{1 - \cos \frac{2n\pi\mathfrak{T}}{T}\right\}$$

und y bekommt die Form:

$$y = \frac{(g+f)\,T}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi n \mathfrak{T}}{T} \sin \frac{2\pi n}{T}\left(t - \frac{\mathfrak{T}}{2}\right)\right\} \ldots\ldots (2)$$

In der Gleichung (2) bedeutet y nur die Entfernung eines bestimmten Saitenpunktes von der Gleichgewichtslage. Wenn x die Entfernung dieses Punktes vom Anfang der Saite bezeichnet, und L die Länge der Saite, so ist die allgemeine Form des Werthes von y:

$$y = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin \frac{2\pi n}{T}\left(t - \frac{\mathfrak{T}}{2}\right)\right\}$$

$$+ \sum \left\{ D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos \frac{2\pi n}{T}\left(t - \frac{\mathfrak{T}}{2}\right)\right\} \ldots\ldots (3)$$

Die Vergleichung der Gleichungen (2) und (3) zeigt unmittelbar, dass alle:

$$D_n = 0 \quad \text{und}$$

$$C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{g+f}{\pi^2} \cdot \frac{T}{n^2} \sin \frac{n\pi\mathfrak{T}}{T} \ldots\ldots\ldots (3a)$$

Hierin sind $g+f$ und $\mathfrak{T}$ abhängig von x aber nicht von n. Nimmt man die Gleichungen für $n = 1$ und $n = 2$ und dividirt sie durch einander, so giebt es:

$$\frac{C_2}{C_1} \cos \frac{\pi x}{L} = \frac{1}{4} \cos \frac{\pi\mathfrak{T}}{T}.$$

Daraus folgt für $x = L/2$, wie auch die Beobachtung lehrt, $\mathfrak{T} = T/2$. Wenn aber $x = 0$; so wird nach den Beobachtungen auch $\mathfrak{T} = 0$; es folgt also:

$$C_2 = \frac{1}{4} C_1$$

$$\frac{x}{L} = \frac{\mathfrak{T}}{T} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3b)$$

und daraus, dass $g + f$ unabhängig von x sei. Nennen wir p die Amplitude der Schwingung des Saitenpunktes x, so ist:

$$f\mathfrak{T} = g(T - \mathfrak{T}) = 2p$$

$$g + f = \frac{2p}{\mathfrak{T}} + \frac{2p}{T-\mathfrak{T}} = \frac{2pT}{\mathfrak{T}(T-\mathfrak{T})} = \frac{2pL^2}{Tx(L-x)}.$$

Und da $g + f$ von x unabhängig ist, muss sein:

$$p = 4P \cdot \frac{x(L-x)}{L^2},$$

wo P die Amplitude in der Mitte der Saite bezeichnet. Aus der Gleichung (3b) folgt, dass die Abschnitte ab und bc der Schwingungsfigur, Fig. 7 (S. 412), sich verhalten müssen wie die entsprechenden Theile der Saite auf beiden Seiten des beobachteten Punktes. Daraus folgt schliesslich, dass:

$$y = \frac{8P}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{2\pi n}{T}\left(t - \frac{\mathfrak{T}}{2}\right) \right\} \quad \ldots \quad (3c)$$

als vollständiger Ausdruck für die Bewegung der Saite.

Setzt man $t - \mathfrak{T}/2 = 0$, so wird y für jeden Werth von x gleich Null, also gehen alle Theile der Saite gleichzeitig durch die Gleichgewichtslage der Saite. Von da ab ist die Geschwindigkeit f des Punktes x:

$$f = \frac{2p}{\mathfrak{T}} = \frac{8P(L-x)}{LT}.$$

Diese Geschwindigkeit bleibt aber nur während der Zeit $\mathfrak{T}$:

$$\mathfrak{T} = T\frac{x}{L}$$

bestehen. Nach der Zeit t ist also:

$$y = ft = \frac{8P}{LT} \cdot (L-x)t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

so lange:

$$t < T\frac{x}{L}$$

und also:

$$y < \frac{8P}{L^2} x(L-x).$$

Von da ab geht y mit der Geschwindigkeit $g = 2p/(T-\mathfrak{T}) = 8Px/LT$ zurück. Es ist also y nach der Zeit $t = \mathfrak{T} + t_1$:

$$y = \frac{8P}{L^2} x(L-x) - \frac{8Px}{LT} t_1$$

Und da:

$$L - x = \frac{T-\mathfrak{T}}{T} L$$

so ist: $$y = \frac{8Px}{LT}\left\{T-(\mathfrak{T}+t_1)\right\} = \frac{8Px}{LT}(T-t) \quad \ldots . \quad (4a)$$

Auf dem einen Theile der Saite ist also die Ablenkung gegeben durch die Gleichung (4), auf dem anderen durch (4a). Beide Gleichungen geben für die Gestalt der Saite eine gerade Linie, welche entweder (4) durch den Punkt $x = L$, oder (4a) durch den Punkt $x = 0$ geht. Es sind dies die beiden Endpunkte der Saite. Ihr Schneidepunkt ist gegeben durch die Bedingung:

$$y = \frac{8P}{LT}(L-x)\,t = \frac{8P}{LT}x\,(T-t).$$

Es muss also sein:

$$(L-x)\,t = x\,(T-t), \qquad Lt = xT.$$

Die Abscisse x des Schnittpunktes wächst also proportional der Zeit. Der Schnittpunkt, welcher zugleich der am meisten aus der Gleichgewichtslage entfernte Punkt der Saite ist, rückt also mit constanter Geschwindigkeit von einem Ende der Saite zum anderen, und während dieser Zeit liegt der Schnittpunkt selbst auf einem parabolischen Bogen, da für ihn:

$$y = p = \frac{8P}{L^2}x\,(L-x).$$

Die Bewegung der Saite lässt sich also kurz so beschreiben, dass in Fig. 9 der Fusspunkt d der Abscisse ihres Gipfels, mit constanter Geschwindigkeit auf der Linie ab hin- und hereilt, während der Gipfelpunkt selbst die beiden parabolischen Bögen $a\,c_1\,b$ und $b\,c_2\,a$ nach einander durchläuft, und die Saite selbst in den beiden geraden Linien ac_1 und bc_1 oder ac_2 und bc_2 ausgespannt ist.

Die beim Anstrich in einem Knotenpunkte, L/m vom Ende der Saite entfernt, wegfallenden Obertöne werden durch diejenigen Glieder der Reihe 3c dargestellt, in denen n den Factor m hat. Diese bilden unter sich eine Reihe welche genau dieselbe Gestalt, wie die ganze Reihe hat, und genau dieselbe Bewegung für jeden $m$ten Theil der Saitenlänge darstellt, vor sich gehend während des $m$ten Theils der Schwingungsdauer, und von einer Amplitude, die der m^2te Theil von der der Hauptbewegung ist. Die Geschwindigkeiten der Saitenpunkte sind dagegen $1/m$ von den entsprechenden Geschwindigkeiten der Hauptbewegung. Mit Hülfe dieser Angaben kann man die in Fig. 10 ausgeführte Construction machen.

XXIII.

Ueber musikalische Temperatur.

Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg vom 23. November 1860. — *Poggendorff's* Annalen Bd. 113 S. 87—90.

---

87 Jede Durtonleiter enthält in sich die Töne dreier Duraccorde; C dur z. B. der drei Accorde

F a C, C e G, G h D.

Sollen diese Accorde rein klingen, so müssen die grossen Terzen das Verhältniss der Schwingungszahlen 4:5, und die Quinten das Verhältniss 2:3 haben: innerhalb der Grenzen einer Tonart ist auch kein Hinderniss, sie so zu stimmen. Wenn man aber in eine andere Tonart übergehen will, z. B. G dur, so giebt der neu hinzutretende Accord D, fis, A eine Quinte A, welche nicht mehr gleich dem ersten a der Terz von F ist. Wenn wir die Schwingungszahl von F gleich 1 setzten, ist a, die grosse Terz von $F = \frac{5}{4}$ und A die Quinte von $D = \frac{81}{64}$. Die beiden Werthe von A stehen im Verhältniss:

$$a : A = 80 : 81.$$

Das Bedürfniss der Tastaturinstrumente hat die Musiker verleitet, statt dieser beiden Töne einen einzigen setzen zu wollen, wobei nothwendig eins beider Intervalle oder beide falsch werden müssen. Die Griechen, welche, wie es scheint, nur einstimmig oder in Octaven einhergehend ihre Musik ausführten, beobachteten richtig, dass ein Fehler in der Fortschreitung von einer Quinte viel auffallender sei, als in der Fortschreitung von einer Terz, und hielten also die Quinten rein, indem sie die *Pythagoräische Terz* 64:81 als Norm festsetzten.

Wenn man aber sich das auch gefallen lässt, und weiter modulirt in Quinten fortschreitend von A nach E, H, Fis, Cis, Gis, Dis, Ais, so kommt man zuletzt auf Eis, welches beinahe, aber nicht ganz mit dem F zusammenfällt, von dem man ausgegangen ist. Es ist nämlich höher im Verhältniss
531441 : 524288, oder abgekürzt mittels Kettenbrüchen, im Ver- 88
hältniss 74 : 73. Um nun im Interesse der Tastatur-Instrumente die beiden Töne Eis und F vereinigen zu können, mussten wieder eine oder mehrere Quinten unrein gemacht werden. Es ergab sich als das Beste, den Fehler unter alle gleichmässig zu vertheilen, indem man alle Quinten etwas zu klein macht. Die Abweichung der Quinten in diesem jetzt allgemein herrschenden Stimmungssystem ist nun in der That ausserordentlich klein, indem die reine zur temperirten Quinte sich wie 886 : 885 verhält. Dabei verringert sich denn auch der Fehler in der Terz etwas, indem er von $\frac{81}{80}$ auf $\frac{127}{126}$ sinkt.

Die neuere Musik ist nun entschieden harmonisch, und für diesen Fall ist die Voraussetzung nicht richtig, dass Fehler der Terzen weniger schädlich sind, als Fehler der Quinten. Das Widrige falsch gestimmter Intervalle entsteht vornehmlich durch die Schwebungen ihrer Combinationstöne und harmonischen Obertöne. Die Schwingungszahl der stärksten Combinationstöne ist gleich der Differenz der Schwingungszahlen der primären Töne. Im reinen Duraccord:

$$64 : 80 : 96$$

geben beide Terzen den Combinationston 16, die zweite Unteroctave des Grundtons. Aber im Pythagoräischen Accord:

$$64 : 81 : 96$$

geben sie die Combinationstöne 17 und 15, welche bezüglich einen halben Ton höher und tiefer sind, als der richtige Combinationston, miteinander 2 Schwebungen machen in der Zeit, wo der Grundton des Accordes 64 Schwingungen macht. Ist dieser c, mit 256 Schwingungen, so ist die Zahl der Schwebungen der Combinationstöne 8 in der Sekunde, was ein entschiedenes Knarren des Tons giebt. Ausserdem klingen jene beiden Combinationstöne, sobald man auf sie aufmerksam wird, abscheulich zur Harmonie.

Nun sind nicht alle Musikinstrumente gleich empfindlich

gegen Dissonanzen. Singstimmen sind gar nicht an eine Temperatur gebunden, auf den Streichinstrumenten sind es nur die
89 Töne der leeren Saiten. Hier kann also ein fein geübter Musiker den grösseren Härten ausweichen. Das Clavier ist wenig empfindlich gegen Dissonanzen, weil seine Töne zu kurz verhallen, und die Orgel ist wegen der constanten Stärke ihrer Töne zu rauschender Musik mit gehäuften Dissonanzen mehr geeignet, als für ausdrucksvolle von weichem Wohlklange. Aus diesen Gründen konnten sich die zur künstlerischen Musik am besten geeigneten Instrumente mit den Nachtheilen der temperirten Stimmung ziemlich abfinden. Ausserdem werden die Schwebungen, wenn sie nicht sehr schnell sind, wenig fühlbar in schnell bewegter Musik, wenn die Dauer der meisten Töne kürzer ist, als die Dauer der Schwebungen.

Deutlich fühlbar werden die Mängel der Stimmung bei allen langsam sich bewegenden, aushaltenden Tönen, und desto mehr, je kräftiger diese sind. Chöre von Blasinstrumenten sind deshalb für die vollendet künstlerische Musik fast gar nicht anwendbar. Besonders auffallend sind nun die Nachtheile auch in der gegenwärtig sich sehr verbreitenden Physharmonika, um so mehr, als die Combinationstöne an diesem Instrumente wegen seiner besonderen Construction etwas stärker sind, als an anderen. Hier ist der Unterschied rein gestimmter und temperirter Accorde so gross, dass letztere nach ersteren wie Dissonanzen klingen.

Will man also reine Harmonien haben, so bleibt nichts übrig, als jedem Tone der Scala zwei verschiedene Werthe zu geben, je nachdem er Terz oder Quint beziehlich Grundton eines Duraccordes ist, welche Werthe im Verhältniss 80:81 stehen. Ich bezeichne im Folgenden die höheren Töne mit grossen Buchstaben, die niederen mit kleinen. Berücksichtigt man nun noch, dass die oben berechnete Differenz zwischen Eis und F, nämlich $\frac{1}{73}$ nahehin gleich ist der zwischen F und f, welche $\frac{1}{80}$ beträgt, so kann man nahehin die durch Kreuze erhöhten Töne der niederen Reihe gleich den durch b erniedrigten Tönen der oberen setzen, also cis = Des, fis = Ges u. s. w. So erhält man folgende Reihe von Duraccorden zur Verfügung:

Fes* as Ces* es Ges* b Des* f As c Es g B d 90
F a C e G h D fis A cis E gis* H dis*
Fis ais* Cis eis*

Die mittleren seien mathematisch rein, in den äussersten ist bei den mit Sternchen versehenen die erwähnte Verwechslung vorgenommen worden, welche streng genommen allerdings einen Fehler giebt, der aber verschwindend klein ist. In den betreffenden Accorden hat nämlich nur die Terz den kleinen Fehler, den in der gleichschwebenden Temperatur die Quinte hat; er beträgt $\frac{1}{885,6}$. Wenn man diesen Fehler auf die verschiedenen Quinten vertheilen wollte, würde er für jede $\frac{1}{12}$ dieser Grösse betragen, aber diese erhöhte theoretische Genauigkeit wäre praktisch illusorisch, da schon jetzt der ganze Fehler von $\frac{1}{885}$ bei den Quinten an der Grenze dessen liegt, was ein geübtes musikalisches Ohr unterscheiden kann.

Für die praktische Ausführung sind entweder zwei Tastaturen nöthig, wobei es dem Spieler überlassen bleibt, die Töne des Accordes passend in der einen oder anderen Reihe zu wählen, oder man sondert die Töne in 8 Gruppen:

F	a	Cis	f	A	cis
C	e	as	c	E	gis
G	h	es	g	H	dis
D	fis	b	d	Fis	B

Alle Töne jeder dieser Gruppen werden durch einen besonderen Windkanal gespeist, und durch Pedale wird regulirt, dass der Wind entweder der rechten oder linken Gruppe jeder Linie zugeführt wird. Es sind nur vier Ventile nöthig, zu stellen durch vier Pedale; dadurch kann dann das Instrument für jede Tonart, welche im Laufe des Musikstückes eintritt, in richtige Stimmung gebracht werden.

XXIV.

Ueber die arabisch-persische Tonleiter.

Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg. Bd. II S. 216—217. (Manuscript eingeliefert am 2. Juli 1862.)

---

216 Ich habe in einer früheren Sitzung vom 23. Novbr. 1860[1]) ein Sytem der Construction und Stimmung musikalischer Instrumente beschrieben, welches erlaubt, durch alle Tonarten in reinen consonanten Accorden zu spielen. Es sind zu dem Ende doppelt so viel Tonstufen nöthig, als für die gewöhnliche gleichschwebende Temperatur. Es hängt aber noch von einem besonderen Umstande ab, dass man mit dieser Zahl von Tonstufen auskommt. Wenn man vom Tone C aus in aufsteigenden Quinten fortschreitet C — G — D — A — E, so kommt man bei der vierten Quinte auf den Ton E, welcher der natürlichen Terz des Tons C, die ich wie in der früheren Mittheilung e nennen will, bis auf das kleine Intervall $\frac{81}{80}$ nahe kommt. In der griechischen Stimmung wird dieses E statt des Tones e als Terz von C benutzt. Wenn man dagegen von C aus in acht Quintenschritten abwärts geht, C—F—B—Es—As—Des—Ges—Ces—Fes, so kommt man auf den Ton Fes, welcher nur etwa noch um den zehnten Theil des Intervalls $\frac{81}{80}$ sich von e unterscheidet, und praktisch in allen Fällen ohne Bedenken für e gesetzt werden kann. Das damals beschriebene Stimmungssystem beruht wesentlich darauf, dass vertauscht werden

Fes mit e, Ces mit h, Ges mit fis u. s. w.

---

1) Vgl. Verhandlungen Bd. II. Heft III. p. 73. — Diese Sammlung Nr. XXIII.

Ich habe nun gefunden, dass die arabisch-persischen Musiker, obgleich sie ihre Tonleitern nur für einstimmige Musik ausbildeten, doch dieselbe Vertauschung benutzt haben, um reine natürliche Scalen zu erhalten. Die gewöhnliche Ansicht ist, dass die arabisch-persische Scala in 17 Dritteltöne eingetheilt sei. In dem Werke von Kiesewetter über die Musik der Araber finden sich aber die Vorschriften, welche Abdul Kadir und Schafieddin, persische Musiker des XIV. Jahrhunderts, gegeben haben für die Eintheilung des Monochords, und für die Weise, wie die Bunde auf der Laube zu setzen sind. Aus diesen ergiebt sich ganz genau die Construction ihrer Tonleiter, welche wir in den von uns nach Hauptmann's Vorschlag gebrauchten Zeichen folgendermassen schreiben können:

C—Des—d—D—Es—e—E—F—Ges—g—G—As—a—B—h—c—C.

Diese Leiter ist nach einer Reihe von 17 Quinten gestimmt, nämlich:

c—g—d—a—e—h—fis

das fis können wir auch Ges schreiben und dann fortfahren: 217

Ges—Des—As—Es—B—F—C—G—D—A—E.

Die Perser und Araber bilden daraus theils Scalen nach griechischer Art mit Pythagoräischen Terzen und Sexten, theils solche mit natürlichen Terzen und Sexten. Als Tonica ist in der Regel die Quarte der Leiter F zu betrachten.

A. Griechisch

Tonart Uschah: C—D—E—F—G—A—B—C.
Tonart Newa: C—D—Es—F—G—As—B—C.
Tonart Buselik: C—Des—Es—F—Ges—As—B—C.

B. Natürlich

Tonart Rast: C—d—e—F—G—a—B—C.
Tonart Sengule: C—D—e—F—g—a—B—C.
Tonart Rehawi: C—d—e—F—g—As—B—C.
Tonart Hussein: C—d—Es—F—g—As—B—C.
Tonart Hidschef: C—d—Es—F—g—a—B—C.

Bei den späteren alexandrinischen Griechen Didymus und Ptolomaeus im I. und II. Jahrhundert unserer Zeitrechnung

finden wir unter anderen „Tonfarben“ auch ein sogenanntes syntonisches Geschlecht, welches natürliche Terzen enthält, und dessen Tetrachord in die Intervalle

$$\frac{16}{15}, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}$$

getheilt ist. Da wir aber bei den Persern die Unterschiede der natürlichen und Pythagoräischen Stimmung auf ein den Griechen ganz unbekanntes, bei jenen aber consequent durchgeführtes System begründet finden, erscheint es, wenn man eine Communication annehmen will, viel wahrscheinlicher, dass die alexandrinischen Griechen einige Bruchstücke des Persischen Systems aufgenommen haben, als umgekehrt. Dass die Araber diese Systeme von den Persern entlehnt haben, nachdem sie Persien erobert hatten, steht durch die Zeugnisse der arabischen Schriftsteller fest.

Elektrodynamik.

Digitized by Google

XXV.

Ueber die Dauer und den Verlauf der durch Stromesschwankungen inducirten elektrischen Ströme.

Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie. Bd. 83 S. 505–540. (1851.) Vorläufige Notiz im Monatsberichte der Berliner Akademie 1851 S. 287.

Die von Pouillet vorgeschlagene Methode, eine zu mes- 505
sende kleine Zeitgrösse aus der Wirkung zu berechnen, welche während derselben ein elektrischer Strom von bekannter Intensität auf einen Magnet ausgeübt hat, ist von mir für physiologische Zwecke benutzt worden. Im weiteren Verlaufe dieser Messungen sah ich mich genöthigt Versuche anzustellen über die Dauer der durch plötzliche Stromesschwankungen inducirten elektrischen Ströme, welche ich zur Reizung der thierischen Theile gebrauchte, und über die Art, wie der zeitmessende Strom unter dem Einflusse des ihm entgegenwirkenden Schliessungsgegenstromes der Multiplicatorspirale zu strömen anfange. Durch diese Versuche bin ich im Stande gewesen, einzelne Bestätigungen für ein sehr allgemeines mathematisches Princip zu geben, welches sich zur Bestimmung des Verlaufes solcher Strömungen darbot. Die rein physikalischen Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in dem vorliegenden Aufsatze zusammengestellt.

Ich schicke die theoretischen Erörterungen voraus, weil sie für das Verständniss der Anordnung der Versuche nothwendig sind. Man hat bis jetzt das Ohm'sche Gesetz über die Abhängigkeit der Stromstärke von den elektromotorischen Kräften und dem Widerstande der Leitungen nur auf Ströme

von constanter Intensität angewendet oder höchstens auf solche, deren Dauer noch in die Grenzen unmittelbar durch unsere Sinne wahrnehmbarer Zeittheile fällt, wie es z. B. bei den durch Bewegung von Magneten inducirten der Fall ist. Dagegen erregte sein Gebrauch für diejenigen Ströme Bedenken, welche durch Schliessung und Oeffnung eines galvanischen Stromes inducirt werden, weil die dem Ansteigen und Ver-
506 schwinden des inducirenden Stromes entsprechende geringe Dauer derselben zu kurz zu sein schien, als dass die Erfüllung der Grundbedingung des Ohm'schen Gesetzes, nämlich die Ausgleichung der Stromstärke durch die ganze Länge der Leitung, angenommen werden konnte. Bei der Induction durch Unterbrechung der Leitungen ist die inducirende Stromesschwankung nothwendig auf die Zeit beschränkt, während welcher sich die Metalle an der Unterbrechungsstelle von einander lösen. Diese Zeit ist allerdings nicht gleich Null, weil der hier entstehende Funke noch einen Augenblick durch die übergeführten Metalltheilchen die Verbinduug unterhält, aber die Funkendauer ist doch so klein, dass sie bis jetzt noch nicht gemessen werden konnte, und wir deshalb auch ihr Verhältniss zu der Fortpflanzungszeit der Elektricität durch die Leitungen nicht kennen. Dazu kommt, dass auch der Widerstand der inducirenden Leitung während der Unterbrechungszeit uns unbekannt ist, und selbst wiederum von der elektromotorischen Kraft des Oeffnungsgegenstromes abzuhängen scheint. Anders ist es bei der Induction durch Schliessung der Leitungen. Hier finden sämmtliche Ströme von Anfang an Wege von constantem Widerstande, und keiner ist in seiner Dauer durch äussere mechanische Einflüsse beschränkt. Wenn ein elektrischer Strom in einer nicht spiralförmig aufgewundenen Leitung ohne merklichen Anfangsgegenstrom entsteht, ist allerdings wohl während seines Ansteigens keine gleichmässige Vertheilung der Stromstärke in der Leitung vorauszusetzen. Wenn er aber gleichzeitig inducirte Ströme hervorruft, fragt es sich, ob diese nicht das Anwachsen des inducirenden Stromes so verzögern, dass die Ausgleichung der Stromstärke in der ganzen Leitung fortdauernd möglich bleibt, und in der That lässt sich schon aus den bisher bekannten Thatsachen und Gesetzen nach-

weisen, dass Anordnungen, in denen dies zutrifft, ausführbar sein müssen.

Beschränken wir zunächst unsere Erörterungen auf den einfachsten Fall, den, wo eine einfache Leitung geschlossen 507 wird, welche Volta'sche Elemente und eine Spirale enthält. Im Augenblicke der Schliessung fängt die Elektricität an sich in Bewegung zu setzen, aber das Ansteigen des Stromes selbst bringt in der Spirale eine ihm entgegenwirkende elektromotorische Kraft hervor, wodurch seine volle Entwickelung nothwendig verzögert werden muss. Schon Dove[1]) hat aus magnetelektrischen Versuchen den wichtigen Schluss gezogen, dass durch diese Schliessungsinduction der sich entwickelnde Strom niemals überwältigt und in der Richtung umgekehrt, sondern nur vermindert werde; dasselbe wird aus meinen später beizubringenden Versuchsreihen hervorgehen. Denken wir uns den in der Leitung vorhandenen Strom aus dem Batteriestrom von constanter Stärke und einem inducirten Strome von entgegengesetzter Richtung und veränderlicher Stärke zusammengesetzt, so muss die letztere stets kleiner sein als jene des Batteriestromes. Der inducirte Strom allein würde aber während seiner kurzen Dauer eine elektromagnetische Wirkung von bestimmter Grösse hervorbringen. Damit der ihm entgegengerichtete Batteriestrom dieselbe Wirkung hervorbringen könne, muss er eine bestimmte endliche Zeit hindurch auf den Magnet wirken. Wenn aber die elektromagnetische Wirkung eines Stromes von geringerer, der eines anderen von höherer Intensität gleich sein soll, muss ersterer länger dauern, als letzterer. Daraus folgt unmittelbar, dass die Dauer des inducirenden Stromes grösser sein muss, als diejenige Zeit, in welcher der inducirende dieselbe elektromagnetische Wirkung hervorbringt.

Ein ruhender Magnet wird durch den inducirten Strom allein genommen, abgelenkt um einen Bogen proportional:

$$\int_0^\infty i\,dt = \frac{P}{W} J, \qquad (1)$$

---

1) Ueber den Gegenstrom zu Anfang und Ende eines primären. Pogg. Annalen Bd. LVI, S. 365.

wo i die Intensität des inducirten, J die des Batteriestromes
508 bezeichnet, W den Widerstand der Leitung in absoluten Einheiten[1]), t die Zeit und P das nur von den geometrischen Verhältnissen abhängige Potential der Spirale auf sich selbst. Ebenso verursacht der Batteriestrom J, wenn er allein während der sehr kurzen Zeit t auf den Magnet wirkte, einen Ausschlag proportional:

$$\int_0^t J\,dt = Jt.$$

Machen wir:

$$t = \frac{P}{W},$$

so üben beide Ströme gleiche elektromagnetische Wirkung aus und da i immer kleiner als J sein soll, muss nothwendig die Dauer des Stromes i grösser als P/W sein.

Da es uns darauf ankommt, diese Dauer möglichst gross zu machen, um die Fortpflanzungszeit der Elektricität durch die Leitung dagegen verschwinden zu lassen, wollen wir die Bedingungen untersuchen, unter denen dies erreicht wird. Zunächst müssen wir den Nenner W dadurch verkleinern, dass wir den ausser der Spirale vorhandenen Widerstand möglichst verschwinden machen, was sich in der Ausführung durch Anwendung grossplattiger Volta'scher Elemente oder Anordnung von solchen in nebeneinander wirkenden Parallelreihen bis zu jeder beliebigen Grenze wird erreichen lassen. Setzen wir voraus, dies sei geschehen, sodass wir unter W uns nur noch den Widerstand der Spirale zu denken haben. Alsdann wird der Werth des Quotienten P/W nur von der Masse des Drahtes und der Gestalt der Spirale abhängen, aber fast unabhängig sein von der Zahl der Windungen. Denken wir nämlich die Drahtleitung der Spirale in zwei Leitungen von gleicher Länge und halbem Querschnitte zerlegt, welche vom Strome hintereinander durchlaufen werden, so wird sowohl W als P vervierfacht; ersteres weil jetzt die Leitung bei doppelter Länge nur
509 den halben Querschnitt hat, letzteres weil wir jetzt doppelt so viel inducirende, und doppelt so viel inducirte Stromelemente

1) S. Kirchhoff in Pogg. Ann. Bd. LXXVI, S. 426.

haben. Nur in dem Falle kann sich der Werth von P/W dabei ändern, wenn die Dicke der Drähte im Verhältniss zu den Dimensionen der Spirale so beträchtlich ist, dass die Induction an verschiedenen Stellen desselben Querschnittes des Drahtes mit merklich verschiedener Kraft wirkt. Da die Ausgleichungszeit der Stromstärke durch die Leitung wahrscheinlich nur von ihrer Länge abhängt, kann man sie durch Verminderung der Zahl der Windungen bei gleichbleibender Masse des Drahtes jedenfalls kleiner als jede bis jetzt messbare Zeitgrösse machen, ohne dass dabei die Dauer des Inductionsstromes geändert wird. Was den Einfluss einer Vermehrung der Masse des Drahtes betrifft, so giebt der von Neumann für das Potential zweier Strombahnen entwickelte Ausdruck folgenden Anhaltspunkt. Sind ds_1 und ds_2 Längenelemente der Strombahnen, r ihre Entfernung, α der von ihren Richtungen gebildete Winkel, so ist das Potential der Bahnen das Integral:

$$\iint \frac{ds_1\, ds_2}{r} \cos\alpha$$

über beide Bahnen ausgedehnt. Denken wir nun die Länge der Elemente ds_1 und ds_2, so wie sämmtliche lineare Dimensionen der Strombahnen, also auch r, auf das $n$fache vergrössert, so wird auch der Werth jenes Integrals, des Potentials der Bahnen, der $n$fache. Wir erhalten dadurch das Potential einer Spirale, welche der ersten gegebenen geometrisch ähnlich ist, eine n^3 so grosse Masse und einen Draht von der $n$fachen Länge und dem n^2fachen Querschnitt, also dem Widerstande $1/n$ hat. Der Quotient P/W wird also für diese n^2mal so gross sein als für die erste. Daraus geht hervor, dass wir die Dauer des Schliessungsinductionsstromes durch entsprechende Vermehrung der Drahtmassen bis zu jeder beliebigen Grösse vermehren können.

Es wird also jedenfalls möglich sein Bedingungen herzu- 510
stellen, unter welchen die Fortpflanzungszeit der Elektricität durch die Leitung verschwindend klein ist gegen solche Zeittheilchen, während welcher sich die Intensität des Stromes nicht merklich ändert. Nur dadurch, dass in einzelnen Zeittheilchen die Ansteigungsgeschwindigkeit vielleicht unendlich gross würde, könnten Ausnahmen eintreten. Uebrigens will ich

als Anhaltspunkt für die Anschauung gleich vorweg bemerken, dass zur Verwirklichung der aufgestellten Bedingungen gar nicht so sehr grosse Drahtmassen nothwendig sind. Für eine möglichst eng gewickelte Spirale von 2 Pfund Kupferdraht, wie ich sie in den unten beschriebenen Versuchen gebraucht habe, ist die Grösse $P/W = 0{,}00497$ Secunden, während die Fortpflanzungszeit der Elektricität in dem etwa 64 m langen Drahte nach der Bestimmung von Fizeau und Gounelle über 10,000 mal kleiner sein würde.

Wenden wir also nach diesen Vorbemerkungen das Ohm'sche Gesetz auf den bisher betrachteten Fall der Schliessungsinduction in einer einfachen Leitung an. Es sei J die ganze in derselben vorhandene Stromintensität, A die elektromotorische Kraft der Volta'schen Elemente; die übrigen Buchstaben behalten ihre Bedeutung. Die elektromotorische Inductionskraft wird $P\, dJ/dt$ sein, unter der Voraussetzung, welche wir vorläufig machen und später noch experimentell prüfen werden, dass diese Kraft mit der inducirenden Stromesschwankung vollkommen gleichzeitig sei, oder wenigstens nur verschwindend kleine Zeiträume hinter ihr zurückbleibe. Dann ist:

$$JW = A - P\frac{dJ}{dt} \qquad (2)$$

oder:

$$\frac{-\frac{dJ}{dt}}{\frac{A}{W} - J} = -\frac{W}{P}.$$

511 Dies integrirt giebt:

$$\log\left[\frac{A}{W} - J\right] = -\frac{W}{P}t + C,$$

oder, wenn wir $J = 0$ für $t = 0$ setzen:

$$J = \frac{A}{W}\left(1 - e^{-\frac{W}{P}t}\right). \qquad (3)$$

Dadurch ist der Verlauf der Induction vollständig bestimmt; ihre Dauer ist keine begrenzte, sondern die Intensität des ganzen vorhandenen Stromes nähert sich asymptotisch demjenigen Werthe A/W, welcher ihr ohne Berücksichtigung der Induction nach dem Ohm'schen Gesetze zukommt.

In derselben Weise kann der Verlauf der inducirten Ströme in einer beliebigen Anzahl von beliebig verzweigten Leitungen mit einer beliebigen Anzahl aufeinander einwirkender Spiralen bestimmt werden, wenn nur keine Intensitätsänderung von so grosser Schnelligkeit vorkommt, dass das Ohm'sche Gesetz seine Anwendbarkeit verliert. Es gehören hierher sämmtliche Inductionen durch Schliessung von Leitungen, und von den Oeffnungsinductionen wenigstens diejenigen Stromtheile, welche den Funken überdauern. Ich werde späterhin Versuche beschreiben, aus denen sich ergiebt, dass auch die Oeffnungsschläge die ersten vielleicht unregelmässigen Nachwirkungen der plötzlichen Unterbrechung des inducirenden Stromes an Dauer bedeutend übertreffen. Um die Aufgabe ganz allgemein zu lösen, denke man die verzweigten Leitungen in die möglichst geringe Zahl einfacher Umgänge zerlegt.[1]) Es gehöre dem Umgange a die Intensität i_a; sein ganzer Widerstand sei w_a, der Widerstand desjenigen Stückes der Leitung, welches ihm und dem Umgange b gemeinschaftlich zukommt sei w_{ab}, welches man positiv setze, wenn i_a und i_b dieselbe, negativ, wenn sie entgegengesetzte Richtung haben; die Summe der constanten in ihm vorhandenen elektromotorischen Kräfte sei A_a, sein 512
Potential auf sich selbst P_a, das gegen den Umgang b sei Q_{ab}. Die Intensitäten in den einzelnen Zweigen der Leitung, welche Kirchhoff als unbekannte Grössen gebraucht hat, sind bei dieser Art der Zerlegung zu ersetzen durch die algebraische Summe der Intensitäten aller derjenigen Umgänge, denen der betreffende Zweig angehört. Die von Kirchhoff aus den Ohm'schen Principien hergeleiteten Gleichungen, welche aussprechen, dass in jedem Umgange die Summe der elektromotorischen Kräfte gleich sei der Summe aus den Producten der Intensitäten der zugehörigen Zweige und ihrer Widerstände, nimmt dabei folgende Form an, wenn K_a die gesammte elektromotorische Kraft ist, d. h. der Volta'schen Elemente und der Induction zusammen genommen:

$$K_a = i_a w_a + i_1 w_{1.a} + i_2 w_{2.a} + i_3 w_{3.a} + \text{etc.}$$

1) Kirchhoff in Pogg. Ann. Bd. LXXII, S. 497.

Ersetzt man K_a durch seine einzelnen Summanden, so erhält man bei n Umgängen folgendes System von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= i_1 w_1 + i_2 w_{1.2} + i_3 w_{1.3} + \text{etc.} + i_n w_{1.n} \\
&+ P_1 \frac{di_1}{dt} + Q_{1.2} \frac{di_2}{dt} + Q_{1.3} \frac{di_3}{dt} + \text{etc.} + Q_{1.n} \frac{di_n}{dt} \\
A_2 &= i_1 w_{1.2} + i_2 w_2 + i_3 w_{2.3} + \text{etc.} + i_n w_{2.n} \\
&+ Q_{1.2} \frac{di_1}{dt} + P_2 \frac{di_2}{dt} + Q_{2.3} \frac{di_3}{dt} + \text{etc.} + Q_{2.n} \frac{di_n}{dt} \\
A_3 &= i_1 w_{1.3} + i_2 w_{2.3} + i_3 w_3 + \text{etc.} + i_n w_{3.n} \\
&+ Q_{1.3} \frac{di_1}{dt} + Q_{2.3} \frac{di_2}{dt} + P_3 \frac{di_3}{dt} + \text{etc.} + Q_{3.n} \frac{di_n}{dt} \\
&\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \\
A_n &= i_1 w_{1.n} + i_2 w_{2.n} + i_3 w_{3.n} + \text{etc.} + i_n w_n \\
&+ Q_{1.n} \frac{di_1}{dt} + Q_{2.n} \frac{di_2}{dt} + Q_{3.n} \frac{di_3}{dt} + \text{etc.} + P_n \frac{di_n}{dt}\,.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Das zweite System der von Kirchhoff aufgestellten Gleichungen, welche aussprechen, dass die algebraische Summe sämmtlicher in einem Kreuzungspunkt der Zweige zusammen-
513 fliessender Intensitäten gleich sei, wird bei der angegebenen Zerlegung von selbst identisch, weil bei jedem Kreuzungspunkt jede Intensität der zugehörigen Umgänge einmal positiv als zuführend, und einmal negativ als abführend vorkommt. Das System der Gleichungen (4) genügt also für sich allein. Seine Integrale sind:

$$\left.\begin{aligned}
i_1 &= J_1 + c_{1.1} e^{\alpha_1 t} + c_{1.2} e^{\alpha_2 t} + c_{1.3} e^{\alpha_3 t} + \text{etc.} + c_{1.n} e^{\alpha_n t} \\
i_2 &= J_2 + c_{2.1} e^{\alpha_1 t} + c_{2.2} e^{\alpha_2 t} + c_{2.3} e^{\alpha_3 t} + \text{etc.} + c_{2.n} e^{\alpha_n t} \\
i_3 &= J_3 + c_{3.1} e^{\alpha_1 t} + c_{3.2} e^{\alpha_2 t} + c_{3.3} e^{\alpha_3 t} + \text{etc.} + c_{3.n} e^{\alpha_n t}.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Die Grössen J sind hierin diejenigen Werthe von i, welche bei fehlender Induction eintreten würden; man erhält sie, wenn man in den Gleichungen (4) die P und Q gleich Null setzt, und die Werthe der i sucht. Die n Grössen α und die n^2 Grössen c sind Constanten, deren Werthe sich in folgender Weise bestimmen: Man substituire die Werthe der i und der di/dt aus den Gleichungen (5) in die (4), und setze in jeder der n Gleichungen welche für jeden Werth von t gelten müssen,

die Coëfficienten von $e^{\alpha_1 t}$, von $e^{\alpha_2 t}$ u. s. w. einzeln gleich Null. Dadurch erhält man n^2 Gleichungen zwischen den Constanten von der Form:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= w_1\, c_{1\,.\,a} + w_{1\,.\,2}\, c_{2\,.\,a} + w_{1\,.\,3}\, c_{3\,.\,a} + \text{etc.}\\
&+ \alpha_a \left[P_1\, c_{1\,.\,a} + Q_{1\,.\,2}\, c_{2\,.\,a} + Q_{1\,.\,3}\, c_{3\,.\,a} + \text{etc.}\right]\\
0 &= w_{1\,.\,2}\, c_{1\,.\,a} + w_2\, c_{2\,.\,a} + w_{2\,.\,3}\, c_{3\,.\,a} + \text{etc.}\\
&+ \alpha_a \left[Q_{1\,.\,2}\, c_{1\,.\,a} + P_2\, c_{2\,.\,a} + Q_{2\,.\,3}\, c_{3\,.\,a} + \text{etc.}\right]\\
0 &= w_{1\,.\,3}\, c_{1\,.\,a} + w_{2\,.\,3}\, c_{2\,.\,a} + w_3\, c_{3\,.\,a} + \text{etc.}\\
&+ \alpha_a \left[Q_{1\,.\,3}\, c_{1\,.\,a} + Q_{2\,.\,3}\, c_{2\,.\,a} + P_3\, c_{3\,.\,a} + \text{etc.}\right].
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Ausserdem erhält man noch n Bestimmungsgleichungen, wenn man in den Gleichungen (5) die Zeit $t = 0$ setzt, und für i_1 bis i_a die entsprechenden Anfangswerthe derselben. Dann hat man zur Bestimmung der $(n^2 + n)$ Constanten ebenso viele Bedingungsgleichungen, wodurch die Lösung der Aufgabe vollständig bedingt wird. Die Eliminationsgleichung, welche man zur Bestimmung von α_a aus den n Gleichungen des Systems (6), welche α_n und $c_{1.a}$ bis $c_{n.a}$ enthalten, durch Elimination der Grössen c bekommt, ist vom $n$ten Grade, ihre n Wurzeln 514
entsprechen den n Grössen α. Dass alle diese Wurzeln stets reell sind, lässt sich beweisen. Da der Beweis aber sehr weitläufig ist, genüge es hier auf einen ähnlichen zu verweisen, den Cauchy in den Exerc. de Mathém. Tome IV. p. 140 (Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes) für ein etwas einfacheres System als unser (6) führt. Doch lässt sich letzteres auf das von Cauchy zurückführen. Die Frage, ob wohl alle Wurzeln reell sind, ist deshalb von Interesse, weil imaginären Exponenten eine Wellenbewegung der Elektricität entsprechen würde. Sie müssen ausserdem immer negativ sein, weil sonst für $t = \infty$ auch die Grössen i unendlich gross werden würden.

Die Zerlegung der vorhandenen Strömungen in die Einzelströme der Umgänge war im allgemeinen nöthig, weil nur geschlossenen Strömen ein Potential zukommt. Liegen aber die Verzweigungen der Leitung nicht innerhalb der Spiralen, sondern ausserhalb, so kann man jede Spirale als einen geschlos-

senen Umgang ansehen, dem ein Potential zukommt, und die Inductionskräfte der ausgestreckten Stromtheile dagegen vernachlässigen. Man braucht alsdann die Ströme nicht nach den Umgängen zu zerlegen, sondern kann unmittelbar die Formeln von Kirchhoff für die Intensitäten in den einzelnen Zweigen anwenden, indem man nur die Spiralen als den Sitz der inducirten elektromotorischen Kräfte ansieht, und diese in die Rechnung einführt.

Ich gehe jetzt zur Beschreibung der Versuche über, durch welche ich die Anwendbarkeit der gegebenen theoretischen Ableitungen geprüft habe. Bei diesen Versuchen wird die Zeit nicht direct gemessen, sondern aus den Wirkungen der Ströme auf einen Magnet nach einer hier nöthig gewordenen Modification der Methode von Pouillet berechnet. Das Princip der meisten meiner Versuche ist folgendes. Ich bestimme die Wirkung, welche der ansteigende Strom während einer
515 gewissen vorläufig noch unbekannten Zeitdauer hervorbringt, und dann die Intensität, welche er im Augenblicke der Unterbrechung erlangt hatte. Aus einer Reihe von solchen zusammengehörigen Werthen der Intensität und ihres Integrals nach der Zeit lässt sich dann bestimmen, welche Function der Zeit die Intensität sei.

Für die Versuche habe ich eine neue Art von galvanischer Wippe gebraucht, welche bezweckt verschiedene Stromleitungen in sehr kurz auf einander folgenden Augenblicken zu schliessen oder zu öffnen. Dieselbe ist dargestellt in Fig. 2 Taf. I. von oben gesehen, in Fig. 1 der Querschnitt *AB*. Auf dem Brettchen *CCDD* (0,126 m lang, 0,197 m breit) sind drei horizontale zweiarmige in Spitzen drehbare Hebel angebracht, welche ihrer Hauptmasse nach aus Elfenbein bestehen. In den Figuren ist Elfenbein durch die feine Punktirung angedeutet. Der grösste und oberste der Hebel *aabb* hat seine Axe bei *oo*; die beiden anderen *cd* stehen rechtwinkelig gegen ihn, sodass sich ihre Enden *c* unterhalb des Endes *aa* von jenem befinden, und haben ihre Axen bei *ee*. Jeder der beiden trägt je zwei von einander isolirte Metallstücke, welche verschiedenen Stromleitungen angehören. Ihre nach aussen gewendeten Hälften tragen nämlich zunächst der Axe die Drahtklemme *g*, welche durch

eine auf dem Elfenbein befestigte Messingplatte, mit der am äusseren Ende befindlichen Schraube *d* in leitender Verbindung steht. Letztere ist durch eine Gegenmutter festzustellen, endet unten in einer Kuppe von Gold, welche auf dem am Brette befestigten Goldplättchen *i* ruht. Dieses steht mit der Klemmschraube *k* und dem Quecksilbernäpfchen *p* in Verbindung. Die Klemmschraube *g* dagegen trägt einen Draht, welcher in das Quecksilber des Näpfchens *q* taucht. Die metallische Leitung ist zwischen dem Näpfchen *p* und *q* also hergestellt, so lange das untere Ende der Schraube *d* auf dem Plättchen *i* ruht. Diese Berührung wird durch die Feder *ll* unterhalten. Ebenso trägt die andere Hälfte eines jeden der beiden Hebelchen eine Leitung, welche mit dem Quecksilbernäpfchen *r* an- 516
fängt, durch den Draht *rf* zu der dem Hebel angehörigen Drahtklemme *f* und dann zu dem Goldplättchen *c* am mittleren Ende des Hebels geht. Ihre Fortsetzung liegt auf dem oberen Hebel. Jedem Plättchen *c* entspricht an diesem eine Schraube *m*, von derselben Art wie *d*, mit Gegenmutter und Goldkuppe, welche mit der Drahtklemme *n* und durch den Draht *ns* mit den Quecksilbergefäsen *s* in leitender Verbindung steht. Sinkt das Ende *aa* des Hebls *aabb* herab, so stossen die Kuppen der Schrauben *m* auf die Goldplatten *c*, und es werden die Näpfe *r* und *s* in leitende Verbindung gebracht. Der Hebel trägt am Ende *a* an zwei Stahlstäben das Gewicht *E* (87 Grm. schwer), dessen Gestalt aus Fig. 10 Taf. III. *E* erhellt. Es kann auf den Stäben verschoben, und an jeder beliebigen Stelle durch Anziehen des Schraubenkopfes festgeklemmt werden. Am Ende *b* befindet sich der stählerne pyramidalische Fortsatz *t*, dessen Spitze von unten gegen die horizontale Stahlplatte *u* drückt. Diese wird von dem Hebel *uw* getragen, welcher bei *v* um eine verticale Axe drehbar ist. Drückt man den Griff *w*, dessen Bewegungen durch die Schrauben *x* möglichst beschränkt werden, nach links herüber, so wird die Spitze von *t* frei, und vermöge der Schwere des Gewichtes fallen die Schrauben *m* auf die Enden *c* der kleineren Hebel, drücken diese nieder, während sich die Schrauben *d* von den zugehörigen Platten abheben, sodass die beiden Leistungen *r* und *s* geschlossen, die *pq* aber unterbrochen werden. Uebereinander geschichtete

Kautschuk- und Lederplatten *hh* nehmen den Stoss auf, und verhindern das Zurückspringen.

Beim Gebrauch werden die beiden Schrauben *m* so gestellt, dass sie nicht ganz gleichzeitig auf die Platten *c* auftreffen. Da die Auslösung des oberen Hebels möglichst gleichförmig geschieht, und alle Umstände während des Fallens immer dieselben sind, so bleibt auch bei unveränderter Stellung der Schrauben die Zwischenzeit der beiden Stösse ziemlich gleich, und erlaubt die Vergleichung der Wirkungen, welche
517 elektrische Ströme bei verschiedener Anordnung der Schliessung und Oeffnung ihrer Leitungen während dieser Zeit hervorbringen. Durch Veränderung in der Stellung der Schrauben kann die Zwischenzeit leicht bis auf $\frac{1}{1000}$ Secunde und weniger vermindert werden, während die Abweichungen der einzelnen Versuche selten über $\frac{1}{4}$ ihrer mittleren Grösse gehen. Bei jedem Stosse wird eine Leitung des zugehörigen unteren Hebels geschlossen, die andere geöffnet. Letzteres geschieht nicht genau gleichzeitig mit ersterem, sondern wie ich als Resultat der Versuche hier gleich anführen will, etwa $\frac{1}{3000}$ Secunde später, weil der Stoss Zeit gebraucht, sich durch die Masse des Elfenbeins hin fortzupflanzen.

Da die Berührungsstellen der Goldkuppen und Goldplatten dem Strome einen sehr veränderlichen Widerstand entgegenstellen, muss man die Widerstände der übrigen Leitungen stets so gross machen, dass jene Ungleichheit dagegen verschwindet. Ferner muss man sich versichern, dass kein Klirren der Metalltheile an den Schliessungsstellen vorkomme. Das geschieht am besten durch eine kräftig durchströmte Spirale, deren Extracurrent bei der Unterbrechung des Stromes in einer Nebenleitung eine merkliche physiologische Wirkung hervorzubringen vermag. Bezeichnen wir die Theile derjenigen Seite des Apparates wo der erste Stoss stattfindet mit einem Striche, die der anderen mit zweien, so leite man den Strom der Spirale durch $p_{,}$ $q_{,,}$ verbinde $p_{,}$ durch einen Draht mit $s_{,}$ und $q_{,}$ mit $r_{,}$. Lässt man den oberen Hebel fallen, so bleibt bei der Unterbrechung der Leitung $p_{,}$ $q_{,}$ der Strom der Spirale durch $p_{,}$ $s_{,}$ $n_{,}$ $m_{,}$ $c_{,}$ $f_{,}$ $r_{,}$ $q_{,}$ geschlossen. Klirren die Metallstücke nicht auf einander, so erfolgt auch kein Schlag; wohl aber zeigt sich

dieser beim allerleisesten Klirren. Ebenso controllirt man die zweite Seite der Wippe. Kommt es bei der ersten Seite, wie es gewöhnlich der Fall ist, nur darauf an, die leitende Berührung bis zu dem Augenblicke zu unterhalten, wo $p_{,,}$ $q_{,,}$ unterbrochen wird, so führt man die Leitung des Extracurrents durch diese Stelle. Sollte dann auch noch nach dem zweiten Stosse die erste Unterbrechungsstelle klirren, so fühlt man 518
keine Wirkung von dem Extracurrent, weil dieser keine Leitung mehr hat.

Die bisher beschriebene Form des Instruments ist sehr brauchbar, wo es sich um eine angenäherte Zeitbestimmung einzelner, namentlich sehr schnell vorübergehender Stromvorgänge handelt, und es lässt sehr mannigfaltige Combinationen von Oeffnungen und Schliessungen zu. Für genauere Messungsreihen, namentlich etwas grösserer Zeiträume, konnte ich aber das Fallen des oberen Hebels trotz aller aufgewendeten Sorgfalt nicht regelmässig genug machen, und nur durch sehr häufige Wiederholung derselben Versuche erhielt ich Mittelzahlen, welche mit der Rechnung ziemlich gut stimmten. Ich habe deshalb zu solchen Zwecken die Wippe in der in Fig. 3 Taf. I. dargestellten Weise mit Benutzung ihrer Haupttheile angewendet. Die Stücke x, u, v, w und die Quecksilbernäpfe der Fig. 2 Taf. I. sind weggenommen, der obere Hebel umgewendet, sodass sein Ende aa nach dem Rande DD des Brettes sieht, letzteres in senkrechter Stellung, CC nach unten, befestigt. In der abgebildeten Stellung befindet sich der Hebel fast in labilem Gleichgewichte, und sein oberer Theil hat ein ganz geringes Uebergewicht nach der vom Brette abgewendeten Richtung. Er wird in dieser Lage durch den kleinen Elektromagnet $\vartheta\vartheta$ erhalten, dessen Eisenkern das am Hebel befestigte Eisenstückchen ηb festhält. Sobald der Strom in seiner Drahtumwickelung unterbrochen wird, setzt sich der Hebel in der sanftesten und gleichmässigsten Weise mit zunehmender Geschwindigkeit in Bewegung. Während seines Falles taucht zunächst die Platinspitze γ in die breite und sorgfältig rein erhaltene Quecksilberfläche $\zeta\zeta$ ein. In diese Spitze endigt der horizontale, aus starkem Kupferdraht angefertigte Hebelarm $\beta\gamma$, der durch die Klemmschrauben nn und das Querholz ka be-

festigt ist; ein kupferner Ansatz δ dieses Armes taucht dauernd in das Quecksilber des Näpfchens ε. Im Momente der Berührung von γ und ζ wird also die Leitung zwischen ε und ζ
519 hergestellt. Indem der Hebel weiter fällt, stösst endlich die Kuppe unterhalb seines Endes b auf eines der Plättchen c, und löst dadurch die Leitung am andern Ende des zugehörigen untern Hebels aus. Das Aufstossen geschieht wegen des geringeren Uebergewichts hier stets mit kleinen Rücksprängen, sodass die leitende Verbindung zwischen b und c für die Versuche nicht zu gebrauchen ist. Bei dieser Anordnung schliesst der Apparat also zuerst eine Leitung und einen Augenblick später öffnet er eine andere; eine andere Combination kann er nicht ausführen. Da aber die Hauptstörungen der regelmässigen Bewegung des oberen Hebels, welche von der Art seiner Auslösung und von dem Stosse halbelastischer Körper gegen einander herrühren, so weit es nöthig ist, beseitigt sind, so vollführt er seine Aufgabe mit viel grösserer Regelmässigkeit, welche eine genauere Bestätigung der theoretisch gefundenen Gesetze zulässt. Natürlich muss jede Erschütterung der Quecksilberfläche vermieden werden, selbst eine so kleine, wie ein fern fahrender Wagen verursacht. Ich habe deshalb die Messungsreihen des Abends vollführt. Verändern konnte ich die Zwischenzeit durch Vermehrung oder Verminderung des Quecksilbers.

Das Ansteigen der Stromintensität in einer einfachen Leitung mit einer Spirale konnte nur mittels der ersten Form der Wippe untersucht werden, das in einer verzweigten Leitung dagegen auch mit der zweiten. Aus den vorher angegebenen Ursachen waren die ersteren Versuche viel weniger genau als die zweiten, ihre Ergebnisse sind aber für später zu beschreibende mit derselben Form der Wippe ausgeführte Versuche nothwendig. Ich werde die Art ihrer Anstellung deshalb hier kurz beschreiben.

Der Kreis wurde gebildet durch vier Daniell'sche Elemente und das Multiplicatorgewinde, welches ich zu den zeitmessenden physiologischen Versuchen gebraucht hatte. Sein Widerstand war wegen der Länge und Feinheit seines Drahts 30mal so gross, als der der Batterie. Es diente gleichzeitig

als inducirende Spirale und als Galvanometer; neben ihm hing 520
ein Magnet mit Spiegel. Für die Berechnung der Stromintegrale aus den Schwingungen des Magnets ist es am vortheilhaftesten vor dem Versuche, den Schwingungsbogen möglichst klein zu machen, und den Strom in dem Augenblicke eintreten zu lassen, wo der Magnet durch den Meridian in solcher Richtung hindurchgeht, dass der Strom seine Bewegung beschleunigt. Nennen wir i die Intensität des Stromes in der Spirale in Scalentheilen gemessen, b_1 den Ausschlag des Magnets vor, b_2 denselben nach Einwirkung des Stromes, T die Schwingungsdauer, so ist für kleine Ausschläge und eine kleine Stromesdauer:

$$\int i\,dt = \frac{T(b_2 - b_1)}{2\pi}. \tag{7}$$

Mit F sind im Folgenden die Differenzen $(b_2 - b_1)$ bezeichnet, welche erhalten wurden, wenn der Strom durch die erste Schliessung der Wippe geschlossen und durch die zweite Oeffnung derselben unterbrochen worden war, mit G dagegen diejenigen, bei denen ausserdem durch die zweite Schliessung eine Nebenschliessung der Spirale geschlossen wurde, welche denselben Widerstand hatte als die Batterie. Letztere Bedingung war leicht hinreichend genau zu erfüllen, da die Schwankungen des Widerstandes der Elemente gegen den der ganzen Leitung sehr unbedeutend waren. Es bezeichne W den Widerstand der Spirale und Batterie zusammengenommen, und w den der Batterie und den ihr gleichen der Nebenschliessung. Aus (7) und (3) ergiebt sich:

$$F = \frac{2\pi A}{TW}\left\{t - \frac{P}{W}\left(1 - e^{-\frac{W}{P}t}\right)\right\}. \tag{8}$$

Die Wirkung G ist um den Extracurrent grösser, welcher sich hier durch die Nebenschliessung ergiessen kann; derselbe ist gleich iP/W, was zu F addirt giebt:

$$G = \frac{2\pi A}{TW}t.$$

Berücksichtigt man, dass die Nebenschliessung um die 521
Zeit z früher geschlossen, als die der Batterie unterbrochen wird, so findet man mit Weglassung der mit den höheren

Dimensionen der kleinen Grössen z und w/W multiplicirten Glieder:

$$G = \frac{2\pi A}{TW}\left\{t - \frac{z}{2}\right\}. \tag{9}$$

Um die Grösse z, die Fortpflanzungszeit des Stosses durch das Elfenbein des zweiten unteren Hebels, zu finden, wurden die Wirkungen f des Stromes beobachtet, wenn er durch die zweite Schliessung geschlossen, durch die zweite Lösung unterbrochen wurde. Es ist:

$$f = \frac{2\pi A}{TW}\left\{z - \frac{P}{W}\left(1 - e^{-\frac{W}{P}z}\right)\right\}.$$

Daraus ergiebt sich angenähert:

$$z^2 = \frac{PfT}{\pi A}. \tag{10}$$

Die nicht ganz constanten Grössen A und W wurden durch Ablenkungsversuche ermittelt, bei denen nur $\frac{1}{142{,}06}$ des Stromes durch den Multiplicator kreiste, weil der ganze zu heftig auf den Magnet wirkte. Ihre Veränderungen waren sehr unbedeutend. Um z zu finden, habe ich zunächst aus denjenigen Beobachtungen, wo t einen hohen Werth hatte, und deshalb das Glied mit t im Exponenten in Gleichung (8) sehr klein wird, einen angenäherten Werth von P gesucht; mit dessen Hülfe erhält man aus (10) leicht einen hinreichend genauen Werth von z, um in einer zweiten Annäherung die Werthe zu finden, mittels deren die Berechnung ausgeführt ist, deren Resultate ich hier zusammenstelle. (Siehe umstehende Tabelle.)

Die Fortpflanzungszeit des Stosses z fand sich 0,000337 Secunden, ihr entsprach im Mittel von 14 Versuchen der Ausschlag $f = 0{,}253$ Scalentheile. So kleine Ausschläge sind leider wegen der Luftströmungen im Magnetkasten schwer mit Sicherheit zu messen. Wenn der Schliessungsgegenstrom der Multiplicatorspirale die Stromstärke nicht verminderte, würde dafür der Ausschlag 1,212 entstanden sein. Die ganze Grösse des Inductionsstromes beträgt bei dem entsprechenden Zustande der Batterie 4,323 Scalentheile.

Man ersieht aus der Gleichung (9), dass der störende Einfluss des Inductionsstromes auf die Messungen der Zeit zwischen

522

Nr.	G		F			Differenz	Zeit in $\frac{1}{100}$ Secdn. berechnet
	Zahl der Versuche	beobachtet	Zahl der Versuche	beobachtet	aus G berechnet		
11	8	0,981	8	0,356	0,324	+ 0,032	0,038
4	24	2,286	22	0,920	0,870	+ 0,050	0,068
3	16	2,950	32	1,167	1,229	− 0,062	0,083
2	17	3,869	32	1,950	1,797	+ 0,153	0,103
10	15	4,076	20	1,120	0,928	+ 0,192	0,108
7	6	6,500	13	3,723	3,724	− 0,001	0,162
5	14	10,502	11	7,178	7,213	− 0,035	0,252
13	12	10,867	12	7,862	7,550	+ 0,312	0,260
1	8	10,865	15	7,887	7,750	+ 0,137	0,261
6	11	15,876	16	12,731	12,336	+ 0,395	0,372
12	17	16,212	12	12,995	12,679	+ 0,316	0,381
14	11	16,267	7	12,725	12,734	− 0,009	0,382
9	7	23,866	9	20,256	20,274	− 0,018	0,556
8	10	24,762	8	21,062	21,101	− 0,039	0,566

erster Schliessung und zweiter Lösung der Wippe nach Pouillet's Methode durch die beschriebene Einschaltung einer Nebenleitung beseitigt werden kann. Will man die Zwischenzeit der anderen Zeitmomente der Wippe kennen lernen, so muss man die Fortpflanzungszeit des Stosses durch das Elfenbein berücksichtigen, welche ich übrigens gleich gefunden habe, sowohl in beiden Hebeln, als auch bei verschiedenen Stellungen der aufstossenden Schrauben des oberen Hebels. Insbe- 523
sondere ergiebt sich aus den aufgestellten Formeln, was wir in der Folge noch gebrauchen werden, dass bei vollständiger Gleichzeitigkeit der ersten Lösung und zweiten Schliessung, der zeitmessende Ausschlag, den man bei eingeschalteter Nebenleitung zwischen erster Schliessung und zweiter Lösung erhält, 1,832 Scalentheile beträgt. Kleine Aenderungen in dem Zustande der Batterie haben auf so kleine Ausschläge kaum einen Einfluss.

Ich gehe nun zu den besseren Messungen über, welche ich mit der zweiten Form der Wippe und im verzweigten Schliessungsdrahte angestellt habe. Der Apparat kann dabei nichts weiter ausführen, als eine Stromesschliessung, und nach einer

gewissen kleinen Zwischenzeit eine Oeffnung. Die Stromleitung hatte drei Zweige. Der erste a enthielt die galvanische Batterie, acht Daniell'sche Elemente, je vier hinter, je zwei nebeneinander, der zweite b einen dünnen Platindraht von 1,5 m Meter Länge, der zickzackförmig hin und her gebogen auf einem Brettchen befestigt war, so dass er keine merkliche inducirende Wirkung ausüben konnte, der dritte c eine möglichst eng gewickelte Spirale von 2 Pfund Kupferdraht. Sie bestand aus zwei parallel laufenden Drähten, jeder etwa 32 m lang, welche für diese Versuche hintereinander als ein Draht von 64 m in die Leitung eingefügt waren. Die Höhe der Spirale ist 40 mm, der Durchmesser des inneren Lumens 20 mm, der ihrer äusseren Peripherie 87 mm. Der fallende Hebel der Wippe schloss zunächst die Leitung a, und öffnete dann entweder a oder c. Im ersteren Falle konnte sich der Endgegenstrom der Spirale durch den Zweig b entladen; im letzteren wurde ihm jede Leitung abgeschnitten. Die Wirkung der Ströme wurde durch die Ablenkungen eines Magnetstäbchens gemessen, welches parallel der einen Grundfläche der Spirale an einem Coconfaden schwebte. Die Ausschläge des Magnets wurden mit Hülfe von Spiegel, Scala und Fernrohr in der bekannten Weise beobachtet.

524 Für die Anwendung der zu prüfenden Gesetze auf die vorliegenden Versuche dürfen wir die inducirende Wirkung der ausserhalb der Spirale liegenden einfachen Drahtleitungen vernachlässigen, und können die Inductionswirkung einer elektromotorischen Kraft gleich setzen, welche nur in dem Zweige c ihren Sitz hat. Bezeichnen wir mit p das Potential der Spirale, mit i_a, i_b, i_c die Intensitäten, mit w_a, w_b, w_c die Widerstände der drei Zweige a, b, c, mit A die elektromotorische Kraft der Batterie in a, so ist:

$$i_a = i_b + i_c$$

$$A - i_a w_a = i_b w_b = i_c w_c + p \frac{d i_c}{dt} .$$

Durch Elimination von i_a und i_b erhalten wir:

$$A w_b = i_c (w_a w_b + w_a w_c) + p (w_a + w_b) \frac{d i_c}{d t} .$$

Der Kürze wegen bezeichnen wir die Grösse $w_a w_b + w_a w_c + w_b w_c$ mit N; das Integral wird dann:

$$i_c = \frac{A w_b}{N}\left\{1 - e^{-\frac{Nt}{p(w_a + w_b)}}\right\}. \tag{11}$$

Daraus findet sich ferner:

$$i_b = \frac{A}{w_a + w_b} - \frac{A w_a w_b}{N(w_a + w_b)}\left\{1 - e^{-\frac{Nt}{p(w_a + w_b)}}\right\}. \tag{12}$$

$$i_a = \frac{A}{w_a + w_b} - \frac{A w_b^2}{N(w_a + w_b)}\left\{1 - e^{-\frac{Nt}{p(w_a + w_b)}}\right\}. \tag{13}$$

Während also i_c von 0 an steigend sich asymptotisch dem Werthe nähert, welcher ihm dauernd in dem verzweigten Systeme zukommt, haben i_b und i_a anfangs den Werth, welcher ihnen bei Abwesenheit der Leitung a zukommen würde, ersteres sinkt, letzteres steigt zu dem Werthe, welcher der dreitheiligen Leitung entspricht.

Wir können am Magnet nur die Wirkung von i_c beobachten. Wenn bei der Unterbrechung des Stromes die Leitung c selbst geöffnet wird, haben wir nichts als die Wirkung des ansteigenden Stromstückes. Sei F die Differenz der Ausschläge 525
des Magnetes, dann ist nach (7) und (11):

$$\frac{TF}{2\pi} = \int_0^t i_c dt = \frac{A w_b}{N} t - \frac{A w_b (w_a + w_b) p}{N^2}\left\{1 - e^{-\frac{Nt}{p(w_a + w_b)}}\right\}.$$

Bezeichnen wir den Werth von i_c zur Zeit der Unterbrechung des Stromes mit J_c, so ist:

$$\frac{TF}{2\pi} = \frac{A w_b}{N} t - \frac{(w_a + w_b) p}{N} J_c. \tag{14}$$

Wird dagegen nicht die Leitung c, sondern a unterbrochen, so ist bis zum Augenblicke der Unterbrechung der Verlauf der Ströme ganz derselbe wie im ersten Falle, nachher aber bildet sich ein Extracurrent in der Leitung b und c, dessen Grösse der Intensität, welche im Augenblicke der Unterbrechung in der Spirale stattfindet, proportional sein muss. Dadurch wird

die Gesammtwirkung G auf den Magnet grösser als F in dem vorigen Falle. Wie oben in Gleichung (1) ergiebt sich:

$$\frac{T(G-F)}{2\pi} = \frac{p J_c}{w_b + w_c} \tag{15}$$

Um die Gleichungen (14) und (15) zur Berechnung der Versuche geschickter zu machen, setzen wir:

$$\left.\begin{aligned} \frac{(G-F)N}{(w_b+w_c)AC} &= E \\ \frac{FN^2}{(w_a+w_b)(w_b+w_c)^2 AC} + E &= z \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\frac{2\pi p \,.\, w_b}{TC(w_b+w_c)^2} = a. \tag{17}$$

Darin ist C eine vorläufig willkürliche Constante. Es ist alsdann:

$$E = a\left[1 - e^{-\frac{z}{a}}\right]. \tag{18}$$

Die Werthe von E und z lassen sich aus den einzelnen zusammengehörigen Werthen von F und G berechnen, wenn die dazu gehörigen von w_a, w_b, w_c und A gegeben sind. Die
526 Widerstände der Drähte w_b und w_c sind bei allen einzelnen Versuchen dieselben, und im Vergleich zu einem als willkürliche Einheit gebrauchten Drahte b bestimmt worden. Es fand sich:

$$w_b = 2{,}7266\, b$$
$$w_c = 2{,}5146\, b.$$

In w_a ist aber der veränderliche Widerstand der Kette einbegriffen, und diese Grösse musste deshalb ebenso wie die elektromotorische Kraft A durch besondere, zwischen die Inductionsversuche eingeschaltete Intensitätsmessungen bestimmt werden. Da der Strom der Batterie bei derjenigen Anordnung der Leitung, welche für die Inductionsversuche diente, viel zu heftig auf den Magnet wirkte, um dauernde Ablenkungen beobachten zu können, wurden statt des Zweiges c (der Spirale) zwei andere Drahtstücke m und q eingeschaltet, und die Spirale endlich wieder als Nebenleitung von q, sodass nur ein sehr kleiner Theil des Stromes hindurchging. Bei dieser Anordnung beobachtete ich die Intensität einmal (J_1) ohne weitere

Einschaltung, dann (J_2) mit Einschaltung des Drahts b in die Leitung a. Es ist:

$$m = 2{,}8141\ b$$
$$q = 0{,}0193\ b.$$

$$w_a = \left[\frac{J_2}{J_1 - J_2} - 1{,}3848\right] b$$

$$A = \frac{J_1 J_2 (w_b + m + q)(w_c + q)}{(J_1 - J_2) w_b q}\, b.$$

Dadurch sind alle zur Berechnung von E und z nöthigen Data gegeben. Die Constante C setzte ich, um die Rechnung möglichst zu vereinfachen:

$$C = \frac{w_b q}{(w_b + m + q)(w_c + q)}.$$

Dann ist:

$$A\,C = \frac{J_1\,J_2}{J_1 - J_2}\, b.$$

Der Werth der Constante a der Gleichung (17) ist nur von Grössen abhängig, welche bei allen Versuchen dieselben bleiben. Unter diesen kommt die Potentialgrösse p vor, welche 527
nicht wohl anders als aus den Resultaten der Inductionsversuche bestimmt werden kann. Ich habe deshalb den passendsten Werth für a nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. Streng genommen müsste das so geschehen, dass die Werthe von F, welche nach den zugehörigen von G berechnet werden, möglichst wenig von den beobachteten abweichen, indessen ist die Abhängigkeit zwischen F und G, welche in der Gleichung (18) mit Berücksichtigung von (16) ausgesprochen wird, so verwickelt, dass weder F durch G, noch G durch F geschlossen ausgedrückt werden kann. Die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate macht deshalb grosse Weitläufigkeiten. Ich habe vielmehr die Rechnung so geführt, dass die Werthe von E aus z berechnet, möglichst wenig von denen, welche die erste der Gleichungen (16) aus den Beobachtungen giebt, abweichen. Das Resultat kann sich nicht wesentlich von dem der strengeren Rechnung unterscheiden, weil die Fehler von E denen von F nahehin proportional sind, und die letzteren wenig Einfluss auf die Grösse z haben. Das F hebt sich

nämlich aus der zweiten Gleichung (16) bis auf einen verhältnissmässig kleinen Rest heraus. Aus den Fehlern von E können dann schliesslich die von F mit hinreichender Genauigkeit leicht berechnet werden. Den Werth der Constante a fand ich auf diese Weise für die folgende Versuchsreihe:

$$a = 0{,}087\,058.$$

Ueber die in der folgenden Tafel zusammengestellten Zahlen ist noch zu bemerken: Die Intensitäten J_1 und J_2 sind bei der vorher beschriebenen Anordnung der Leitung ermittelt worden durch je eine Bestimmung der Stellung des Magnetes bei kreisendem Strome. Jede dieser Bestimmungen beruht wiederum auf 5 Ablesungen der Schwingungsgrenzen. Die Correctionen wegen der Verwandlung der abgelesenen Tangenten des doppelten Winkels in doppelte Tangenten des einfachen Ablenkungswinkels sind angebracht. Bei den Inductionsversuchen bezeichnen F und G die durch die Stromwirkung her-
528 vorgebrachten Vergrösserungen des Ausschlags, d. h. des halben Schwingungsbogens. Jede dieser Zahlen beruht auf zwei Ablesungen der Schwingungsgrenzen vor und fünf solchen nach der Einwirkung des Stromes. Nach Beendigung dieser Ablesungen wurde der Magnet durch einen seiner Bewegung entgegenwirkenden Strom von gleicher Grösse, wie der welcher ihn in Bewegung gesetzt hatte, wieder in sehr kleine Schwingungen zurückgebracht. Die sehr kleinen Correctionen wegen der Tangenten und der Abnahme der Schwingungsbögen sind angebracht. Erstere betragen nur wenige Hunderttheile, letztere höchstens nur ein Drittel eines Scalentheiles. Neben den beobachteten Werthen von F befinden sich diejenigen, welche nach der Rechnung den zugehörigen Werthen von G entsprechen. Die Versuchsgruppen 1 bis 5 sind in unmittelbarer Folge hintereinander angestellt, ebenso 6 bis 12, und in der Reihenfolge ihrer Anstellung aufgeführt worden.

	Beobachtete Werthe von G.	Beobachtete Werthe von F.	Mittel der beobachteten Werthe G.	Mittel der beobachteten Werthe F.	Berechnete Werthe von F.	Differenzen.	Zeit in Secunden	
J_1 J_2	151,12 109,29							
1	80,85 80,70 80,80 80,75	67,21 67,36 67,18	80,775	67,243	67,391	−0,148	0,01569	
J_2 J_1	109,92 152,66							
2	70,98 70,08 70,38 70,83	56,71 57,26 56,66	70,567	56,877	57,234	−0,357	0,01379	
J_1 J_2	153,12 110,09							
3	58,39 58,79 58,64 58,74	45,37 45,47 45,57	58,640	45,470	45,562	−0,092	0,01163	
J_2 J_1	111,26 153,06							
4	50,15 50,90 50,45 50,95	38,09 38,14 38,14	50,613	38,123	37,836	+0,287	0,01018	529
J_2 J_1	152,66 110,88							
5	40,92 40,82 40,97 41,07	28,75 28,85 28,75	40,945	28,783	28,727	+0,056	0,00844	
J_2 J_1	110,76 152,20							
J_1 J_2	149,05 108,97							
6	40,12 39,52 39,57 39,62	27,80 27,65 27,50	39,708	27,650	27,756	−0,106	0,00854	
J_2 J_1	109,39 149,62							

	Beobachtete Werthe von		Mittel der beobachteten Werthe		Berechnete Werthe von *F.*	Differenzen	Zeit in Secunden
	G.	*F.*	*G.*	*F.*			
7	28,75 29,20 29,10 29,05	18,41 18,56 18,11	29,025	18,360	18,086	+0,274	0,00629
J_1 J_2	150,22 109,52						
8	20,26 20,66 20,56 20,76	11,39 10,99 11,09	20,560	11,157	10,998	+0,159	0,00463
J_2 J_1	109,51 150,19						
9	12,09 12,84 13,19 13,09	5,27 5,27 5,57	12,802	5,370	5,317	+0,053	0,00303
J_1 J_2	150,27 109,53						
10	7,77 8,12 8,12 8,32 8,47	2,76 2,71 2,66 2,81	8,160	2,735	2,551	+0,184	0,00201
J_2 J_1	109,32 149,50						

530 Die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung scheint hinreichend gross, um die Richtigkeit der aufgestellten Theorie zu beweisen. Die Abweichungen zwischen beiden sind kleiner als die der einzelnen Beobachtungen unter einander, zeigen aber noch eine gewisse Regelmässigkeit, welche vielleicht von Fehlern der Widerstandsmessungen oder davon herrühren mag, dass bei Unterbrechung der Spiralenleitung der Extracurrent doch nicht ganz so vollständig ausgeschlossen wurde, als wir angenommen haben. Der letztere fliesst wenigstens noch so lange, als der Funke dauert. Dessen Dauer ist zwar bisher noch immer verschwindend klein gefunden worden, da es in unsern Untersuchungen aber auf Hunderttausendtheile von Secunden ankommt, kann es noch zweifelhaft erscheinen,

ob sie nicht genüge, die elektromotorische Wirkung in den Zehnteln der Scalentheile zu verändern.

Wir haben bei dem eingeschlagenen Verfahren das aufgestellte Gesetz über den Verlauf des Inductionsstromes nicht direct geprüft, d. h. wir haben nicht die Intensität als Function der Zeit bestimmt, sondern wir haben nur die Abhängigkeit zwischen der Intensität und ihrem Integral nach der Zeit bestimmt. Es könnte noch gefragt werden, ob dieses Verfahren nicht eine Zweideutigkeit zulasse, ob nicht auch eine andere Function der Zeit dieselbe Abhängigkeit zwischen ihr selbst und ihrem Integral gebe. Ich will deshalb noch beweisen, dass durch die experimentell erwiesene Abhängigkeit zwischen F und G auch i als Function von t vollkommen und eindeutig bestimmt sei.

Als erwiesen durch die Versuche betrachten wir die Abhängigkeit zwischen G und F, welche ausgesprochen ist durch die Gleichungen (16) und (18):

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{(G-F)N}{(w_b+w_c)\,AC} = E \\[2ex] \dfrac{FN^2}{(w_a+w_b)(w_b+w_c)^2\,AC} + E = z \end{array}\right\} \qquad (16)$$

und mit einer leichten Umformung:

$$\log\left[1-\frac{E}{a}\right] = -\frac{z}{a}. \qquad (18)$$ 531

Darin ist C eine beliebige Constante, und a eine solche, deren Bedeutung wir noch zu bestimmen haben werden. Dazu kommt noch die Gleichung:

$$F = \frac{2\pi}{T}\int_0^t i_c\,dt, \qquad (19)$$

welche auf bekannten elektromagnetischen Gesetzen beruht, und endlich die Gleichung (15):

$$G - F = \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{p\,i_c}{(w_b+w_c)}, \qquad (15)$$

welche durch die bekannten Gesetze über die ganze Grösse des Oeffnungsgegenstromes gegeben ist. Darin bedeutet i_c den

Werth dieser Variablen zur Zeit der Unterbrechung. Durch Differentiiren nach t geben diese Gleichungen:

$$\frac{d(G-F)}{dt} \cdot \frac{N}{(w_b + w_c) A C} = \frac{dE}{dt}$$

$$\frac{dF}{dt} \cdot \frac{N^2}{(w_a + w_b)(w_b + w_c)^2 A C} = \frac{dz}{dt} - \frac{dE}{dt}$$

$$a \frac{dE}{dt} = (a - E) \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{2\pi i_c}{T}$$

$$\frac{d(G-F)}{dt} = \frac{2\pi p}{T(w_b + w_c)} \frac{d i_c}{dt}.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen F, G, E und z, so bekommt man folgende Differentialgleichung für i_c:

$$\frac{2\pi p N}{a(w_b + w_c)^2 A C T} \frac{d i_c}{dt} = \frac{N}{(w_a + w_b) p} \left[1 - \frac{2\pi p N}{a(w_b + w_c)^2 A C T} i_c\right].$$

Deren vollständiges Integral ist:

$$i_c = \frac{a(w_b + w_c)^2 A C T}{2\pi p N} \left[1 - e^{-\frac{N(t+b)}{p(w_a + w_b)}}\right], \qquad (20)$$

wo b die Integrationsconstante ist. Setzen wir wie früher t für den Zeitpunkt gleich 0, wo auch i_c gleich 0 ist, so wird b
532 ebenfalls 0. Dann stimmt die Gleichung (20) mit der theoretisch entwickelten (11) überein bis auf den Factor, mit dem der eingeklammerte Ausdruck multiplicirt ist. Dieser Factor ist aber, wie sich aus der Form beider Gleichungen sogleich ergiebt, diejenige Stromgrösse, welche nach Verlauf des Inductionsstromes constant bestehen bleibt, und deren Grösse durch das Ohm'sche Gesetz gegeben ist:

$$= \frac{A w_b}{N}.$$

Wir müssen also setzen:

$$\frac{a(w_b + w_c)^2 A C T}{2\pi p N} = \frac{A w_b}{N},$$

wodurch einmal die Gleichung (20) vollkommen identisch wird

mit (11), und sich der Werth von a ganz ebenso wie in der theoretisch abgeleiteten Gleichung (17) bestimmt:

$$a = \frac{2\pi p w_b}{T C (w_b + w_c)^2}.$$

Somit ist der Beweis vollendet, dass i_c keine andere Function von t sein könne, als die in der Gleichung (11) hingestellte.

Dadurch wird es auch möglich und gerechtfertigt, mit Hülfe der obigen Formeln die Zeitdauer in Secunden zu berechnen, welche in unsern Versuchen der Schliessung der Stromleitung entspricht. Die Zahlen finden sich in der letzten Rubrik der gegebenen Tafel.

Bei der Zeitmessungsmethode von Pouillet müssen die von uns gewonnenen Ergebnisse jedenfalls berücksichtigt werden, wenn sie zu genauen Resultaten führen soll. Sind die gemessenen Zeiträume grösser als die Dauer des Schliessungsgegenstromes, wie es bei den von mir ausgeführten physiologischen Messungen der Fall war, so genügt es zu allen nach Pouillet berechneten Zeiträumen eine kleine constante Correction zu addiren, welche erhalten wird, wenn man den Potentialwerth der Spirale durch den Widerstand der Leitung dividirt. Dieser Quotient betrug bei der Anordnung des Apparates, wie ich ihn für meine physiologischen Versuche beschrieben habe, 0,000 983 Secunden. Sind die Zeiträume aber kleiner, so genügt eine constante Correction nicht mehr, son- 533
dern es muss dann die Ansteigungsform des Stromes berücksichtigt werden, zugleich werden die Messungen immer ungenauer und schwieriger, weil die elektromagnetische Wirkung in sehr viel grösserem Verhältniss abnimmt als die Zeit. Für solche Messungen wird es also rathsam sein, nicht zu eng gewundene Spiralen mit nicht zu vielen Windungen anzuwenden, und nöthigenfalls die elektromotorische Wirkung derselben durch Vergrösserung der Batterie zu verstärken, nicht aber durch Vermehrung der Windungen. Wo es ausführbar ist, möchte der beste Ausweg die Einschaltung einer Nebenleitung sein, wie in unseren obigen Versuchen mit der Wippe.

Wir sind von der Voraussetzung ausgegangen, dass die

inducirte elektromotorische Kraft in demselben Momente vorhanden sei, wo die inducirende Stromesschwankung stattfindet. Diese Ausnahme scheint durch die Uebereinstimmung der Versuche mit den Folgerungen des darauf basirten mathematischen Princips bestätigt zu werden. Ich habe noch einige directere Versuche angestellt, um zu erfahren, ob ein Zeitunterschied zwischen diesen Vorgängen wahrnehmbar zu machen sei.

Die beste Gelegenheit dazu bietet sich bei der Induction durch Unterbrechung eines Stromes, weil hier die Dauer der Stromesschwankung auf die Dauer des Funkens beschränkt ist. Man wähle zu solchen Versuchen eine Spirale, in welcher man sich von der vollständig guten Isolation aller Drahtwindungen überzeugt hat, am besten eine mit zwei neben einander gewickelten Drähten, weil man deren Isolation immer wieder prüfen kann. Ich gebrauchte die zweipfündige der obigen Versuchsreihe mit zwei Drähten, deren jeder 32 m lang war. Man berücksichtige ferner, dass sich innerhalb des elektrodynamischen Wirkungskreises der Spirale keine geschlossene Leitung finden darf, wovon der Grund sogleich ersichtlich werden wird. Die oben beschriebene Wippe macht es möglich, äusserst schnell nach
534 der Unterbrechung des Stromes der Spirale an der ersten Lösungsstelle, ihr an der zweiten Schliessungsstelle statt der Leitung durch die Batterie eine andere durch einen Multiplicator oder durch den menschlichen Körper zu geben. Ich habe aber nie eine Wirkung auf den Magnet gesehen, oder einen Schlag gefühlt, wenn die geringste Zeit zwischen der Unterbrechung und Schliessung der neuen Leitung verfloss. Wenn ich die Schrauben *m* des oberen Hebels der Wippe allmählig so verstellte, dass die Zwischenzeit immer kleiner und kleiner wurde, bis endlich Wirkungen eintraten, was stets am Magnet und am Körper gleichzeitig geschah, so fand ich den zeitmessenden Ausschlag des Magnetes, der zwischen erster Schliessung und zweiter Lösung durch die zur Messung der Grössen *G* in der ersten Versuchsreihe gebrauchte Anordnung bewirkt wurde, zwischen 1,73 und 1,83. Ich habe oben gezeigt, dass derselbe 1,832 sein muss, wenn erste Lösung und zweite Schliessung gleichzeitig erfolgen sollen. Auf die Unterschiede

dieser drei Zahlen ist kein Gewicht zu legen, weil die genauere Messung so kleiner Ausschläge durch die Luftströmungen verhindert wird. Daraus geht hervor, dass keine durch die angewendeten elektromagnetischen Mittel messbare Zeit zwischen der Oeffnung der Spirale und Schliessung ihrer Nebenleitung vergehen darf, wenn noch Induction stattfinden soll. Ich glaube nach meinen Messungen behaupten zu dürfen, dass jedenfalls ein Zehntausendstel Secunde nach der Unterbrechung schon alle inducirende Wirkung verschwunden sei.

Ganz ebenso verhält es sich, wenn man zwei Spiralen hat, und die Leitung der einen erst geschlossen wird, unmittelbar nachdem der Strom in der anderen unterbrochen worden ist.

Meine Versuche stehen hier in directem Widerspruche mit Marianini[1]) und E. du Bois-Reymond[2]), welche beide sehr beträchtliche Nachwirkungen unter Verhältnissen fanden, wo die Pause zwischen Oeffnung und Schliessung wahrschein- 535
lich sehr viel grösser war, als bei mir. Ob die Spiralen beider Beobachter nicht hinlänglich gut isolirten?

Wenn dagegen zur Zeit der Unterbrechung des Stromes innerhalb seines elektrodynamischen Wirkungskreises sich eine geschlossene Leitung befindet, so entsteht in dieser ein inducirter Strom, welcher nach einer gewissen Zeit allmählig erlischt. Wird dann noch während der Dauer dieses Stromes entweder die erste inducirende Spirale oder eine dritte geschlossen, so können in diesen wiederum durch Vermittelung der zweiten Spirale Ströme erzeugt werden, welche dieselbe Richtung haben, als wären sie verspätete Wirkungen der ersten Stromunterbrechung. Solche Wirkungen zeigte z. B. die zweipfündige bifilare Spirale sehr kräftig, fast ebenso stark, als würde der directe Extracurrent beobachtet, wenn ich einen der Drähte zum Kreise schloss, durch den andern einen Strom gehen liess, und kurz nach dessen Unterbrechung eine Nebenschliessung einschaltete. Es folgt daraus, dass auch die durch

1) Ann. de Chim. et de Phys. Juin 1844. t. XI. p. 395.
2) Unters. über thier. Elekt. Bd. I. S. 425.

Unterbrechung des primären inducirten Ströme viel länger dauern, als die Unterbrechung selber.

Wenn in eine Spirale solide Eisenkerne eingeschoben werden, so müssen bei der Unterbrechung des Stromes in diesen inducirte Ströme entstehen, welche eine gewisse Zeit dauern, und das Eisen in demselben Sinne magnetisirt erhalten, als es der ursprüngliche Strom that. Es können demnach noch eine gewisse Zeit nach der Unterbrechung des primären Stromes Inductionen durch die secundären Ströme und den zurückgehaltenen Magnetismus erhalten werden. Man hat diese Nachwirkungen beim Eisen längst bemerkt, und sie von einer gewissen Trägheit der magnetischen Fluida herleiten zu müssen geglaubt. Um dies zu prüfen, kam es darauf an die Entstehung von Strömen in der Eisenmasse zu verhindern. Ich bildete mir daher einen Kern aus einem Bündel der feinsten Eisendrähte, welche ich bekommen konnte (sogenannten fein-
536 sten Blumendraht, 0,123 Par. Linien dick), überzog jeden Draht mit einer dünnen isolirenden Schicht aus einer Mischung von Wachs und Harz, und untersuchte mittels der Wippe die Nachwirkungen dieses und verschiedener anderer Drahtbündel, welche ich so stark gemacht hatte, dass sie alle Inductionsströme von ungefähr gleicher elektromagnetischer Wirkung (gleicher Quantität von Elektricität) gaben. Es ergab sich sehr augenscheinlich, dass bei derselben Stellung der Wippe die Nachwirkungen desto grösser waren, je dicker die Drähte, und bei dem feinen Blumendrahte fehlte jede Spur davon. Es konnte zwischen ihm und einer ganz leeren Spirale kein Unterschied in dieser Beziehung gefunden werden, obgleich die inducirten Ströme mit dem Drahtbündel viermal stärker waren, als ohne dasselbe. Daraus folgt, dass in linearen Eisenstücken sich die Gleichgewichtsstände der magnetischen Vertheilung in unmessbar kleiner Zeit herstellen können. Dies geschieht in Stücken von beträchtlicher Ausdehnung nach drei Dimensionen, wie wir gezeigt haben, schon wegen der dabei erregten elektrischen Strömungen niemals. Wieviel andere Einflüsse, z. B. Mischung des Eisens, die Schwierigkeit der Wirkung auf das Innere der Masse, dabei mitwirken mögen, müssen wir dahin gestellt sein lassen. Dass solche andere Ursachen nicht ganz

fehlen, zeigen die Versuche von Faraday[1]) über das oft minutenlange Ansteigen der Kraft in grossen Elektromagneten, welche längere Zeit geruht haben.

Ueber die Schnelligkeit der Inductionsvorgänge im Momente einer plötzlichen Unterbrechung der Stromleitung geben uns die physiologischen Wirkungen in noch anderer Weise Anhaltspunkte. Es fliesse in einer Spirale ein Strom von der Intensität J, ihr Potential gegen eine andere Spirale sei Q, deren Widerstand W und Potential auf sich selbst P; so wird durch die Unterbrechung des Stromes der ersten in der zweiten ein Inductionsstrom erzeugt, dessen Grösse JQ/W ist. Von dem Augenblicke an, wo die Kraft des inducirenden Stromes 537
vollständig geschwunden ist, bestimmt sich der Verlauf des inducirten Stromes nach den oben entwickelten Principien durch die Gleichung:

$$iW = -P\frac{di}{dt},$$

deren Integral ist:

$$i = Ce^{-\frac{W}{P}t},$$

wo C die Integrationsconstante ist. Da nach den eben berichteten Versuchen die Zeit der unmittelbaren Nachwirkung des inducirenden Stromes gegen die Dauer des inducirten verschwindet, können wir im Integral des Stromes die jener ersteren angehörenden Stromtheile vernachlässigen. Darnach ist:

$$\int_0^\infty i\,dt = \frac{P}{W}C = \frac{JQ}{W}.$$

Hierdurch bestimmt sich C, und wir erhalten:

$$i = \frac{JQ}{P}e^{-\frac{W}{P}t}.$$

Diese Gleichung sagt aus, dass im Augenblicke der Unterbrechung des inducirenden Stromes, wo $t = 0$, die Intensität des inducirten plötzlich auf den Werth JQ/P steigt, und dann allmählig sinkt. Ersteres wird nun in Wirklichkeit nicht

1) Exper. Res. 2170, 2332, 2650.

absolut plötzlich geschehen, aber doch jedenfalls mit einer Schnelligkeit, welche die des Sinkens bei weitem übertrifft. Daraus folgt, dass auch die physiologische Wirkung dieser Ströme, welche desto grösser zu sein pflegt, je schneller die Stromesschwankung, hauptsächlich von dem ansteigenden Theile herrührt. Man kann sich davon leicht überzeugen, wenn man mittels der Wippe die Leitung zum menschlichen Körper möglichst schnell nach der Unterbrechung des inducirenden Stromes unterbricht. Die physiologische Wirkung wird dadurch nicht im geringsten geschwächt, und hört bei immer grösserer
538 Verminderung der elektromagnetisch zu messenden Zwischenzeit von erster Schliessung und zweiter Lösung erst dann auf, wenn diese der Zwischenzeit der zweiten Schliessung und zweiten Lösung gleich geworden ist, wenn also beide Schliessungen und beide Lösungen gleichzeitig erfolgen. Es zeigt sich auch hier wieder, dass die Wippe nicht schnell genug unterbrechen kann, um die Unterbrechung während des Ansteigens des Stromes auszuführen.

Die physiologische Wirkung verräth uns aber noch andere Eigenthümlichkeiten der ansteigenden Phase des Stromes. Sie ist nämlich an Stärke verschieden bei verschiedenen Oeffnungsweisen. Unterbricht man den Strom dadurch, dass man einen amalgamirten Draht aus Quecksilber langsam aushebt, so ist die Wirkung am schwächsten, bei schnellerem Ausheben wird sie stärker, beträchtlich stärker aber, wenn man zwischen festen Metallen unterbricht. Bei passender Regulirung der Stromstärke kann die erstere Wirkung fast unmerklich, die letztere sehr empfindlich sein. Daraus müssen wir wohl schliessen, dass die Dauer der Ansteigung des inducirten Stromes, also die Dauer der inducirenden Kraft, wesentlich von der Zeit abhängt, während welcher sich die Metalle an der Unterbrechungsstelle von einander lösen. Dies geschieht wegen der Ueberführung glühender Metalltheile, welche den Funken bilden, stets nur allmählig, niemals absolut plötzlich, und wahrscheinlich bei lockeren Metallen, deren Theile leicht von einander gerissen werden, also namentlich bei Quecksilber, langsamer als bei festen. Daraus erklärt sich dann leicht der Unterschied in der physiologischen Wirkung. Fände dagegen eine beträchtliche Nachwirkung statt.

so würde das Ansteigen des inducirten Stromes hauptsächlich von dieser und viel weniger von der Funkendauer abhängen.

Ganz dieselben Versuche können mit einer Spirale angestellt werden, in deren Nebenleitung der menschliche Körper den Extracurrent empfängt, wobei letztere unmittelbar nach der Unterbrechung der Leitung zur Batterie ebenfalls unterbrochen 539
wird. Man findet denselben Erfolg, dieselben Unterschiede bei verschiedenen Oeffnungsweisen und kann darauf dieselben Schlussfolgen bauen.

Schliesslich mache ich noch darauf aufmerksam, dass die hier besprochenen Verzögerungen des Anfanges und Endes der elektrischen Ströme bei den Versuchen über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben von dem grössten Einflusse sein müssen, was bisher nicht gehörig beachtet worden ist. Die dabei gebrauchten Leitungen enthalten stets grosse Spiralen, zum Theil selbst Elektromagnete, und haben wegen der unvollkommenen Isolation der Telegraphendrähte stets Nebenleitungen, in denen sich auch bei der Oeffnung der Hauptleitung Extracurrents bilden können. Da nun Anfang und Ende des Hauptstromes dadurch sehr verschieden verzögert werden, je nachdem kleinere oder grössere Drahtlängen (Widerstände) eingeschaltet sind, so müssen wahrscheinlich sämmtliche bis jetzt gewonnenen Resultate der Art beträchtlichen Correctionen unterliegen, über deren Grösse und Sinn bei den mangelhaften bisher veröffentlichten Beschreibungen der Versuche man aber noch kein Urtheil bilden kann. Die ersten von Walker[1]) angestellten Versuche sind vielleicht ganz illusorisch, weil die Extracurrents gerade dieselben Wirkungen hervorbringen konnten, welche der Fortpflanzungszeit der Elektricität zugeschrieben sind.

Es sind dabei die zeichnenden Telegraphen von Morse benutzt, deren Zeichenstift so lange auf einem bewegten Papierstreifen zeichnet, als der Strom kreiset. Wird dieser an irgend einer Stelle unterbrochen, so entfernen sich augenblicklich die zeichnenden Spitzen auf sämmtlichen Stationen von dem Papier.

1) Schuhmacher's Astron. Nachrichten Nr. 679. — Astronomical Journal (Cambridge, America) Nr. 7.

Da nun den Extracurrents der Elektromagnete desto mehr Nebenleitungen zu Gebote stehen, je weiter sie von der Unterbrechungsstelle entfernt sind, so schwindet auch ihr Magnetismus und heben sich die Zeichenstifte in demselben Verhält-
540 nisse später, ohne dass die Fortpflanzungszeit der Elektricität dabei in Betracht zu kommen braucht. Bei den Versuchen von Mitchel[1]) gehört der Elektromagnet, welcher den zeichnenden Stift andrückt, entweder einem kurzen oder einem sehr langen Kreise von gleicher Stromintensität an, und es werden die Zwischenzeiten zwischen Schliessung des Kreises und Anschlagen des Stiftes gemessen. Diese können aber auch, abgesehen von der Fortpflanzungszeit der Elektricität, nur dann gleich sein, wenn nicht nur die Intensitäten, sondern auch die Geschwindigkeiten der Stromansteigungen, d. h. die Grössen P/W, in beiden Kreisen gleich sind. Darüber finden sich aber gar keine Angaben. Falls in dem grossen Kreise die Elektromagnete der einzelnen Zwischenstationen eingeschaltet blieben, was wohl der Fall gewesen zu sein scheint, konnte P/W für den grossen Kreis sehr viel grösser als für den kleinen sein, und die Verspätung der Wirkung ganz allein davon herrühren. Die Geschwindigkeit der Elektricität ist in beiden Versuchsreihen dem entsprechend auch viel geringer gefunden worden als von Fizeau und Gounelle. Bei der Methode der letzteren kann wenigstens durch die besprochenen Verhältnisse keine vollständige Täuschung hervorgebracht sein; ob und wie grosse Correctionen nöthig werden sollten, lässt sich noch nicht übersehen.

---

1) Astron. Journ. Nr. 2. (Poggendorff's Ann. Bd. LXXX, S. 161.)

XXVI.

Telephon und Klangfarbe.

Monatsberichte der Berliner Akademie 1878, 11. Juli, S. 488—500. — Wiedemann's Annalen Bd. V. S. 448—460.

Hr. E. du Bois-Reymond hat, kurz nach Bekanntwerden des Telephons[1]), eine Erklärung der Wirkungen des neuen Apparates aufgestellt, namentlich der Bewahrung der Klangfarbe, bei der er sich jeden Klang in seine Partialtöne zerlegt denkt und sich darauf stützt, dass jeder dieser Partialtöne zwar in veränderter Phase, aber mit derselben Schwingungszahl und verhältnissmässiger Amplitude durch die elektrischen sinusoiden Schwingungen des Leitungsdrahtes auf das Telephon des Hörers übertragen werde. Da die Verschiebung der Phase nach meinen Untersuchungen gleichgültig für die Klangfarbe sei, könne auf diese Weise die Klangfarbe der gesprochenen Klänge bewahrt bleiben.

Gegen diese Erklärung hat Hr. L. Hermann[2]) Versuche geltend gemacht, welche nach seiner Ansicht die genannte 449
Theorie der Wirkung des Telephons widerlegen und mit der von mir gegebenen Theorie der Klangfarbe nur unter der Voraussetzung vereinbar sein sollen, dass das Grundgesetz der Induction für oscillatorische Potentialänderungen nicht stattfinde, was soviel heisst wie, dass meine Theorie falsch ist. Diese Versuche bestehen darin, dass die Leitung des stromerregen-

---

1) Du Bois-Reymond, Arch. f. Physiol. 1877. S. 573. 582. — Arch. de Genève 1878. LXI. p. 120. LXII. p. 76.

2) Pflüger's Archiv. XVI. 1878. S. 264. 314.

den Telephons durch den einen Draht einer aus zwei nebeneinander liegenden Drähten gewundenen Spirale geschlossen wird, der zweite von jenem ersten vollkommen isolirte Draht dagegen entweder direct mit dem Telephon des Beobachters, oder auch wohl wieder mit einem Drahte einer anderen doppeldrähtigen Spirale verbunden wird, deren zweiter Draht dann zu dem Telephon des Beobachters geht. In diesem Falle werden die elektrischen Bewegungen im zweiten und eventualiter dritten Stromkreise durch elektrodynamische Induction zwischen den Drahtpaaren der angewendeten Spiralen erregt. Man kann alsdann die Worte, die in das erste Telephon gesprochen werden auch im letzten ohne auffallende Aenderung der Klangfarbe hören und verstehen. Da nun nach dem bekannten und wohl geprüften Gesetze der elektrodynamischen Induction deren elektromotorische Kraft dem Differentialquotienten der Stromintensität proportional ist, und beim Differentiiren einer Sinusfunction:

$$J = A \sin(2\pi n t + c),$$

die Schwingungszahl n als Factor zur Amplitude tritt:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = 2\pi n A \cos(2\pi n t + c),$$

so würden nach Hrn. Hermann's Meinung bei dieser Uebertragung der elektrischen Oscillationen durch Induction in jeder der Doppelspiralen die Amplituden der den höheren Partialtönen jedes Klanges entsprechenden elektrischen Oscillationen im Verhältnisse ihrer grösseren Schwingungszahlen gegen die der tieferen zunehmen, und so würde das Verhältniss der In-
450 tensitäten der aus dem zweiten Telephon herausdringenden Partialtöne erheblich verändert werden müssen.

Die Erklärung der Hermann'schen Versuche aus den bekannten Gesetzen ergiebt sich aber leicht, wenn man nicht blos die Induction jedes Stromkreises auf den benachbarten, sondern auch die jedes Stromkreises auf sich selbst berücksichtigt.

I. Beginnen wir mit dem Falle zweier Stromkreise, die ich durch die Indices 1 und 2 bezeichnen will. J_1 und J_2 seien die Intensitäten, w_1 und w_2 die Widerstände, P sei das elektro-

dynamische Potential der beiden verflochtenen Spiralen aufeinander für die Stromeinheit berechnet, dagegen Q_1 und Q_2 die Potentiale jeder Spirale auf sich selbst genommen mit Einschluss des Potentials der von jeder Spirale magnetisirten Eisenstücke auf diese Spirale selbst,dagen M das elektromagnetische Potential des von aussen erregten Magnetismus auf die erste Spirale im Telephon des Sprechers. Dann sind nach den bekannten Gesetzen der Induction folgende beide Gleichungen aufzustellen:

$$J_1 w_1 = \frac{\partial M}{\partial t} - Q_1 \cdot \frac{\partial J_1}{\partial t} - P \cdot \frac{\partial J_2}{\partial t} \tag{1}$$

$$J_2 w_2 = - Q_2 \cdot \frac{\partial J_2}{d t} - P \cdot \frac{\partial J_1}{\partial t}. \tag{1a}$$

Ist nun M von der Form einer einfachen harmonischen Schwingung, so können wir setzen:

$$M = A e^{2\pi i n t},$$

wobei sich auch die Werthe von J_1 und J_2 in imaginäre und reelle Theile scheiden, von denen die ersteren dem imaginären, die letzteren dem reellen Theile von M angehören werden.

Setzen wir dem entsprechend:

$$J_1 = B_1 e^{2\pi i n t}, \quad J_2 = B_2 e^{2 \ i n t},$$

so werden die obigen Gleichungen:

$$B_1 [w_1 + Q_1 . 2\pi i n] + B_2 P . 2\pi i n = 2\pi i n A \tag{2}$$

$$B_1 P . 2\pi i n + B_2 [w_2 + Q_2 2\pi i n] = 0, \tag{2a}$$

woraus sich ergiebt: 451

$$B_2 \{4\pi^2 n^2 P^2 + [w_1 + Q_1 2\pi i n][w_2 + Q_2 2\pi i n]\} = 4\pi^2 n^2 A P,$$

oder:

$$B_2 = A . \frac{4\pi^2 n^2 P}{w_1 w_2 + 2\pi i n (w_1 Q_2 + w_2 Q_1) + 4\pi^2 n^2 (P^2 - Q_1 Q_2)}. \tag{3}$$

Den entsprechenden Fall von nur einem Kreise, der beide Telephone enthält, vom Widerstande w und Potentiale Q erhalten wir, wenn wir in Gleichung (1) $P = o$ setzen. In diesem Falle ist:

$$B = \frac{2\pi i n A}{w + 2 i n Q}. \tag{3a}$$

Die Gleichungen (3) und (3a) zeigen zunächst, dass für sehr grosse Werthe von n, d. h. für sehr hohe Töne, die

Werthe von B und von B_2 unabhängig von n werden, da die höchste Dimension des n in Zähler und Nenner beider Ausdrücke dieselbe ist. Dabei ist zu bemerken, dass die Grösse:

$$Q_1 \cdot Q_2 - P^2,$$

welche in (3) vorkommt, immer positive Werthe haben muss, selbst wenn keine weiteren Spiralen in den beiden Stromkreisen vorkommen, als die ineinander gewundenen. Dies ergiebt sich aus der Bildungsweise der Werthe von P und Q. P wird um so grösser, je näher sich die beiden Spiralen rücken. Den grössten Werth erhält es also, wenn beide zusammenfallen. Dann wird es aber Q, falls beide gleiche Zahl von Windungen haben.

Bei der Bildung von:

$$Q = \iint \frac{ds \, . \, d\sigma \, . \cos(ds \, . \, d\sigma)}{r}$$

wird hierbei jede Combination $ds \, . \, d\sigma$ zweimal gerechnet, nämlich so oft sie vorkommt, wenn man, wie bei der Bildung von P, unabhängig voneinander sowohl ds als $d\sigma$ seinen ganzen Stromkreis durchlaufen lässt.

Wird die Zahl der Windungen aber in der ersten Spirale auf das $m$fache, in der zweiten auf das $n$fache gebracht, so
452 wächst P auf das $n \, . \, m$fache, Q_1 auf das m^2fache, Q_2 auf das n^2fache, also P^2 ebenso gut wie $Q_1 \, . \, Q_2$ auf das $n^2 \, . \, m^2$fache.

In unserem Falle wird nun P^2 im allgemeinen ziemlich klein gegen $Q_1 \, Q_2$ sein, weil die letzteren Grössen durch die Spiralen und Eisenmassen der Telephone erheblich vergrössert werden.

Was die Grössenbeziehungen zwischen den Q und den w betrifft, so bekommen diese im Fall eines einfachen Kreises, auf den keine äusseren Kräfte wirken, für den also $M = P = 0$ ist, folgende Bedeutung: In einem solchen ist:

$$J = A e^{-\frac{wt}{Q}}, \tag{3a}$$

welches den Verlauf eines in dem betreffenden Kreise erlöschenden Stromes darstellt. Das heisst, Q/w ist diejenige Zeit

innerhalb deren die Stärke des Stromes auf die Grösse $1/e = 0{,}36788$ ihrer früheren Stärke hinabsinkt, wenn die elektromotorische Kraft zu wirken aufgehört hat. In Stromkreisen, welche Elektromagnete enthalten, ist diese Zeit kein sehr kleiner Bruchtheil einer Secunde. Ich habe sie in einem Falle an einer Drahtspirale bestimmt, welche nur eine kleine Menge dünner Eisendrähte, also viel weniger Eisen, aber allerdings mehr Kupferdraht (1 kg) enthielt, als die Telephonwindungen zu haben pflegen. Der Werth von Q/w für die leere Spirale ohne Eisen war etwa $\frac{1}{274}$ Sec., mit dem kleinen Eisenkern dagegen etwa $\frac{1}{40}$ Sec.[1]) Da nun Eiseneinlagen ausserordentlich viel wirksamer zu sein pflegen als Vermehrung des Kupferdrahtes, so werden wir schliessen dürfen, dass die Grösse $2\pi Qn/w$, welche in unseren Formeln eine Rolle spielt, auch bei den tiefsten Tönen der menschlichen Stimme schon grösser als 1 sein wird, bei den höheren dagegen erheblich viel grösser, sodass wir die Quadrate und Producte der w gegen die Qua- 453
drate und Producte von Qn, beziehlich gegen $n^2(2Q_1 Q_2 - P^2)$ vernachlässigen können.

Um die Intensität des Stromes im Kreise des empfangenden Telephons zu finden, müssen wir, da B_2 und B complexe Grössen sind, deren Modul suchen. Wir setzen:

$$B_2 = -\frac{4\pi^2 AP}{R_2} e^{+i\varrho}, \tag{3b}$$

$$B = \frac{2\pi A}{R} e^{+i\sigma} \tag{3c}$$

worin:

$$R_2 \cos\varrho = 4\pi^2(Q_1 Q_2 - P^2) - \frac{w_1 w_2}{n^2},$$

$$R_2 \sin\varrho = 2\pi\left(\frac{w_1}{n} Q_2 + \frac{w_2}{n} Q_1\right)$$

und:

$$R\cos\sigma = 2\pi Q, \qquad R\sin\sigma = \frac{w}{n}.$$

Daraus ergiebt sich:

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{w}{2\pi n Q},$$

1) Pogg. Ann. LXXXIII. S. 523—536. (Voriger Aufsatz.)

also als eine kleine Grösse, deren Quadrat zu vernachlässigen ist, sodass eben deshalb auch cos σ nicht merklich von 1 unterschieden ist. Daher kann der von n unabhängige Werth von $R \cos \sigma$ auch für R selbst gesetzt werden.

Ebenso zeigt es sich, dass auch tg ϱ eine kleine Grösse ist, dass cos ϱ nicht von 1 unterschieden zu werden braucht, und dass also ein genügend angenäherter Werth von R_2 ist:

$$R_2 = 4\pi^2 (4\, Q_1\, Q_2 - P^2)$$

unabhängig von n.

Danach ergeben sich schliesslich die Werthe von J_2 und J:

$$J_2 = -\frac{4\pi^2 AP}{R_2} e^{i(2\pi nt + \varrho)}, \qquad J = \frac{2\pi A}{R} e^{2\pi int + i\sigma}.$$

Die Verschiebung der Phase ist hierbei proportional der ersten Potenz der kleinen Grösse $w / 2\pi n Q$, die Aenderung der Intensität dem Quadrate derselben. Beide Aenderungen verschwinden für sehr hohe Töne.

454 Die genauere Berechnung der Werthe von R und R_2 zeigt dagegen, dass beide für tiefe Töne etwas grösser, also die entsprechenden Ströme im Telephon etwas schwächer werden müssen, als sie bei Vernachlässigung der $w / n Q$ erscheinen würden. Dies entspricht in der That der Erfahrung. Die tiefen Töne der Männerstimmen erscheinen im allgemeinen in den gebräuchlichen Telephonen verhältnissmässig zu schwach. Dabei ist aber freilich auch noch zu beachten, dass die Resonanz in den vibrirenden Eisenplatten der Telephone, welche angeschlagen ziemlich hohe Geräusche geben, einen ähnlichen Einfluss auf die Intensitäten der hohen Töne haben muss.

II. Was wir hier für zwei Kreise gefunden haben, gilt nun auch für beliebig viele Stromkreise, zwischen denen in beliebiger Weise inducirende und inducirte Spiralen vertheilt sind. Bezeichnen wir mit $J_{\mathfrak{a}}$ die Stromstärke in dem durch den Index $\mathfrak{a}$ bezeichneten Kreise, mit $w_{\mathfrak{a}}$ seinen Widerstand, mit $Q_{\mathfrak{a}}$ sein elektrodynamisches Potential auf ihn selbst genommen mit Einrechnung der von ihm magnetisirten Eisenstücke, mit $P_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ dasselbe des $\mathfrak{a}$ten auf den $\mathfrak{b}$ten Stromkreis

und mit $M_\mathfrak{a}$ den Einfluss des von aussen erregten Magnetismus, so gilt für den $\mathfrak{a}$ten Kreis die Gleichung:

$$J_\mathfrak{a} \cdot w_\mathfrak{a} + Q_\mathfrak{a} \frac{\partial J_\mathfrak{a}}{\partial t} + \Sigma_\mathfrak{b}\left[P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{\partial J_\mathfrak{b}}{\partial t}\right] = \frac{\partial M_\mathfrak{a}}{\partial t}. \tag{4}$$

Solcher Gleichungen giebt es so viel, als Stromkreise da sind; bei den telephonischen Versuchen wird nur in einem dieser Kreise, in dem des erregten Telephons, $M_\mathfrak{a}$ von Null verschieden sein. Die Gleichungen können wir auflösen für den Fall eines einfachen harmonischen Tones, indem wir setzen:

$$M_\mathfrak{a} = A e^{2\pi i n t}, \qquad J_\mathfrak{a} = B_\mathfrak{a} e^{2\pi i n t}.$$

Das System der Gleichungen (4) verwandelt sich dann in folgendes System von Gleichungen:

$$B_\mathfrak{a}\left(Q_\mathfrak{a} + \frac{w_\mathfrak{a}}{2\pi n i}\right) + \Sigma_\mathfrak{b}\left[P_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} B_\mathfrak{b}\right] = A_\mathfrak{a}. \tag{5}$$

Aus diesem lassen sich die Constanten $B_\mathfrak{a}$ finden, falls nicht 455
die Determinante ihrer Coëfficienten gleich Null ist. Dass dies für keinen reellen Werth der Zahl n und auch nicht für $n = 0$ der Fall ist, lässt sich zeigen, wie gleich nachher geschehen soll.

Dann ist also aus dem Systeme der Gleichungen (5) der Werth des B_q, welches dem Kreise des empfangenden Telephons angehört, zu finden. Wenn der Index des erregenden Kreises mit o bezeichnet wird, ist der Werth:

$$B_q = A_0 \cdot \frac{D_{0,q}}{D}, \tag{5a}$$

worin D die Determinante der Coëfficienten der B in den Gleichungen (5) bezeichnet, und $D_{0,q}$ diejenige, welche entsteht, wenn man die Horizontalreihe mit dem Index o, und die Verticalreihe mit dem Index q weglässt.

Beide Determinanten sind ganze Functionen von $1/n$ und lassen sich nach Potenzen dieser Grösse ordnen. Wenn in beiden das erste von $1/n$ unabhängige Glied nicht gleich Null ist, wird das Verhältniss B/A für hinreichend hohe Werthe von n unabhängig von n. Dass der Modul der Grösse B/A sogar nur nach Potenzen von $1/n^2$ sich entwickelt,

ergiebt sich dann aus ähnlichen Betrachtungen, wie sie oben für je zwei Stromkreise angestellt sind.

Dass zunächst, wie schon angeführt, die Determinante D im Nenner nur für imaginäre Werthe von n, oder, wenn wir $2\pi n i = -1/\lambda$ setzen, nur für reelle positive Werthe von λ gleich Null werden kann, ergiebt sich daraus, dass zwei Spiralen mit den Indices $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, von denen die eine α, die andere β Windungen hat, einen Beitrag zur Grösse $Q_\mathfrak{a}$ liefern, welcher grösser ist als $\alpha P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}/\beta$, und einen solchen zu $Q_\mathfrak{b}$, der
456 grösser ist als $\beta P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}/\alpha$. Wenn wir also das Verhältniss β/α für die einzelnen Spiralen des $\mathfrak{a}$ten Kreises mit $\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ bezeichnen, wobei:

$$\varepsilon_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \frac{1}{\varepsilon_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}}}$$

und beide Grössen auch negativ sein können, so ist allgemein:

$$Q_\mathfrak{a} = a_\mathfrak{a} + \Sigma[\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \,.\, P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}],$$

worin $a_\mathfrak{a}$ eine positive Grösse bezeichnet. Wenn wir nun die quadratischen homogenen Functionen bilden:

$$\varphi = \sum_\mathfrak{a}[Q_\mathfrak{a} B_\mathfrak{a}^2] + 2\sum_\mathfrak{a}\sum_\mathfrak{b}[P_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \,.\, B_\mathfrak{a} B_\mathfrak{b}] \tag{6}$$

und:

$$\psi = \Sigma[w_\mathfrak{a} B_\mathfrak{a}^2], \tag{6a}$$

so sind die Werthe beider für reelle Werthe der B nothwendig immer positiv. Für ψ, welches eine Summe von Quadraten mit den, ihrem physikalischen Sinne nach immer positiven Coëfficienten $w_\mathfrak{a}$ bildet, ist dies von selbst klar. Für φ ergiebt es sich dadurch, dass man es in die Form bringen kann:

$$\varphi = \Sigma_\mathfrak{b}[a_\mathfrak{a} B_\mathfrak{a}^2] + \Sigma[P_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(\sqrt{\varepsilon_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}\, B_\mathfrak{a} + \sqrt{\varepsilon_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}}}\, B_\mathfrak{b})^2], \tag{6b}$$

welcher Ausdruck ebenfalls eine Summe von Quadraten mit positiven Coëfficienten ist. Sucht man nun nach bekannten Methoden diejenigen Werthe der B, welche bei constant bleibendem ψ das φ zu einem Maximum oder Minimum machen, so erhält man das System von Gleichungen:

$$\lambda w_\mathfrak{a} B_\mathfrak{a} = Q_\mathfrak{a} B_\mathfrak{a} + \Sigma[P_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} B_\mathfrak{b}], \tag{7}$$

worin λ eine Constante ist, deren Werth sich ergiebt, wenn man berücksichtigt, dass die Determinante der Gleichungen

(7) gleich Null sein muss. Man erhält so viel Werthe von λ, als verschiedene $B_{\mathfrak{a}}$ (d. h. Stromkreise) existiren, welche Werthe alle positiv sein müssen. Denn wenn man die Gleichung (7) mit $B_{\mathfrak{a}}$ multiplicirt und alle ähnlich gebildeten Gleichungen ähnlich behandelt und addirt, so erhält man:

$$\lambda \psi = \varphi. \qquad (7\,a)$$

Ist λ reell, so sind, wie gezeigt, ψ und φ positiv, also λ 457
positiv.

Wäre λ complex, so würden auch die Verhältnisse zwischen den B complex sein.

Dies ist unmöglich, denn wenn man die Reihe der Gleichungen (7) mit der Reihe der conjugirten $B_{\mathfrak{a}}$ (d. i. mit geänderten Vorzeichen der $\sqrt{-1}$) multiplicirte, und alle addirte, erhielte man das complexe λ, multiplicirt mit einer positiven reellen Grösse gleich einer anderen solchen Grösse, was nicht möglich ist.

Folglich kann die Determinante der Gleichungen (7) [beziehlich (5)] nur für positive Werthe λ (beziehlich des $-i/2\pi n$) gleich Null werden. Sie kann auch nicht für $\lambda = 0$ (d. h. $n = \infty$) gleich Null werden, wenn nicht sämmtliche Coëfficienten $a_{\mathfrak{a}}$ und $P_{\mathfrak{ab}}$ bis auf $(p-1)$ derselben (p ist hier wieder Anzahl der Stromkreise) gleich Null gesetzt werden.

Was die Determinante $D_{q,0}$ im Zähler der rechten Seite von (5a) betrifft, so kann deren constantes Glied allerdings gleich Null werden, wenn die Grössen Q, P und w eine bestimmte Beziehung gegeneinander einhalten. In diesen Falle würde die Amplitude sehr hoher Partialtöne im hörenden Telephon bei steigender Schwingungszahl unendlich klein, wie $1/n$ werden. Für den einen Fall, der in den oben erwähnten Versuchen von L. Hermann eingehalten ist, wo nur die $P_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}+1}$ von Null verschieden sind, reducirt sich die Determinante $D_{q,0}$ auf ihr constantes Glied, welches einfach das Product aller dieser Potentiale P zwischen den aufeinander folgenden Stromkreisen ist, und dasselbe könnte also Null nur dann werden, wenn eines dieser Potentiale gleich Null wird, und also überhaupt kein Zusammenhang zwischen den beiden Telephonen mehr stattfindet.

Uebrigens lässt sich auch noch die vorher an die Gleichungen (3b) und (3c) angeknüpfte Betrachtung auf beliebig
458 viele Stromkreise übertragen. Wenn wir die Determinante der Gleichungen (7) nach Potenzen der Unbekannten λ ordnen, so sind die ersten beiden Glieder:

$$\underset{\lambda=0}{D} - \lambda \underset{\mathfrak{a}}{\Sigma} [w_\mathfrak{a} \underset{\lambda=0}{D_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}}}] \text{ etc.},$$

wo die Determinanten für $\lambda = 0$ zu bilden sind. Wenn nun unter $\lambda_\mathfrak{r}$ die dem System der Gleichungen (7) entsprechenden Werthe verstanden werden, so ist nach den bekannten Eigenschaften der Gleichungen:

$$\sum\left(\frac{1}{\lambda_\mathfrak{r}}\right) = \frac{\Sigma[w_\mathfrak{a} D_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}}]}{D}. \tag{8}$$

Für den Fall aber, dass in den Gleichungen (4) alle $M = 0$ gesetzt werden, wir also den Ablauf von aussen nicht beeinflusster Inductionsströme in dem System untersuchen, ist das Integral dieses Systems von Differentialgleichungen:

$$J_\mathfrak{a} = \Sigma\left[B_{\mathfrak{a},\mathfrak{r}} \cdot e^{-\frac{t}{\lambda_\mathfrak{r}}}\right].$$

Das heisst: die $\lambda_\mathfrak{r}$ sind die Zeiten, in denen die hier vorkommenden Exponentialfunctionen auf den Bruchtheil $1/e$ herabsinken.

Wir können also die Determinante D der Gleichung (5a) in ihren ersten Gliedern schreiben:

$$D = \underset{\lambda=0}{D}\left\{1 + \frac{1}{2\pi n i}\sum\left(\frac{1}{\lambda}\right) \text{ etc.}\right\}. \tag{8a}$$

Nun sind die Grössen λ durch die Gleichung (7a) bestimmt:

$$\lambda\psi = \varphi,$$

worin ψ und φ die immer positiven Functionen sind, die durch die Gleichungen (6a) und (6b) gegeben sind. Da für jeden Werth $\lambda_\mathfrak{r}$ von λ nur die Verhältnisse der $B_{\mathfrak{a}\mathfrak{r}}$ zu einem von ihnen durch die Gleichungen (7) bestimmt sind, so kann man diesem einen immer den Werth geben, dass:

$$\psi = 1 \text{ und } \lambda = \varphi$$

wird. Die Grösse φ kann alsdann verschwindend klein nach Gleichung (6b) nur unter der Bedingung werden, dass:

1) von den Grössen $B_{\mathfrak{a}\mathfrak{t}}$ und $a_{\mathfrak{a}}$ in jedem Stromkreise mindestens eine verschwindet, also namentlich in den Kreisen 479
der beiden Telephone, wo das $a_{\mathfrak{a}}$ erheblich grossen Werth hat, der Strom von Anfang an klein ist;

2) auch gleichzeitig in jedem Paare aufeinander inducirend wirkender Stromkreise entweder $P_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ oder $(\sqrt{\varepsilon_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}\,B_{\mathfrak{a}} + \sqrt{\varepsilon_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}}}\,B_{\mathfrak{b}})$ verschwindet. Wenn also die Verhältnisse der Windungszahlen $\varepsilon_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ in den einzelnen Paaren aufeinander wirkender Spiralen endlich sind, und man vom Kreise des ersten zu dem des letzten Telephons durch eine Reihenfolge von Kreisen fortschreiten kann, zwischen denen $P_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ immer endlich ist, so müssen sämmtliche $B_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}}$ endlich sein, auch die in den Telephonkreisen, und folglich kann die Function $\varphi = \lambda_{\mathfrak{t}}$ nicht verschwindend klein werden. Folglich kann die Summe $\Sigma(1/\lambda_{\mathfrak{t}})$, die in den Gleichungen (8) und (8a) vorkommt, nicht sehr gross werden, und bei hinreichend grossem Werthe von n wird das Quadrat des $1/n$ enthaltenden Gliedes der Determinante D gegen das von $1/n$ unabhängige Glied zu vernachlässigen sein.

So weit der hier geführte Beweis sich auf die Voraussetzung beliebig vieler durch beliebig angeordnete Spiralen verbundener Stromkreise bezieht, kann er auch auf den in den Versuchen vorkommenden Fall ausgedehnt werden, wo in körperlich ausgedehnten Eisenmassen continuirlich gelagerte geschlossene Ströme entstehen.

Die Rückwirkung, welche von der schwingenden Eisenplatte im Telephon des Hörers ausgeht, habe ich in dieser ganzen Auseinandersetzung nicht berücksichtigt, weil deren Oscillationen jedenfalls eine sehr viel geringere Amplitude haben als die der entsprechenden Platte im Telephon des Sprechers.

Wenn also in den Telephonen, wie das bisher wohl meistens thatsächlich der Fall gewesen ist, die Bedingungen eingehalten sind, welche bewirken, dass die Dauer der ohne äussere Störung ablaufenden Inductionsströme 0,01 Secunde übertrifft, werden 480
wir zu erwarten haben, dass die den höchsten Tönen und Geräuschen entsprechenden elektrischen Oscillationen weder in

ihrer Phase, noch in ihrer relativen Stärke wesentlich von denen des erregenden Magnetismus abweichen, ob nun die Verbindung beider Telephone direct oder durch mehrere zwischengeschaltete Spiralen hergestellt ist. Dagegen können die tieferen Töne in der Phase merklich verschoben und in der Stärke etwas benachtheiligt sein. Durch die Vermittelung der elektrischen Bewegungen wird also die Klangfarbe immer nur sehr unerheblich beeinflusst werden können. Viel mehr geschieht dies offenbar durch die mitschwingenden Eisenplatten, wie denn überhaupt die Klangfarbe durch die Telephone doch so weit verändert ist, dass man sich erst daran gewöhnen muss, ehe man die gesprochenen Worte gut versteht.

XVII.

Ueber einige Gesetze der Vertheilung elektrischer Ströme in körperlichen Leitern mit Anwendung auf die thierisch-elektrischen Versuche.

Poggendorff's Annalen Bd. 89, S. 211—233; S. 353—377. (1853.)

Die Grundsätze für die Lösung solcher Aufgaben, in denen die Vertheilung elektrischer Ströme in körperlichen Leitern in Betracht kommt, sind durch Smaasen und Kirchhoff hingestellt worden. Indessen reichen unsere mathematischen Hülfsmittel nur in wenigen der einfachsten Fälle aus, um mittels jener Grundsätze die Lösung der genannten Aufgaben wirklich vollständig durchführen zu können. Es stellen sich hier dieselben Schwierigkeiten in den Weg wie bei den Problemen der Vertheilung statischer Elektricität auf der Oberfläche leitender Körper, Problemen, welche in mathematischer Beziehung die nächste Verwandtschaft mit denen der Stromvertheilung haben. Dazu kommt, dass wir bisher noch nicht im Stande sind, die Stromintensitäten in anderen als linearen Leitern 212
praktisch zu messen, daher würden wir Ergebnisse der Theorie für das Innere der durchströmten körperlichen Leiter nicht einmal mit der Wirklichkeit vergleichen können. Desto grössere praktische Wichtigkeit haben in neuerer Zeit solche Aufgaben, bei denen die Stromintensität in Verbindungen von körperlichen und linearen Leitern zu bestimmen ist, namentlich durch die thierisch-elektrischen Versuche erhalten. Für sie lassen sich, auch wo die Vertheilung der Ströme im Innern des körperlichen Leiters unbekannt ist, mehrere sehr einfache Gesetze

nachweisen, die eine grosse Zahl der bei Versuchen in Betracht kommenden Fragen zu lösen geeignet sind. Ich werde im Folgenden zuerst die hierher gehörigen Theoreme, welche ich gefunden habe, erweisen, dann die Versuche berichten, durch welche ich sie, so weit es anging, zu bestätigen suchte, und endlich die Art ihrer Anwendung auf die thierisch-elektrischen Versuche kurz auseinander setzen.

I. Ich beginne mit einem Satze, den wir mit du Bois-Reymond das Princip der Superposition der elektrischen Ströme nennen können. Er ist nicht ganz neu; denn für lineare Leitersysteme kann man ihn unmittelbar aus Kirchhoff's allgemeinen Formeln herauslesen; für körperliche Leiter, in welche die Elektricität aus linearen einströmt, hat ihn Smaasen[1]) ausgesprochen, und du Bois-Reymond[2]) baut einige seiner Schlüsse auf die Einsicht, dass es ein solches Princip geben müsse. Aber da ich es nirgends in ganz allgemeiner Form bewiesen fand, und es in dem Folgenden vielfach gebrauchen werde, so hielt ich für nöthig, es hier zuvörderst in voller Allgemeinheit hinzustellen.

Man kann es folgendermassen aussprechen:

Wenn in einem beliebigen Systeme von Leitern elektromotorische Kräfte an verschiedenen Stellen vorkommen, so ist die elektrische Spannung in jedem Punkte des durchströmten Systems gleich der alge-
213 braischen Summe derjenigen Spannungen, welche jede einzelne der elektromotorischen Kräfte unabhängig von den anderen hervorbringen würde. Und ebenso sind die mit drei rechtwinkeligen Axen parallelen Componenten der Stromintensität gleich der Summe der entsprechenden Componenten, welche den einzelnen Kräften zugehören.

Der Beweis ergiebt sich sehr leicht aus den drei Bedingungen, welche Kirchhoff[3]) für die Stromvertheilung in Systemen körperlicher Leiter als nothwendig und ausreichend

---

1) Pogg. Ann. Bd. 69, S. 161.
2) Unters. über thier. Elektr. Bd. I, S. 647.
3) Pogg. Ann. Bd. 75, S. 189.

erwiesen hat. Wir nehmen an, dass das System aus Stücken von verschiedenem Material zusammengesetzt sei, und bezeichnen innerhalb eines solchen Stückes die elektrische Spannung in dem Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sind, mit u, die nach innen gerichtete Normale eines Punktes der Oberfläche oder der Berührungsfläche mit einem anderen Stücke des Systems mit n, die Leitungsfähigkeit mit k, und dieselben Grössen für ein anstossendes Stück von anderem Material mit u_1, n_1, k_1, so sind die drei Bedingungen für das dynamische Gleichgewicht der Elektricität:

1) für jeden Punkt im Innern:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0.$$

2) für jeden Punkt der Berührungsfläche zweier Stücke von verschiedenem Material:

$$k\frac{du}{dn} + k_1\frac{du_1}{dn_1} = 0.$$

Darin liegt gleichzeitig, dass an der freien Oberfläche, jenseits welcher wir $k_1 = o$ setzen müssen,

$$\frac{du}{dn} = 0.$$

3) für jeden Punkt einer Fläche, in welcher eine elektromotorische Kraft ihren Sitz hat:

$$u - u' = U,$$

wo U die constante Spannungsdifferenz bezeichnet.

Denken wir uns nun die elektromotorischen Kräfte in zwei 214
Gruppen A und B gesondert, und nennen die Spannungen, welche unter dem Einflusse der gleichzeitigen Wirkung der Kräfte aus der Gruppe A und derer aus B eintreten, wie bisher u, die von den Kräften A allein hervorgerufenen v, die von den Kräften B allein hervorgerufenen w, so behauptet unser Princip, dass:

$$u = v + w.$$

Ich will zunächst nachweisen, dass die Function $(v + w)$ statt u in die obigen drei Bedingungsgleichungen gesetzt, dieselben identisch macht.

Da v und w die elektrischen Spannungen sein sollen, welche bei der Durchströmung des Systems unter dem Einflusse der betreffenden elektrischen Kräfte aus der Gruppe A oder B eintreten, so muss ein jedes von ihnen einzeln genommen die drei obigen Bedingungen erfüllen. Wir haben also für jeden Punkt im Innern:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = 0, \tag{1a}$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} = 0; \tag{1b}$$

für jeden Punkt der Trennungsfläche zweier Stücke von verschiedenem Widerstande:

$$k \frac{dv}{dn} + k_1 \frac{dv_1}{dn_1} = 0, \tag{2a}$$

$$k \frac{dw}{dn} + k_1 \frac{dw_1}{dn_1} = 0; \tag{2b}$$

für jeden Punkt einer elektromotorischen Fläche, dessen Kräfte der Gruppe A angehören:

$$v - v_1 = U, \tag{3a}$$

$$w - w_1 = o; \tag{3b}$$

oder für jeden, dessen Kräfte der Gruppe B angehören:

$$v - v_1 = o, \tag{4a}$$

$$w - w_1 = U. \tag{4b}$$

Berücksichtigt man nun, dass wenn $u = v + w$ ist:

515 $$\frac{du}{dn} = \frac{d(v+w)}{dn} = \frac{dv}{dn} + \frac{dw}{dn}$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d^2(v+w)}{dx^2} = \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dx^2}$$

u. s. w.,

so erhält man sogleich durch Addition der Gleichungen (1a) und (1b) die Gleichung (1), durch Addition von (2a) und (2b) die Gleichung (2), durch Addition von (3a) und (3b) oder (4a) und (4b) die Gleichung (3). Somit sind alle Bedingungen der Stromvertheilung erfüllt, wenn wir $u = v + w$ setzen, und da Kirchhoff nachgewiesen hat, dass nur eine Function existiren

kann, welche alle diese Bedingungen erfüllt, so folgt, dass $u = v + w$ diese Function sei.

Wie wir nun die Gesammtzahl der vorhandenen elektromotorischen Kräfte in zwei beliebige Gruppen A und B zerlegt haben, so können wir auch wieder A in zwei kleinere Gruppen C und D theilen, B in E und F. Durch die Kräfte der Gruppe C allein möge die Spannung q hervorgebracht werden, durch D oder E oder F beziehlich die Spannungen r oder s oder t. Wir haben dann entsprechend dem vorigen Falle:

$$v = q + r$$
$$w = s + t$$
$$u = v + w = q + r + s + t.$$

So können wir die Theilung der Kräfte offenbar beliebig weit fortsetzen.

Auch braucht man die elektromotorische Kraft U irgend eines Punktes in einer elektromotorischen Fläche nicht ganz in die eine oder andere Gruppe hineinzunehmen, sondern kann sie selbst in zwei Theile V und W theilen, sodass:

$$U = V + W$$

und V in die Gruppe A, W in die Gruppe B kommt. Die dritte Bedingungsgleichung wird dann an dieser Stelle folgende:

$$v - v_1 = V$$
$$w - w_1 = W,$$

daraus folgt: 216

$$u - u_1 = (v + w) - (v_1 + w_1) = V + W = U,$$

wie es die Gleichung (3) verlangt.

Somit ist das Princip der Superposition für die elektrischen Spannungen vollständig erwiesen. Es darf natürlich nur bei constanten elektromotorischen Kräften angewendet werden. Hängen diese Kräfte dagegen von der Stromesdichtigkeit ab, so bekommt die dritte Bedingungsgleichung eine andere Form, welche die einfache Addition nicht mehr zulässt.

Ich bemerke noch, dass es zuweilen vortheilhaft ist zu den vorhandenen elektromotorischen Kräften eines leitenden Systems noch andere hinzuzudenken, und die vorhandenen Spannungen als die Differenz der den gesammten und der den

hinzugesetzten Kräften zugehörigen Spannungen zu betrachten, ein Verfahren, welches nach dem bewiesenen Principe offenbar erlaubt ist.

Aus dem für die Spannungen bewiesenen Satze folgt sogleich der entsprechende für die Componenten der Stromintensität. Sind erstere u oder v oder w, so sind letztere nach der Axe der x beziehlich:

$$-k\frac{du}{dx}, \qquad \text{oder } -k\frac{dv}{dx}, \qquad \text{oder } -k\frac{dw}{dx};$$

und aus:

$$u = v + w$$

folgt:

$$k\frac{du}{dx} = k\frac{dv}{dx} + k\frac{dw}{dx},$$

und ebenso nach den beiden anderen Axen:

$$k\frac{du}{dy} = k\frac{dv}{dy} + k\frac{dw}{dy}$$

$$k\frac{du}{dz} = k\frac{dv}{dz} + k\frac{dw}{dz}.$$

II. Die folgenden Sätze beziehen sich auf den Fall, wo constante elektromotorische Kräfte von beliebiger Zahl und Vertheilung im Innern eines beliebig zusammengesetzten Leiter-
217 systems A wirksam sind, und an die Oberfläche von A ein anderer Leiter B angelegt wird, in welchen ein Theil der A durchkreisenden Ströme abgeleitet wird. Wir können daher A den **abgeleiteten** und B den **ableitenden** Leiter nennen. Wir setzen zunächst voraus, dass in B und an seinen Berührungsstellen mit A keine elektromotorischen Kräfte vorkommen. Es wird dadurch die allgemeine Brauchbarkeit der folgenden Sätze für beliebige Fälle der Anwendung nicht beschränkt, da man nach dem Principe der Superposition die Ströme, welche von den inneren Kräften des Leiters A in dem Systeme erregt werden, erst mit Anwendung der folgenden Theoreme gesondert bestimmen, und nachher die hinzufügen kann, welche Kräften im Innern von B oder an den Berührungsstellen von A und B, wenn dort solche vorkommen, angehören.

1) Ich lasse zunächst einen Satz folgen, welchen wir wohl passend das *Princip von der elektromotorischen Oberfläche* nennen können:

Für jeden Leiter A, in dessen Innerem elektromotorische Kräfte beliebig vertheilt sind, lässt sich eine bestimmte Vertheilung elektromotorischer Kräfte in seiner Oberfläche angeben, welche in jedem angelegten Leiter B dieselben abgeleiteten Ströme wie die inneren Kräfte von A hervorbringen würde.

Diese Vertheilung wird folgendermassen gefunden. Man nehme den Leiter A isolirt, ohne Verbindung mit anderen Leitern, bestimme die elektrische Spannung, welche ein jeder Punkt seiner Oberfläche bei den durch seine inneren Kräfte erregten Strömen annimmt, und setze die gesuchte elektromotorische Kraft der Oberfläche, in der Richtung von innen nach aussen genommen, gleich dieser elektrischen Spannung, indem man nach Ohm's Weise die elektromotorischen Kräfte durch die zugehörigen Spannungsunterschiede gemessen denkt. Ich werde im Folgenden die Oberfläche des Leiters A, wenn sie in der angegebenen Weise elektromotorisch wirksam gedacht wird, die *positiv wirksame Oberfläche* nennen, *negativ wirksam* dagegen, wenn ihren Kräften die entgegen- 218
gesetzte Richtung bei derselben absoluten Grösse beigelegt werden soll.

Der Beweis des vorstehenden Satzes ergiebt sich am leichtesten in folgender Weise. Man denke die Oberfläche des Leiters A *negativ* wirksam gemacht, und dann einen unwirksamen zweiten Leiter B angebracht. Aus den von Kirchhoff gegebenen drei Bedingungen der Stromvertheilung in dem Systeme $A + B$ ergiebt sich leicht, dass bei dieser Anordnung gar keine Ströme in B entstehen, die elektrische Spannung in seinem Innern überall gleich Null bleibt, und die Ströme und Spannungen, welche vorher in A bestanden, unverändert fortbestehen. Im Innern von A und im Innern von B sind natürlich jene drei Bedingungen nach wie vor erfüllt, da daselbst alles unverändert bleiben soll. An der Berührungsfläche

von A und B müssen die beiden Grenzbedingungen 2 und 3 des vorigen Paragraphen erfüllt sein, nämlich:

$$k_a \frac{d u_a}{d n_a} + k_b \frac{d u_b}{d n_b} = 0.$$

$$u_a - u_b = U,$$

wo u_a, n_a, k_a die Werthe der betreffenden Grössen in A, und u_b, n_b, k_b dieselben in B bezeichnen. Berücksichtigen wir nun, dass u_b, also auch du_b/dn_b, überall gleich Null sein soll, dass du_a/dn_a ebenfalls gleich Null sein muss, weil der betreffende Theil der Oberfläche von A vorher zu der freien äusseren Oberfläche gehörte, und dass U nach der Definition der negativ wirksamen Oberfläche gleich u_a sein muss, so werden beide Gleichungen identisch, und es sind also in der That unter den angegebenen Umständen alle Bedingungen der Stromvertheilung erfüllt. Die negativ wirksame Oberfläche verhindert vollständig, dass die Ströme, welche im Innern des Leiters A erregt sind, und die zugehörige elektrische Spannung auf andere Leiter übergehen.

Nach dem Principe der Superposition können wir aber die Spannungen und Stromcomponenten im Inneren von B
219 (deren Grösse, wie eben bewiesen, überall gleich Null ist) ansehen, als die algebraische Summe derjenigen Spannungen und Stromcomponenten, welche einmal die inneren Kräfte von A für sich allein und dann die negativ wirksame Oberfläche für sich allein hervorbringen würde. Da nun jene Summe im Innern von B überall gleich Null sein soll, so müssen ihre beiden Summanden dort überall gleiche absolute Grösse und entgegengesetztes Zeichen haben. Es bringt also die negativ wirksame Oberfläche für sich allein genau die entgegengesetzten Spannungen und Strömungen hervor, wie die inneren Kräfte von A. Kehren wir nun das Zeichen der elektromotorischen Kräfte in der Oberfläche um, so geschieht dasselbe mit den von ihnen abhängigen Spannungen und Strömungen in A und B. Daraus folgt, dass die positiv wirksame Oberfläche für sich allein genau dieselben Spannungen und Strömungen in B hervorbringt, wie die inneren Kräfte von A, was zu beweisen war.

2) *Die Spannungen und Stromcomponenten im Innern des abgeleiteten Leiters A während der Ableitung sind gleich der Summe der ohne Ableitung in ihm stattfindenden Spannungen und Stromcomponenten, und derer, welche die positiv wirksame Oberfläche hervorbringt.*

Es trete in dem durch die Coordinaten x, y, z im Innern von A gegebenen Punkte die Spannung W_0 ein, wenn die inneren Kräfte von A in diesem Leiter allein ohne Ableitung Ströme erregen, W_1, wenn sie es in dem verbundenen Leitersystem $A+B$ thun, ferner $+P$, wenn die positiv wirksame Oberfläche, $-P$, wenn die negative Ströme in dem verbundenen Leitersystem erregt. In der vorangegangenen Beweisführung ist gezeigt worden, dass die negativ wirksame Oberfläche und die inneren Kräfte von A gleichzeitig wirkend, den inneren Zustand von A bestehen lassen, welcher vor der Ableitung bestand, also seine Spannungen gleich W_0 machen. Betrachten wir diese nun nach dem Princip der Superposition als die Summe derer, welche die inneren Kräfte von A für sich, und
die negativ wirksame Oberfläche für sich in dem System $A+B$ 220
hervorbringt, so haben wir:

$$W_0 = W_1 - P,$$

was sich sogleich umschreiben lässt in:

$$W_1 = W_0 + P.$$

Diese Gleichung ist aber gerade das, was der obige Satz für die Spannungen aussagt. Differenziren wir sie nacheinander nach den drei Coordinataxen, so erhalten wir die entsprechenden Gleichungen für die Stromcomponenten.

3) *Verschiedene Vertheilungsweisen elektromotorischer Kräfte in der Oberfläche des Leiters A, welche dieselben abgeleiteten Ströme wie seine inneren Kräfte geben sollen, können sich nur um eine, in allen Punkten der Oberfläche denselben constanten Werth habende Differenz unterscheiden.*

Die Strömungen im Innern eines Leitersystems bleiben bekanntlich unverändert, wenn man die Spannungen in allen Punkten um eine constante Grösse C grösser oder kleiner

macht. Führt man dies in dem Leiter A aus vor der Anlegung des Leiters B, und bestimmt dann nach der oben gegebenen Regel die Intensität der elektromotorischen Oberfläche, so findet man auch für diese, welche den oberflächlichen Spannungen gleich sein soll, überall einen um C grösseren oder kleineren Werth. Die Grösse der elektromotorischen Kraft in den einzelnen Punkten der Oberfläche, welche die Wirkung der inneren Ströme nach aussen ersetzen soll, ist also auszudrücken durch eine gewisse Function der Coordinaten, welcher eine willkürliche Constante hinzuaddirt ist. Es lässt sich aber auch leicht einsehen, dass es weiter keine Vertheilung elektromotorischer Kräfte an der Oberfläche giebt, welche dasselbe leisten könnte. Gäbe es nämlich zwei verschiedene Vertheilungsarten, welche in dem angelegten Leiter B dieselben Ströme hervorbrächten, so könnte man nach Entfernung der inneren Kräfte von A die eine positiv, die andere negativ anbringen; dann würde jeder Punkt von B
221 von gleichen und entgegengesetzten Strömen durchflossen werden, d. h. in B würde gar keine Strömung stattfinden. Daraus folgt weiter, dass auch in A keine stattfinden kann. Denn jede Stromcurve muss durch eine elektromotorische Fläche hindurchgehen, hier wäre aber die einzige solche die Berührungsfläche von A und B. Wenn aber weder in A noch in B eine Strömung stattfindet, muss die Spannung innerhalb jedes dieser Leiter constant sein, und da die elektromotorische Kraft der Grenzflächen gleich dem Spannungsunterschiede ihrer beiden Seiten ist, so muss diese Kraft, welche in diesem Falle die Differenz der beiden verglichenen Vertheilungsarten ist, in allen Punkten der Oberfläche dieselbe sein. Es unterscheiden sich also die beiden Vertheilungsarten wieder nur durch eine willkürliche Constante.

Dagegen kann ein und dieselbe elektromotorische Oberfläche unendlich viele Vertheilungsarten elektromotorischer Kräfte im Innern des Leiters entsprechen, welche nur das Gemeinsame haben, dass sie in den Punkten der Oberfläche dieselben Spannungen hervorbringen.

Ich bemerke noch, dass man den Leiter A auch in verschiedene Theile A_1, A_2 u. s. w. zerlegt, jeden dieser Theile

isolirt und für seine inneren Kräfte nach der oben gegebenen Regel eine elektromotorische Oberfläche gesetzt denken kann. Es werden dann die elektromotorischen Oberflächen der Theile zusammen genommen dieselben Ströme in B hervorbringen, wie die inneren Kräfte. Denn wir können nach der gegebenen Beweisführung die inneren Kräfte jedes einzelnen Theiles durch die ihn umschliessende elektromotorische Fläche ersetzen, wenn wir uns die Kräfte aller anderen Theile wegdenken, und können nachher nach dem Principe der Superposition die Wirkung des ganzen Leiters A als die Summe der Wirkungen seiner einzelnen Theile ansehen.

4. Schliesslich mache ich noch darauf aufmerksam, dass mit Hülfe unseres Theorems folgender Satz ohne Einschränkung bewiesen werden kann:

Wenn ein körperlicher Leiter mit constanten 222
elektromotorischen Kräften in zwei bestimmten Punkten seiner Oberfläche mit beliebigen linearen Leitern verbunden wird, so kann man an seiner Stelle immer einen linearen Leiter von bestimmter elektromotorischer Kraft und bestimmtem Widerstande substituiren, welcher in allen angelegten linearen Leitern genau dieselben Ströme erregen würde, wie jener körperliche.

G. Kirchhoff hat diesen Satz nur für den Fall erwiesen, dass wie in den hydroelektrischen Batterien jede elektromotorisch wirksame Trennungsfläche zweier Stücke von verschiedenem Material auch den ganzen körperlichen Leiter in zwei vollkommen gesonderte Stücke trennt, so dass in seinem Innern nirgends vollständig geschlossene Stromescurven vorkommen, sondern diese Curven alle auch den linearen Leiter durchlaufen. Ersetzen wir aber die inneren Kräfte des körperlichen Leiters durch solche seiner Oberfläche, wobei hier nur die beiden Punkte derselben zu berücksichtigen sind, welche mit dem linearen in Verbindung stehen, so führen wir den allgemeinen Fall auf den von Kirchhoff behandelten zurück, und der Beweis des speciellen Falles wird dadurch auch für den allgemeinen gültig. Der Widerstand des zu substituirenden linearen Leiters ist gleich dem des Körpers, wenn ein Strom von

den beiden Eintrittspunkten der linearen Leitung aus durch ihn hindurchgeleitet wird.

Was für jeden körperlichen Leiter gilt, gilt auch für den speciellen Fall eines verzweigten linearen Stromsystems. Auch ein solches, wenn zwei bestimmte Punkte desselben mit beliebigen anderen linearen Leitern verbunden werden, verhält sich diesen gegenüber wie ein linearer Leiter von bestimmtem Widerstande, dessen Grösse man nach den bekannten Regeln für verzweigte Leitungen findet, und von bestimmter elektromotorischer Kraft, welche durch den Spannungsunterschied der abgeleiteten Punkte, wie er vor der Ableitung bestand, gegeben
223 wird. An Beispielen bestätigt es sich sehr leicht, dass man nach dieser Regel die von verzweigten Leitungen abgeleiteten Ströme ebenso gross findet, wie nach den früher bekannten Regeln. Wählen wir das einfachste dieser Beispiele. Ein einfacher Stromeskreis werde durch zwei beliebig angenommene Punkte a und b, in denen später noch andere lineare Leitungen mit ihm verbunden werden sollen, in zwei Theile getheilt gedacht, deren einer den Widerstand w_0, der andere den Widerstand w_1 habe, jener enthalte auch die elektromotorische Kraft A, deren Grösse dem Spannungsunterschiede an der erregenden Stelle gleich ist. Nach Ohm's Spannungsprincipien nimmt die Spannung von der positiven Seite der erregenden Stelle längs dem Leitungsdrahte auf Stücken von gleichem Widerstande um ein Gleiches ab bis zur negativen Seite der erregenden Stelle. Der Spannungsunterschied s der Punkte a und b, welche um ein Stück von dem Widerstande w_1 von einander entfernt sind, ergiebt sich danach:

$$s = \frac{A w_1}{w_1 + w_0}.$$

Diese Grösse s ist die elektromotorische Kraft des zu substituirenden linearen Leiters. Dessen Widerstand muss dem Widerstande der beiden Stücke w_0 und w_1 gleich sein, wenn sie nebeneinander von a nach b durchströmt werden; also:

$$W = \frac{w_0 w_1}{w_0 + w_1}.$$

Verbinden wir also die bestehende Leitung in den Punkten a und b mit einem dritten linearen Leiter vom Widerstande w_2, und nennen die Intensitäten, von a nach b gerechnet, in den drei Leiterstücken w_0, w_1 und w_2, beziehlich i_0, i_1, i_2, so ist nach unserem Theorem:

$$i_2 = \frac{s}{W + w_2} = \frac{A w_1}{w_0 w_1 + w_0 w_2 + w_1 w_2}.$$

Die Intensitäten i_0 und i_1 finden sich nach dem zweiten Satze dieses Abschnittes:

$$i_0 = -\frac{A}{w_0 + w_1} - \frac{s w_1}{w_0 w_2 + w_0 w_1 + w_1 w_2}$$

$$= -\frac{A (w_1 + w_2)}{w_0 w_1 + w_0 w_2 + w_1 w_2}$$ 224

und:

$$i_1 = \frac{A}{w_0 + w_1} - \frac{s w_0}{w_0 w_1 + w_0 w_2 + w_1 w_2}$$

$$= \frac{A w_2}{w_0 w_1 + w_0 w_2 + w_1 w_2}.$$

Genau so, wie es aus der Elimination der gewöhnlich gebrauchten Gleichungen:

$$i_0 + i_1 + i_2 = 0$$

$$i_1 w_1 = i_2 w_2 = i_0 w_0 + A$$

gefunden wird.

III. Ich muss hier zunächst die Beziehungen erörtern, in welchen die aufgestellten Sätze zu gewissen anderen aus der Theorie der statischen Elektricität und des Magnetismus stehen.

In einer früheren Abhandlung[1]) habe ich schon die Thatsache, dass elektromotorisch differente Körper, welche sich berühren, eine constante Spannungsdifferenz zeigen, mathematisch so ausgesprochen, dass die Potentialfunction aller freien Elektricität in ihnen um eine constante Differenz verschieden sein müsse, unabhängig von der Gestalt und Grösse der beiden Leiter. Zwar ist in der angeführten Stelle nicht das Wort „Potentialfunction“, sondern „freie Spannung“ gebraucht, aber auf Seite 41 und 42 derselben Schrift findet sich die Definition des Begriffes der freien Spannung, welche identisch

1) Ueber die Erhaltung der Kraft. Berlin 1847, S. 47 (oben S. 48).

ist mit dem, was Gauss Potential, Green Potentialfunction genannt hat.[1])

225 Später hat Kirchhoff dasselbe auf die elektromotorisch differenten Körper in geschlossenen galvanischen Kreisen ausgedehnt, und nachgewiesen, dass dasjenige, was man bisher als verschiedene Spannung oder Dichtigkeit der Elektricität in durchströmten Körpern bezeichnet hatte, der verschiedene Werth der Potentialfunction sei, und dass in constant durchströmten homogenen Leitern diese Function nur solcher freier Elektricität angehören könne, welche auf der Oberfläche und ausserhalb der Leiter vertheilt sei.

---

1) Ich benutzte diese Gelegenheit, auf einige von Clausius besprochene Punkte der erwähnten Schrift folgendes zu erwidern. Die Abweichung, welche er in diesen Annalen Bd. LXXXVI, S. 343, Anm 2 berührt, beruht nur auf einem Unterschiede des Namens, nicht der Sache. Definirt man das Potential zweier Massen aufeinander als die Summe der Potentiale aller Massenelemente der einen auf alle der andern, so kann man bei der Bildung des Potentials einer Masse auf sich selbst, entweder die Potentiale aller Combinationen oder aller Variationen je zweier Elemente summiren. Im letzteren Falle wird die Summe doppelt so gross als im ersten. Da ich bei der Abfassung jener Schrift in der mir zu Gebote stehenden Literatur nichts über einen etwa schon feststehenden Gebrauch dieses Begriffes ermitteln konnte, zog ich es vor in der Consequenz der von mir vorausgeschickten Definitionen zu bleiben, welche den Variationen den Vorzug gab. Uebrigens gebe ich es gern zu, dass die andere Definition von dem Begriffe des Potentials einer Masse auf sich selbst, welche bei der Summirung nur die Combinationen wählt, für die übrigen Beziehungen des Potentialbegriffes angemessener ist, so wie sie denn auch allein der Definition dieses Begriffes von Neumann entspricht. Meine Formeln sind also streng richtig, wenn man meine Definition zu Grunde legt, und lassen sich in die von Clausius unmittelbar übertragen, wenn man jedem Potential einer Masse auf sich selbst den Factor 2 hinzusetzt. — Zu S. 362 Anm. bemerke ich, dass der Begriff „Ableitungsgrösse“ für Leidener Flaschen schon von anderen Physikern gebraucht ist, und da es an einer mathematischen Definition fehlte, ich als solche die Gleichung $CS = Q$ auf Seite 43 meiner Schrift hingesetzt habe. — Wenn Herrn Clausius auf S. 343 Anm. 1 einige Stellen jener Schrift „ungenau“ erscheinen, so werden sie hoffentlich von diesem Vorwurfe nur in dem Sinne getroffen werden, in welchem jede Anwendung eines mathematischen Gesetzes auf die Wirklichkeit ungenau ist, weil stets eine Reihe von Nebeneinflüssen unberücksichtigt bleibt. (Fortsetzung dieser Discussion oben Nr. III.)

Gauss hat gezeigt[1]), dass, wenn Elektricität, (oder Magnetismus) in einer Fläche verbreitet ist, und zwar die Menge k auf der Flächeneinheit, die Potentialfunction auf beiden Seiten einer solchen Fläche keine verschiedenen Werthe habe, wohl aber ihr Differentialquotient, in der Richtung senkrecht gegen 226
die Fläche genommen. Nennen wir diesen du/dn_1 auf der einen, und du/dn_2 auf der anderen Seite der Fläche, wobei vorausgesetzt wird, dass die Normalen der Fläche von ihrem Fusspunkte in dieser nach entgegengesetzten Richtungen hin gemessen werden, so ist nach Gauss:

$$\frac{du}{dn_1} + \frac{du}{dn_2} = -4\pi k. \qquad (1)$$

Ein solcher Fall kommt gemäss Kirchhoff's zweiter Bedingung für das dynamische Gleichgewicht der Elektricität in durchströmten Leitersystemen an den Berührungsflächen zweier Leiter von verschiedenem Widerstande und gleicher elektromotorischer Kraft vor. Hier ist die Potentialfunction auf beiden Seiten der Fläche von gleichem Werthe, aber ihr Differentialquotient verschieden.

Denken wir uns dagegen eine Fläche auf einer Seite mit positiver Elektricität, auf der anderen mit einer gleichen Quantität negativer belegt, beide Schichten in verschwindend kleiner Entfernung von einander, so werden, der Gleichung (1) entsprechend, die Differentialquotienten der Potentialfunction auf beiden Seiten der belegten Fläche gleich, die Werthe dieser Function selbst aber verschieden sein. Nehmen wir an, um die Grösse ihres Unterschiedes zu bestimmen, dass zunächst nur eine solche Schicht da sei, welche in der Fläche Ω selbst liege. Ihre Potentialfunction in einem Punkte der Oberfläche von der Dichtigkeit $\varkappa$ sei u, deren Differentialquotienten nach der einen Seite du/dn_1, nach der anderen du/dn_2. Verlegen wir nun die elektrische Schicht in die verschwindend kleine Entfernung ε von der Fläche Ω nach der Seite der Normale n_1 hin, so entsteht dadurch eine verschwindend kleine Variation der Potentialfunction. Der Werth dieser Function in der elektrischen

1) Result. d. magnet. Vereins, 1839, S. 27.

Schicht selbst wird also nun $u + \varepsilon \delta u$, und in einer unendlich kleinen Entfernung Δn_1 von der Fläche Ω (oder $\Delta n_1 - \varepsilon$ von der elektrischen Schicht):

227 $$U_1 = u + \varepsilon \delta u + \frac{d u}{d n_1}(\Delta n_1 - \varepsilon) + \frac{d \delta u}{d n_1} \varepsilon (\Delta n_1 - \varepsilon)$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{d^2 u}{d n_1{}^2} (\Delta n_1 - \varepsilon)^2 + \text{etc.},$$

in der unendlich kleinen Entfernung Δn_2 nach der anderen Seite von Ω dagegen:

$$U_2 = u + \varepsilon \delta u + \frac{d u}{d n_2}(\Delta n_2 + \varepsilon) + \frac{d \delta u}{d n_2} \varepsilon (\Delta n_2 + \varepsilon)$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{d_2 u}{d n_2{}^2} (\Delta n^2 + \varepsilon)^2 + \text{etc.}$$

Nehmen wir nun die gleichzeitige Existenz von zwei Schichten an, eine von der Dichtigkeit $+ \varkappa$ in der Entfernung $+ \varepsilon$, die andere von der Dichtigkeit $- \varkappa$ in der Entfernung $- \varepsilon$ von der Fläche Ω, so wird mit Weglassung der unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung:

$$U_1 = 2\varepsilon \delta u - 2\varepsilon \frac{d u}{d n_1}$$
$$U_2 = 2\varepsilon \delta u - 2\varepsilon \frac{d u}{d n_2},$$

also:

$$U_1 - U_2 = - 2\varepsilon \left(\frac{d u}{d n_1} + \frac{d u}{d n_2} \right) = 8 \pi \varkappa \varepsilon,$$

und wenn wir nach Analogie der Magneten die Grösse $2 \varepsilon \varkappa = m$ das elektrische Moment der Flächeneinheit nennen, wird:

$$U_1 - U_2 = 4 \pi m. \qquad (2)$$

Ist also der Unterschied der Potentialfunctionen gegeben, so ist dadurch auch das elektrische Moment des betreffenden Theiles der Fläche gegeben.

Ein entsprechender Fall tritt in durchströmten Leitersystemen an solchen Flächen ein, wo sich Leiter von gleichem Widerstande und verschiedener elektromotorischer Kraft berühren. Hier hat die Potentialfunction nach Kirchhoff's dritter Bedingungsgleichung auf beiden Seiten verschiedene Werthe, und die Grösse ihres Unterschiedes ist gleich der

elektromotorischen Kraft der betreffenden Stelle. Diese letztere muss also gleich $4\pi m$ sein. Dagegen ist der Differential- 228
quotient der Spannung, nach beliebiger Richtung genommen, auf beiden Seiten gleich.

Wo sich Leiter von ungleicher elektromotorischer Kraft und ungleichem Leitungsvermögen berühren, müssen dagegen sowohl die ganze Function als ihr Differentialquotient auf beiden Seiten der Fläche verschiedene Werthe haben, was sich erreichen lässt, wenn an die entgegengesetzten Seiten der Fläche Schichten von entgegengesetzten Elektricitäten und ungleicher Dichtigkeit angelagert werden.

Ich werde im Folgenden unter einer elektrischen Doppelschicht stets nur solche zwei Schichten verstehen, welche an den entgegengesetzten Seiten einer Fläche in unendlich kleiner Entfernung vor ihr liegen, und deren eine ebenso viel positive Elektricität enthält, als die andere negative.

In durchströmten zusammengesetzten Leitersystemen sind also alle Grenzflächen zwischen Theilen von verschiedenem Widerstande und alle zwischen ihnen und dem äusseren nicht leitenden Raume mit einer einfachen Schicht Elektricität, ausserdem alle elektromotorischen Flächen mit einer Doppelschicht belegt. Hat man die Aufgabe zu lösen, die Stromvertheilung zu finden, wenn die elektromotorischen Kräfte P gegeben sind, so giebt die Gleichung:

$$P = 4\pi m$$

sogleich das Moment m der Doppelschichten, welche den elektromotorischen Flächen entsprechen, und die Aufgabe reducirt sich darauf, zu diesen Doppelschichten die einfachen zu finden, sodass die Potentialfunctionen von ihnen allen zusammengenommen den Bedingungsgleichungen Kirchhoff's genügen.

Betrifft die Aufgabe Verbindungen von linearen körperlichen Leitern, so kann man für die Aufsuchung der Potentialfunctionen die Einströmungspunkte der Elektricität in den körperlichen Leiter als einfache elektrische Massenpunkte betrachten; man erhält bei dieser Substitution rings um sie her dieselbe Gestalt der Potentialfunction, wie sie Smaasen in seiner Untersuchung über die Stromvertheilung im Raume

229 gefunden hat. Es sei A die elektrische Masse eines solchen Punktes, r seine Entfernung von dem Punkte, dessen Potentialfunction zu bestimmen ist, V der Theil der Potentialfunction, welcher von anderen entfernten Massen eben daselbst hervorgebracht wird, so ist die ganze Potentialfunction:

$$\frac{A}{r} + V.$$

Ist nun $d\omega$ ein Element einer beliebigen Oberfläche, welche den Punkt A, ausser ihm aber keinen anderen elektrischen Massenpunkt einschliesst, und n die nach innen gekehrte Normale von $d\omega$, so ist nach einem Satze von Gauss:[1])

$$\int \frac{d\left[V + \frac{A}{r}\right]}{dn} d\omega = 4\pi A,$$

wo das Integral über die ganze Fläche auszudehnen ist. Bezeichnen wir die Leitungsfähigkeit des körperlichen Leiters mit k, so ist die gegen $d\omega$ normale Stromcomponente gleich:

$$-k \frac{d\left[V + \frac{A}{r}\right]}{dn},$$

folglich die ganze durch die geschlossene Oberfläche von innen nach aussen strömende Elektricität:

$$+ 4\pi A k.$$

Da diese Elektricitätsmenge der aus dem linearen Leiter einströmenden gleich sein muss, bezeichnet sie zugleich die Stromintensität in dem letzteren. Dadurch bestimmt sich die Grösse der hypothetischen elektrischen Masse A.

Durch diese Umformung der Aufgaben über Stromvertheilung erlangt man den grossen Vortheil, ihre Lösungen auf die Betrachtung von Functionen zu reduciren, welche schon mannigfach bearbeitet und in Reihen entwickelt sind, nämlich auf die Potentialfunctionen elektrischer Körper und Flächen. Ebenso kann man auch wiederum rückwärts aus jedem Theorem über Stromvertheilung entsprechende und zum Theil neue
230 Theoreme über die Potentialfunctionen der Elektricität und

1) l. c. § 6.

des Magnetismus herleiten, doch würde uns das hier zu weit
von unserem Wege abführen.

In Verbindung mit diesen Betrachtungen eröffnet der Satz
von der elektromotorischen Oberfläche uns einen neuen Weg
zur Lösung der Aufgabe, die Stromvertheilung in einem be-
grenzten Leiter A von constantem Widerstande zu finden.
Statt der elektromotorischen Kräfte in A substituiren wir
nach den angegebenen Regeln elektrische Massen, und nehmen
dann an, dass A mit einem ableitenden Leiter verbunden werde,
und zwar sei B der unendliche äussere Raum mit derselben
leitenden Masse wie A gefüllt. Da nun das zusammengesetzte
System $A + B$ nirgend freie Oberflächen, oder Begrenzungs-
flächen von Theilen verschiedenen Widerstandes darbietet,
können die elektrischen Massen, von denen die Potentialfunction
der es durchströmenden Elektricität abhängt, nur die inneren
von A sein. Daher ist die Spannung in dem zusammenge-
setzten Systeme $A + B$ gleich der Potentialfunction der inneren
Massen von A, und somit gegeben. Nun soll auch die elektro-
motorische Oberfläche von A allein in B dieselben Spannungen
hervorbringen, wie die inneren Kräfte von A; es muss also
ihre elektrische Potentialfunction (wenn sie als Doppelschicht
betrachtet wird) im äusseren Raume B der der inneren Massen
von A gleich sein. Kennen wir die elektromotorische Ober-
fläche von A, so kennen wir in diesem Falle also auch die
Spannungen und Ströme, welche sie in dem Systeme $A + B$
hervorbringt. Nun sind aber nach dem Satze II. 2) die Ströme,
welche in dem Leiter A ohne Ableitung kreisen, gleich der
Differenz derjenigen, welche einmal die inneren Kräfte von A,
dann die elektromotorische Oberfläche in dem abgeleiteten
System $A + B$ hervorbringen würden. Daher reducirt sich
die Aufgabe, in dem Leiter von constantem Widerstande A
die Vertheilung der Ströme zu finden, auf die andere: die-
jenige elektrische Doppelschicht an seiner Ober-
fläche zu finden, welche nach aussen dieselbe Po- 231
tentialfunction giebt, welche seine inneren elek-
trischen Massen geben. Diese Umformung der Aufgabe
ist wesentlich verschieden von der, welche aus Kirchhoff's
Theoremen herfliesst. Nach der letzteren würden wir eine

einfache elektrische Schicht zu suchen haben, welche an der Grenze des Körpers denselben Differentialquotienten der Potentialfunction, senkrecht gegen die Oberfläche genommen, gäbe wie die inneren elektrischen Massen. Jene Umformung leitete mich in der That in einigen Fällen zur vollständigen Lösung, wo ich diese aus Kirchhoff's Theoremen nicht herzuleiten wusste. Als Beispiel will ich hier die Stromvertheilung in einer gleichmässig leitenden Kugel behandeln.

Wir wenden Polarcoordinaten an, die sich auf den Mittelpunkt der Kugel beziehen, und setzen:

$$x = \varrho \cos \omega, \qquad y = \varrho \sin \omega \cos \varphi, \qquad z = \varrho \sin \omega \sin \varphi,$$

bezeichnen den Radius der Kugel mit R, und setzen $R / \varrho = u$ und $\varrho / R = v$. Alsdann findet bekanntlich folgende Beziehung zwischen der Potentialfunction V_a einer auf der Kugeloberfläche verbreiteten elektrischen Schicht für die Punkte des äusseren Raumes genommen, und der anderen V_i für den inneren Raum der Kugel statt:

$$\left.\begin{array}{l} \text{wenn } V_a = \dfrac{1}{\varrho} F_{(\omega,\, \varphi,\, u)} \\ \text{so ist } V_i = \dfrac{1}{R} F_{(\omega,\, \varphi,\, v)} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Um nun den allgemeinen Ausdruck für die inneren und äusseren Potentialfunctionen einer elektrischen Doppelschicht zu finden, nehmen wir an, auf einer Kugelfläche vom Radius $R + \Delta R$ befinde sich die eine als positiv betrachtete Schicht, und auf einer mit der ersten concentrischen vom Radius $R - \Delta R$ die negative. ΔR wird natürlich als eine verschwindend kleine Grösse angesehen. Die äussere Potentialfunction der ersten
232 Schicht ist dann $V_a + (d V_a / dR)\, \Delta R$, die der zweiten $V_a - (d V_a / dR)\, \Delta R$; folglich ist die äussere Potentialfunction der elektrischen Doppelschicht:

$$P_a = 2 \frac{d V_a}{d R} \Delta R = \frac{2}{\varrho^2} F'_{(u)} \Delta R, \qquad (4)$$

und ähnlich die innere Potentialfunction:

$$P_i = 2 \frac{d V_i}{d R} \Delta R = -2 \left[F_{(v)} + \frac{\varrho}{R} F'_{(v)} \right] \frac{\Delta R}{R^2}. \qquad (5)$$

Das Zeichen $F'_{(u)}$ ist hier für $dF_{(u)} / du$ gesetzt.

Ist uns nun die Aufgabe gestellt eine bestimmte Doppelschicht zu suchen, welche die gewissen in der Kugel verbreiteten elektromotorischen Kräften entsprechende elektromotorische Fläche darstellt, so setzen wir zunächst die diesen Kräften entsprechenden elektrischen Massen hin, und bestimmen deren Potentialfunction W. Ausserhalb der Kugel muss sein:

$$W = P_a = \frac{2\Delta R}{\varrho^2} F'_{(u)}, \quad \text{also:}$$

$$F'_{(u)} = \frac{\varrho^2}{2\Delta R} W$$

$$F'_{(u)} = \frac{1}{2\Delta R}\int \varrho^2\, W\, du + C. \tag{6}$$

Bei der Integration ist zu bemerken, dass ϱ eine Function von u ist, nämlich gleich R/u. Die Constante C ist ganz beliebig. Nachdem man $F_{(u)}$ gefunden hat, ergiebt sich sogleich aus Gleichung (5) die Function P_i, und endlich die elektrische Spannung S in der durchströmten Kugel:

$$S = W - P_i, \quad \text{oder:}$$

$$S = 2\left[\frac{1}{R^2} F_{(v)} + \frac{1}{\varrho^2} F'_{(u)} + \frac{\varrho}{R^3} F'_{(v)}\right] \Delta R. \tag{7}$$

Somit ist das Problem ganz allgemein auf Quadraturen zurückgeführt.

Als besonderen Fall will ich den behandeln, wo die Elektricität durch Punkte der Oberfläche in die Kugel einströmt. Der eine von der elektrischen Masse $+A$ habe die Winkel- 233
coordinaten $\omega = \alpha_1$ und $\varphi = o$, der andere von der Masse $-A$ dagegen $\omega = \alpha_2$ und $\varphi = o$. Die Entfernungen r_1 und r_2 dieser beiden Punkte von demjenigen, dessen Coordinaten ϱ, ω und φ sind, finden sich aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (\varrho \cos\omega - R\cos\alpha_1)^2 + (\varrho \sin\omega \cos\varphi - R\sin\alpha_1)^2 \\ &\qquad + \varrho^2 \sin^2\omega \sin^2\varphi \\ &= \varrho^2 + R^2 - 2R\varrho\,(\cos\omega\cos\alpha_1 + \sin\omega\sin\alpha_1\cos\varphi) \\ r_2^2 &= \varrho^2 + R^2 - 2R\varrho\,(\cos\omega\cos\alpha_2 + \sin\omega\sin\alpha_2\cos\varphi). \end{aligned}$$

Setzen wir:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \cos\omega\cos\alpha_1 + \sin\omega\sin\alpha_1\cos\varphi \\ \gamma_2 &= \cos\omega\cos\alpha_2 + \sin\omega\sin\alpha_2\cos\varphi, \end{aligned}$$

so ist:

$$W = \frac{A}{\sqrt{\varrho^2 + R^2 - 2\gamma_1 R\varrho}} - \frac{A}{\sqrt{\varrho^2 + R^2 - 2\gamma_2 R\varrho}},$$

daher nach Gleichung (6):

$$F_{(u)} = \frac{1}{2\varDelta R}\int \varrho^2 W du + C,$$

oder wenn man ϱ durch u ausdrückt:

$$F_{(u)} = \frac{AR}{2\varDelta R}\int\left[\frac{1}{u\sqrt{1+u^2-2\gamma_1 u}} - \frac{1}{u\sqrt{1+u^2-2\gamma_2 u}}\right]du + C$$

$$F_{(u)} = \frac{AR}{2\varDelta R}\log.\text{nat.}\left\{\frac{1-\gamma_2 u + \sqrt{1+u^2-2\gamma_2 u}}{1-\gamma_1 u + \sqrt{1+u^2-2\gamma_1 u}}\right\} + C.$$

Substituirt man die hier gefundene Function $F_{(u)}$ in die Gleichung (7), so giebt sie:

$$S = \frac{A}{R}\log.\text{nat.}\left\{\frac{R-\gamma_2\varrho + \sqrt{R^2+\varrho^2-2\gamma_2 R\varrho}}{R-\gamma_1\varrho + \sqrt{R^2+\varrho^2-2\gamma_1 R\varrho}}\right\}$$
$$+ \frac{2A}{\sqrt{R^2+\varrho^2-2\gamma_1 R\varrho}} - \frac{2A}{\sqrt{R^2+\varrho^2-2\gamma_2 R\varrho}} + C.$$

Diese Gleichung ist zugleich auch die der Spannungsflächen, deren Gesetz hiernach ein ziemlich verwickeltes ist. Dasselbe ist für die Strömungscurven der Fall, sodass es zu weitläufig sein würde, es hier weiter auszuführen.

353 IV. Theorem von der gleichen gegenseitigen Wirkung zweier elektromotorischen Flächenelemente.

Wählt man im Innern eines zusammengesetzten, aber nicht elektromotorisch wirksamen Leitersystems zwei beliebig gelegene Flächenelemente a und b, und ertheilt erst dem a, später dem b eine gleiche elektromotorische Kraft, so fliesst im ersten Falle durch b so viel Elektricität, wie im zweiten durch a.

Zum Beweise dieses Theorems gebrauche ich einen Satz, den Green[1]) gefunden, und zum Beweise eines ähnlichen

1) On the Theories of Electr. and Magnetism. Art. 3. Gleichung (2), abgedruckt in Crelle's Journal Bd. 44.

Theorems für statische Elektricität angewendet hat, und dem man leicht eine etwas andere Form geben kann. Sind nämlich U und V zwei continuirliche Functionen der Coordinaten x, y, z, deren erste Differentialcoëfficienten im Innern eines geschlossenen Raumes S nirgends unendlich werden, und ist $d\omega$ ein Element der Oberfläche dieses Raumes, n die nach Innen gerichtete Normale desselben, so ist:

$$\iiint U\left(\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2}\right) dx\, dy\, dz + \int U \frac{dV}{dn}\, d\omega =$$
$$\iiint V\left(\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2}\right) dx\, dy\, dz + \int V \frac{dU}{dn}\, d\omega, \qquad (1)$$

wo die dreifachen Integrale über den ganzen Raum S und die 364
einfachen über seine ganze Oberfläche auszudehnen sind.

Nun sei die Function U die Potentialfunction einer Masse, die theils mit der veränderlichen Dichtigkeit μ im Innern von S, theils ausserhalb verbreitet ist, dann ist nach einem bekannten Satze von Gauss und Green:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} = -4\pi\mu.$$

Und ebenso sei V die Potentialfunction einer Masse, die mit der veränderlichen Dichtigkeit ν theils in S, theils ausserhalb verbreitet ist, so dass:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = -4\pi\nu.$$

Die Gleichung (1) verwandelt sich dann in folgende[1]):

$$\int U \frac{dV}{dn}\, d\omega - 4\pi \iiint \nu\, U\, dx\, dy\, dz =$$
$$\int V \frac{dU}{dn}\, d\omega - 4\pi \iiint \mu\, V\, dx\, dy\, dz. \qquad (2)$$

Um mit Hülfe dieser Gleichung das oben ausgesprochene Theorem zu beweisen, unterscheiden wir folgende Fälle:

---

1) Aus dieser Gleichung folgt als ein besonderer Fall die Nr. (3) in der angeführten Stelle von Green, welche entsteht, wenn ein endlicher Theil der Masse μ in einen Punkt vereinigt wird, in welchem dann auch die Differentialcoëfficienten, ebenso wie die Dichtigkeit der Masse unendlich werden.

1) wenn der Leiter S in allen seinen Theilen dieselbe Leitungsfähigkeit k besitzt.

Wir machen in diesem Falle das U der Gleichung (2) gleich der Potentialfunction der Elektricität, welche entsteht, wenn das Flächenelement a elektromotorisch wirkt, V gleich der anderen, welche entsteht, wenn b wirksam ist. Dann ist μ überall gleich Null, ausser in der elektrischen Doppelschicht des Flächenelements a, und ν überall gleich Null, ausser in der Doppelschicht von b. Bezeichnen wir mit U_b und V_a den Werth dieser Functionen in den betreffenden Orten b und a,
355 den Abstand der elektrischen Schichten von den Flächenelementen mit ε, und die Normale auf a nach Seite der positiven Belegung positiv gerechnet mit α, ebenso die auf b mit β, so ist der Werth von U innerhalb der positiv elektrischen Belegung von b gleich:

$$U_b + \varepsilon \frac{dU}{d\beta},$$

innerhalb der negativen:

$$U_b - \varepsilon \frac{dU}{d\beta},$$

der Werth von V innerhalb der positiven Belegung von a gleich:

$$V_a + \varepsilon \frac{dV}{d\alpha},$$

innerhalb der negativen:

$$V_a - \varepsilon \frac{dV}{d\alpha}.$$

Ist die Dichtigkeit der positiv elektrischen Belegung auf a wie auf b gleich $+A$, die der negativen gleich $-A$, und bezeichnen wir in den folgenden Gleichungen mit a und b die Grösse der Flächenelemente, so reduciren sich die dreifachen Integrale der Gleichung (2) respectiv auf:

$$2A\varepsilon b \frac{dU}{d\beta}$$

und:

$$2A\varepsilon a \frac{dV}{d\alpha}.$$

Die Oberflächen-Integrale jener Gleichung werden gleich Null, weil nach Kirchhoff's zweiter Bedingung für die Stromver-

theilung an der freien Oberfläche die Werthe von dU/dn und dV/dn überall gleich Null sein müssen. Die Gleichung (2) reducirt sich also in diesem Falle auf:

$$-8\pi A\varepsilon b\frac{dU}{d\beta} = -8\pi A\varepsilon a\frac{dV}{d\alpha}.$$

Daher ist auch: $$-kb\frac{dU}{d\beta} = -ka\frac{dV}{d\alpha}.$$

Diese beiden Grössen sind aber die durch a und b in der 356
Zeiteinheit fliessenden Elektricitätsmengen, deren Gleichheit bewiesen werden sollte.

2) Wenn der Leiter aus zwei Theilen $S_{,}$ und $S_{,,}$ besteht, deren einer die Leitungsfähigkeit $k_{,}$, der andere $k_{,,}$ hat, und beide Flächenelemente a und b in $S_{,}$ liegen.

U und V behalten ihre Bedeutung wie im vorigen Falle für das Leiterstück $S_{,}$, die entsprechenden Potentialfunctionen in $S_{,,}$ bezeichnen wir mit u und v. Wie im vorigen Falle reduciren sich die dreifachen Integrale der Gleichung (2) innerhalb $S_{,}$ auf:

$$2A\varepsilon b\frac{dU}{d\beta}$$

und: $$2A\varepsilon a\frac{dV}{d\alpha}.$$

Innerhalb $S_{,,}$, welches gar keine elektromotorischen Kräfte, also auch keine elektrischen Massen enthält, werden sie gleich Null. Die einfachen Integrale jener Gleichung werden aber nicht mehr gleich Null, da an dem Theile der Grenzoberflächen, wo sich $S_{,}$ und $S_{,,}$ berühren, die Grössen $dU/dn_{,}$, $dV/dn_{,}$, $du/dn_{,,}$ und $dv/dn_{,,}$ nicht mehr gleich Null werden, wie an der freien Oberfläche der Fall ist. Zwischen diesen Grössen bestehen aber in sämmtlichen Punkten der Grenzfläche folgende Beziehungen:

$$k_{,}\frac{dU}{dn_{,}} + k_{,,}\frac{du}{dn_{,,}} = 0,$$

$$k_{,}\frac{dV}{dn_{,}} + k_{,,}\frac{dv}{dn_{,,}} = 0,$$

$$U = u \text{ und}$$

$$V = v.$$

Daraus folgt, dass auch:

$$\left.\begin{aligned} k_{,}\int V\frac{dU}{dn_{,}}\,d\omega_{,} &= -\,k_{,,}\int v\,\frac{du}{dn_{,,}}\,d\omega_{,,} \\ k_{,}\int U\frac{dV}{dn_{,}}\,d\omega_{,} &= -\,k_{,,}\int u\,\frac{dv}{dn_{,,}}\,d\omega_{,,} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

wobei die Integrale über die ganze Grenzfläche, oder, was
367 damit einerlei ist, über die ganze Oberfläche der betreffenden Leiterstücke $S_{,}$ und $S_{,,}$ auszudehnen sind.

Die Gleichung (2) verwandelt sich demgemäss für $S_{,}$ und $S_{,,}$ beziehlich in:

$$\left.\begin{aligned} \int U\frac{dV}{dn_{,}}\,d\omega_{,} - 8\pi A\varepsilon b\frac{dU}{d\beta} &= \int V\frac{dU}{dn_{,}}\,d\omega_{,} - 8\pi A\varepsilon a\frac{dV}{d\alpha} \\ \int u\,\frac{dv}{dn_{,,}}\,d\omega_{,,} &= \int v\,\frac{du}{dn_{,,}}\,d\omega_{,,}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Multiplicirt man die erstere dieser Gleichungen mit $k_{,}$, die zweite mit $k_{,,}$, addirt sie und berücksichtigt dabei die Gleichungen (3), so erhält man wieder:

$$-\,k_{,}b\frac{dU}{d\beta} = -\,k_{,}a\frac{dV}{d\alpha},$$

d. h. die beziehlich durch a und b fliessenden Elektricitätsmengen sind sich gleich, was zu beweisen war.

3) Wenn der Leiter aus zwei Stücken $S_{,}$ und $S_{,,}$ von verschiedener Leitungsfähigkeit $k_{,}$ und $k_{,,}$ besteht, und das Flächenelement a in $S_{,}$, b in $S_{,,}$ liegt.

In diesem Falle ist die Grösse μ der Gleichung (2) überall gleich Null, ausser in der Belegung von a im Leiter $S_{,}$, die Grösse ν überall gleich Null, ausser in der Belegung von b im Leiter $S_{,,}$. Von den dreifachen Integralen bleibt also im Leiter $S_{,}$ nur eins bestehen mit dem Werthe:

$$2A\varepsilon a\frac{dV}{d\alpha},$$

im Leiter $S_{,,}$ auch eins mit dem Werthe:

$$2A\varepsilon b\frac{du}{d\beta}.$$

Die Gleichungen (3) des vorigen Falles bestehen auch in diesem unverändert.

Die Gleichung (2) für $S_{,}$ und $S_{,,}$ reducirt sich betreffend auf:

$$\left.\begin{aligned}\int U\frac{dV}{dn_{,}}d\omega_{,} &= \int V\frac{dU}{dn_{,}}d\omega_{,} - 8\pi A\varepsilon a\frac{dV}{d\alpha}\\ \int u\frac{dv}{dn_{,,}}d\omega_{,,} - 8\pi A\varepsilon b\frac{du}{d\beta} &= \int v\frac{du}{dn_{,,}}d\omega_{,,}\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Multiplicirt man die erstere dieser Gleichungen mit $k_{,}$, die zweite mit $k_{,,}$, und addirt sie mit Berücksichtigung der Glei- 358
chungen (3), so erhält man:

$$-k_{,,}b\frac{du}{d\beta} = -k_{,}a\frac{dV}{d\alpha}.$$

Die beiden letzteren Grössen sind wieder die durch b und a fliessenden Elektricitätsmengen.

Man sieht leicht ein, dass dieselbe Art des Beweises auf drei oder mehr Stücke von verschiedener Leitungsfähigkeit anzuwenden sein würde, so dass das oben hingestellte Theorem als allgemein gültig betrachtet werden kann.

Seine hauptsächlichste Anwendung erhält dieses Theorem bei solchen Aufgaben, wo das körperlich ausgedehnte Leitersystem mit einem Galvanometer in Verbindung gesetzt ist, in dessen linearer Leitung man die Stromstärke bestimmen will. Ist man nämlich im Stande zu bestimmen, in welcher Weise ein im Galvanometerdraht erregter Strom sich in dem körperlichen Leiter vertheilt, so kann man mit Hülfe unseres Satzes auch die Stärke des Galvanometerstromes bestimmen, welcher durch jede beliebige Vertheilung von elektromotorischen Kräften im körperlichen Leiter hervorgebracht wird, ohne dass man nöthig hat, die Vertheilung der Ströme in dem letzteren zu kennen. Jedes einzelne Element a einer elektromotorischen Fläche lässt so viel Elektricität durch den Galvanometerdraht fliessen, als durch es selbst fliessen würde, wenn seine elektromotorische Kraft in diesem Drahte angebracht wäre. Summirt man die Wirkungen sämmtlicher elektromotorischen Flächenelemente, deren jede einzelne in der angegebenen Weise zu finden ist, so bekommt man den ganzen Strom im Galvanometer.

Das besprochene Theorem ergänzt die Anwendbarkeit des Princips von der elektromotorischen Oberfläche. Bei der Ver-

bindung eines elektromotorisch wirksamen körperlichen, und eines linearen Leiters können wir uns die den ersteren durchkreisenden Ströme zusammengesetzt denken aus einem System A, wie es die elektromotorischen Kräfte vor Anlegung des Gal-
359 vanometerdrahtes erregen, und aus einem System B, welches der Vertheilung eines den Draht durchkreisenden Stromes entspricht. Mittels des Princips von der elektromotorischen Oberfläche können wir die elektromotorische Kraft des Galvanometerstromes ermitteln, wenn wir A, aber nicht B kennen, und mittels des zuletzt bewiesenen Satzes die Intensität des Galvanometerstromes, wenn wir B kennen, aber nicht A.

V. Experimentelle Prüfung.

Die bisher theoretisch abgeleiteten Sätze lassen sich in so weit durch Versuche bestätigen, als dabei nur Stromstärken in linearen Leitern zu messen sind. Als körperlichen Leiter wählte ich für diese Versuche einen soliden Cylinder von Bunsen'scher Kohle, 3¼ Zoll lang und 2 Zoll dick, von nicht ganz regelmässiger Form und, wie die Versuche ergaben, von sehr ungleichmässigem Widerstande in verschiedenen Theilen. Derselbe wurde horizontal auf einem Brettchen befestigt, und auf dem nach oben gekehrten Theile seiner cylindrischen Fläche kittete ich vier kleine Pappringe fest, so dass dadurch vier Näpfchen zur Aufnahme von Quecksilber gebildet wurden, deren Boden aus Kohle, und deren Seitenwände aus Pappe bestanden. Die Näpfchen standen nahe hin in einer geraden Linie, und in gleichen Abständen von einander, sie sind im Folgenden der Reihe nach mit Buchstaben a, b, c und d bezeichnet. Durch sie geschah die Zuleitung und Ableitung der Ströme. Der Versuch, Kupfervitriollösung in Glasgefässen mit kupfernen Elektroden als körperlichen Leiter zu benutzen, missglückte, weil die Polarisation der Elektroden, die zwar gering genug ist, um bei anderen Versuchen vernachlässigt zu werden, bei den hier vorkommenden schwachen abgeleiteten Strömen sehr störend sich bemerklich machte. Metallstücke, welche nach drei Dimensionen beträchtliche Ausdehnungen haben, leiten wiederum zu gut im Vergleich mit den Drahtleitungen der Batterie und des Galvanometers, so dass die Unterschiede

der elektrischen Spannungen in ihnen, und demgemäss auch die abgeleiteten Ströme, zu schwach werden. Die Bunsen'sche 360
Kohle war von beiden Uebelständen frei.

Die Messung der Stromintensitäten im Galvanometerdrahte geschah mit Hülfe eines magnetisirten Stahlspiegelchens, wie es W. Weber vorgeschlagen hat. Dasselbe hing innerhalb eines dicken kupfernen Gehäuses, so dass seine Schwingungen sehr stark gedämpft wurden, und seine Ablenkungen wurden in bekannter Weise durch Beobachtung der scheinbaren Bewegung des Spiegelbildes einer 2,4 m entfernten Scale gemessen. Die Ablenkungen überstiegen nicht vier Winkelgrade, so dass ihre Tangenten den Stromintensitäten proportional zu setzen waren.

Die erste Beobachtungsreihe ist bestimmt das Theorem Abschnitt II. Nr. 4 zu prüfen, wonach ein körperlicher zusammengesetzter Leiter, der in zwei bestimmten Punkten seiner Oberfläche abgeleitet wird, bei verschiedenem Widerstande des Ableitungskreises genau ebenso starke abgeleitete Ströme giebt, als ein linearer Leiter von einem gewissen constanten Widerstande und einer constanten elektromotorischen Kraft geben würde.

Die Pole eines Daniell'schen Elementes von grosser Oberfläche wurden mit den Quecksilbernäpfen a und d der Kohle verbunden, und in diesen Kreis ein mässiger Drahtwiderstand eingeschaltet, um zu verhindern, dass der Zustand des galvanischen Elementes unter dem Einflusse sehr starker Ströme sich zu schnell ändere. Diese Verbindung des Daniell'schen Elementes mit der Kohle stellte den abgeleiteten und elektromotorisch wirksamen Leiter A der obigen Theoreme dar. Die Leitung des abgeleiteten Kreises bestand aus einem bleibenden Drahtstücke m und drei einzuschaltenden Stücken, die wir p, q und r nennen wollen. In den folgenden Versuchen wird p als die willkürliche Einheit des Widerstandes gebraucht werden. Der sehr lange und feine Galvanometerdraht war als Nebenleitung des Stückes m eingefügt. Die Enden des abgeleiteten Kreises wurden in dieser Versuchsreihe stets mit den Näpfen b und d verbunden, in welchen
letzteren Napf auch der eine Zuleitungsdraht der Batterie 361

tauchte. Das in b tauchende Ende des abgeleiteten Kreises empfing dagegen die Strömungen nur aus dem Kohlencylinder.

Die hier folgende Tafel enthält die Beobachtungen der Stromstärke im abgeleiteten Kreise, welche bei verschiedenen Einschaltungen gemacht wurden. Die letzteren sind in der zweiten Columne bezeichnet; o bedeutet, dass keine Einschaltung vorhanden war, der abgeleitete Kreis also nur aus dem Stücke m mit dem als Nebenleitung eingeschalteten Galvanometerdrahte bestand; $p+q$ bezeichnet, dass die beiden Stücke hinter einander eingeschaltet waren, so dass sie der Strom nach einander durchlief, $p \sim q$, dass sie neben einander sich befanden, und der Strom sich zwischen sie theilte. Die Stromintensitäten sind durch die der Ablenkung des Magneten entsprechenden Scalentheile angegeben. Die Correctionen, welche nöthig sind, um die abgelesenen Tangenten des doppelten Ablenkungswinkels in die doppelten Tangenten des einfachen Winkels zu verwandeln, sind angebracht.

Beobachtungsreihe I.

Nr.	Einschaltung des abgeleiteten Kreises	Stromstärke	Elektromotorische Kraft A	Wesentlicher Widerstand W	Berechnete Stromstärke J	Differenz
1	o p o	300,26 159,82 300,56	341,49	1,1367		
2	q	240,49			240,50	– 0,01
3	o p o	298,48 159,18 297,35	341,82	1,1474		
4	$p+q$	139,78			139,98	– 0,20
5	o p o	294,78 157,08 292,40	337,85	1,1508		
6	$p \sim q$	245,30			245,59	– 0,29
7	o p o	292,01 155,09 289,93	332,09	1,1413		

Nr.	Einschaltung des abgeleiteten Kreises	Stromstärke	Elektromotorische Kraft A	Wesentlicher Widerstand W	Berechnete Stromstärke J	Differenz 362
8	r	74,18			74,02	+ 0,16
9	o	288,90				
	p	151,35	321,07	1,1214		
	o	283,75				
10	$p \sim r$	169,59			169,69	— 0,10
11	o	282,66				
	p	150,85	323,62	1,1453		
	o	282,47				
12	$p + r$	59,49			59,37	+ 0,12
13	o	280,54				
	p	149,56	320,40	1,1423		
	o	280,44				

Die Rechnung ist in folgender Weise ausgeführt worden. Der abgeleitete Kreis wurde unserem Theorem gemäss betrachtet, als wäre er aus lauter linearen Leitern mit einer constanten elektromotorischen Kraft gebildet. Letztere nennen wir A, den Widerstand des supponirten linearen Kreises ohne Einschaltung W. Die mit o bezeichneten Beobachtungen geben den Werth von A/W, die mit p bezeichneten von $A/(W+p)$. Aus je drei solcher Beobachtungen, welche unter einer Nummer vereinigt sind, wurden die in der vierten und fünften Columne obiger Tafel stehenden Werthe von A und W berechnet. Aus den beiden mit o bezeichneten Beobachtungen wurde zu diesem Zwecke das Mittel genommen. Die gewonnenen Werthe von A und W dienten nun dazu, die Stromstärke bei Einschaltungen anderer Widerstände zu berechnen. So ist zum Beispiel in Versuch 2 obiger Tafel bei der Einschaltung q die Stromstärke $A/(W+q)$. Für A und W wurden die Mittel der Werthe genommen, welche aus den Versuchen Nr. 1 und Nr. 3 berechnet waren, und so der als berechnete Stromstärke auf- 363
geführte Werth in der sechsten Columne gewonnen. Die Werthe von q und r waren durch andere Beobachtungen bestimmt worden:

$$q = 0{,}2786p$$
$$r = 3{,}2801p.$$

Daraus ergiebt sich nach bekannten Regeln:

$$p \sim q = 0{,}2179 p$$
$$p \sim r = 0{,}7663 p.$$

Die Differenzen zwischen Rechnung und Beobachtung sind überall kleiner als $\frac{1}{500}$ der gemessenen Grösse, und kleiner als $\frac{3}{10}$ eines Scalentheiles, eine Uebereinstimmung, die wohl nicht grösser erwartet werden kann.

Bisher waren die Enden des abgeleiteten Kreises stets mit denselben zwei Näpfen b und d verbunden. Die nun folgende zweite Beobachtungsreihe hat zum Zwecke, die elektromotorischen Kräfte zu vergleichen, welche bei der Ableitung verschiedener Punkte der äusseren Oberfläche des körperlichen Leiters auf den ableitenden Bogen wirken. Das Princip von der elektromotorischen Oberfläche verlangt, dass die abgeleiteten Ströme solche seien, wie sie durch constante auf der Oberfläche der Kohle verbreitete elektromotorische Kräfte entstehen würden, und zwar können wir an einem beliebigen Punkte, z. B. im Napfe a, die Kraft der elektromotorischen Oberfläche (sowie die elektrische Spannung) gleich Null setzen. In einem durch die Näpfe a und b abgeleiteten Strome wirkt dann nur die elektromotorische Kraft von b, die wir mit s_b bezeichnen wollen und in ähnlicher Weise bestimmen können, wie es in der ersten Beobachtungsreihe geschehen ist. Ebenso ist die Grösse dieser Kraft im Punkte c und d, d. h. s_c und s_d zu bestimmen. Nennen wir nun A_{bc} die elektromotorische Kraft im abgeleiteten Kreise, wenn dessen Enden mit den Näpfen b und c verbunden sind, und die Intensität eines von b durch den Bogen nach c gehenden Stromes positiv gerechnet wird, A_{bd} und A_{cd} die entsprechenden elektromotorischen
364 Kräfte bei Verbindung von b mit d und von c mit d, so ist nach dem Princip von der elektromotorischen Oberfläche:

$$A_{cd} = s_c - s_d$$
$$A_{bd} = s_b - s_d$$
$$A_{bc} = s_b - s_c$$

also:

$$A_{bc} + A_{cd} = A_{bd}.$$

Diese Form des Theorems lässt sich durch den Versuch bestätigen. Die Zusammensetzung des Kreises der Batterie und des abgeleiteten Kreises blieb dieselbe wie in der ersten Versuchsreihe, und es wurden die Stromstärken theils ohne Einschaltung (bezeichnet mit *o*), theils mit Einschaltung des Stückes *p* beobachtet. In der zweiten Columne der folgenden Tafel sind die Quecksilbernäpfchen bezeichnet, mit denen die Enden des ableitenden Kreises in Verbindung gesetzt waren. Aus je drei unter einer Nummer zusammengestellten Beobachtungen wurde wieder die entsprechende elektromotorische Kraft berechnet, indem ich aus den beiden mit *o* bezeichneten Beobachtungen das Mittel nahm, ganz wie bei der vorigen Versuchsreihe. Die gefundenen Werthe der elektromotorischen Kraft sind in der letzten Columne der Tafel verzeichnet.

Beobachtungsreihe II.

Nr.	Quecksilber-näpfe	Ein-schaltung	Stromstärke	Elektromotorische Kraft	
		o	297,94		
1	*b d*	*p*	158,88	340,86	
		o	297,25		
		o	207,01		
2	*c d*	*p*	110,24	236,51	
		o	205,97		
		o	296,16		
3	*b d*	*p*	157,98	338,46	
		o	296,36		
		o	89,81		
4	*b c*	*p*	48,00	102,97	
		o	90,01		
		o	296,01		
5	*b d*	*p*	158,08	339,74	365
		o	295,27		
		o	204,98		
6	*c d*	*p*	109,09	233,62	
		o	204,33		
		o	294,68		
7	*b d*	*p*	156,88	335,78	
		o	294,23		

Die Reihe ist so geordnet, dass man nur das Mittel der entsprechenden Beobachtungen zn nehmen hat, um sie alle auf einen Zeitpunkt gleicher Stromstärke zu reduciren. Die Mittel für die Werthe der elektromotorischen Kräfte sind:

$$A_{bd} = 338{,}71$$
$$A_{cd} = 235{,}06;$$

addirt man zu der letzteren Grösse den Werth von:

$$A_{bc} = 102{,}97,$$

so erhält man:

$$A_{bc} + A_{cd} = 338{,}03,$$

fast genau übereinstimmend mit dem Werthe von A_{bd}, wie es das Theorem verlangt.

Ist bei diesen Versuchen der ableitende lineare Zweig von einem so grossen Widerstande, dass dagegen der des körperlichen Leiters verschwindet, so kann man die Beobachtungsmethode sehr vereinfachen. Da sich dann nämlich bei der Anlegung an verschiedenen Stellen der Widerstand des ableitenden Bogens nicht merklich ändert, so ist seine Stromstärke direct proportional der gesuchten elektromotorischen Kraft, mit welcher der körperliche Leiter auf ihn wirkt. Aendert sich der Zustand der Batterie, so kann sich wohl der absolute Werth der gesuchten elektromotorischen Kräfte ändern, muss dabei aber stets der Intensität des Batteriestromes proportional bleiben. Sucht man also das Verhältniss je zweier solcher elektromotorischen Kräfte, so muss dies eine constante, von den Veränderungen der Batterie unabhängige Zahl sein.

366 Ich stellte deshalb noch eine Beobachtungsreihe nach folgender Methode an. Die Widerstände des ableitenden Drahtes und des Batteriezweiges wurden noch grösser gemacht als in der vorigen Reihe, obgleich schon dort die Unterschiede des Widerstandes im ableitenden Kreise bei verschiedenen Verbindungen desselben verschwinden. Aus den Zahlen der zweiten Tafel berechnet sich derselbe nämlich im Mittel:

für die Verbindung $bd = 1{,}1443$
" " " $cd = 1{,}1434$
" " " $bc = 1{,}1453.$

Die Poldrähte des Daniell'schen Elementes wurden mit den Näpfen *a* und *d* in Verbindung gebracht, und der Spannungsunterschied oder die elektromotorische Kraft dieser beiden Punkte gleich 100 gesetzt, die übrigen elektromotorischen Kräfte mussten sich zu dieser dann wie die entsprechenden Stromstärken verhalten.

Ich lasse hier zunächst die Bestimmung eines einzelnen solchen Verhältnisses folgen, um die Anordnung des Versuches daran zu zeigen; von den übrigen werde ich nur die Resultate hersetzen.

Beobachtungsreihe III.

Ruhestand des Magneten	501,1
Strom *ad*	871,1
Ruhestand	501,1
Strom *ab*	752,9
Ruhestand	500,5
Strom *ad*	870,5
Ruhestand	500,0

Daraus finden wir die erste Ablenkung:
durch den Strom *ad* gleich 370,0, corrigirt 367,80
die zweite gleich 370,25, corrigirt 369,05
Mittel 367,92.

Ablenkung durch den Strom *ab* 252,1, corrigirt 251,41. Also die elektromotorische Kraft für *ab* gleich:

$$\frac{251,41}{367,92} . 100 = 68,335.$$

Ganz in derselben Weise sind die elektromotorischen Kräfte 367
verschiedener Verbindungsstellen bestimmt worden, welche ich hier folgen lasse.

Nr.	Quecksilbernäpfe	Elektromotorische Kraft, beobachtet	Mittel	Elektromotorische Kraft, berechnet	Differenz
1		78,61			
9	*a*, *c*	78,36	78,59	78,87	— 0,28
10		78,81			
4		20,98			
5	*c*, *d*	21,00	20,89	21,13	— 0,24
12		20,70			

Nr.	Quecksilber-näpfe	Elektromo-torische Kraft beobachtet	Mittel	Elektromo-torische Kraft berechnet	Differenz
2 8	a, b	68,33 68,42	68,37	68,29	+ 0,08
7 11	b, d	31,73 31,75	31,77	31,71	+ 0,04
3 6 13	b, c	10,59 10,75 10,51	10,61	10,58	+ 0,03.

Die Ziffern der ersten Columne bezeichnen die Reihenfolge, in welcher die Versuche angestellt worden sind. In der zweiten sind die Quecksilbernäpfe bezeichnet, mit denen die Enden des ableitenden Zweiges verbunden waren. Die dritte Columne enthält unter der Bezeichnung von beobachteten elektromotorischen Kräften diejenigen, welche unmittelbar aus den Versuchen in der oben ausgeführten Weise berechnet waren, die vierte deren Mittel. Der fünften liegt folgende Rechnung zum Grunde. Die fünf gemessenen Grössen müssen folgende Gleichungen erfüllen:

$$A_{ab} + A_{bc} + A_{cd} = 100$$
$$A_{ab} + A_{bc} = A_{ac}$$
$$A_{bc} + A_{cd} = A_{bd}.$$

Sind also beliebige zwei von ihnen bekannt, so sind dadurch auch die anderen drei zu berechnen. Die Mittel der Beobachtungen erfüllen diese Gleichungen fast, aber nicht vollkommen genau, denn substituirt man sie in denselben, so geben sie:

368 in der ersten links: 99,87, rechts: 100
in der zweiten links: 78,98, rechts: 78,59
in der dritten links: 31,50, rechts: 31,75.

Doch sind die Unterschiede so klein, dass sie Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden können. Ich habe nun nach der Methode der kleinsten Quadrate diejenigen Werthe der fünf Grössen bestimmt, welche jene drei Gleichungen streng erfüllen, und sich am nächsten an die Beobachtungen anschliessen, und diese als die berechneten Werthe der elektromotorischen Kraft

in die Tafel aufgenommen. Man sieht, dass ihre Abweichungen von den Mittelwerthen gering sind.

Somit ist der Satz von der elektromotorischen Oberfläche, wenigstens für angelegte lineare Leiter, auch durch die Versuche bestätigt worden. Ich schliesse endlich noch eine Beobachtungsreihe an zur Prüfung des Theorems von der gleichen gegenseitigen Wirkung elektromotorischer Flächenelemente.

Um das Problem zu prüfen, müssen wir die Stromstärke in beiden Elementen bestimmen können, und dies ist nur möglich, wenn beide in linearen Leitern liegen. Wir werden also den Fall untersuchen, wo an einen körperlichen Leiter zwei lineare B und C angelegt sind. Nach dem aufgestellten Theorem muss eine elektromotorische Kraft, welche in B angebracht wird, in C dieselbe Stromstärke hervorbringen, welche in B eintreten würde, wenn jene Kraft in C angebracht wäre. Um die beiden Stromstärken vergleichen zu können, muss man also einmal die Batterie in B und das Galvanometer in C, dann wieder erstere in C, letzteres in B anbringen, und da sich dabei der Widerstand der betreffenden Stromeszweige nicht ändern darf, so müssten Batterie und Galvanometer denselben Widerstand haben. Diese Bedingung würde wegen des wechselnden Zustandes der Batterie ziemlich schwer zu erfüllen sein. Glücklicherweise können wir uns ihrer Erfüllung ungestraft entziehen, wenn wir den Widerstand beider zu vertauschenden Leitungen so gross machen, dass die Widerstände 369
des übrigen Theiles der Leitung dagegen verschwinden. Während nämlich im Allgemeinen der obige Satz nur gilt, wenn die beiden vertauschten Zweige denselben Widerstand W haben, so bleibt er bei sehr grossen Widerständen der beiden Zweige doch auch bestehen, wenn der des Galvanometers geändert, und gleich w gemacht wird. Dabei ändert sich bei verschiedenen Verbindungsweisen des Galvanometerzweiges mit dem körperlichen Leiter seine Stromintensität stets in demselben Verhältnisse W/w, und hatte sie also beim Widerstande W gleiche Werthe, so wird sie solche auch noch beim Widerstande w haben.

Als körperlicher Leiter diente wieder der bisher gebrauchte Kohlencylinder. Der Galvanometerzweig bestand nur aus dem

sehr langen und feinen Galvanometerdrahte, der Batteriezweig aus vier Daniell'schen Elementen, säulenartig verbunden, mit Einschaltung einer Drahtspirale, deren Widerstand den des in der dritten Beobachtungsreihe gebrauchten ableitenden Zweiges noch übertraf, so dass jedenfalls die Widerstände der Kohle gegen die der Zweige verschwindend klein waren.

Die folgenden Beobachtungen beweisen, dass die Stromstärke im Galvanometer unverändert bleibt, wenn seine Verbindungsstellen und die des Batteriezweiges mit der Kohle verwechselt werden. In der zweiten Columne der Tafel sind die Quecksilbernäpfe bezeichnet, in welche die Enden der Batteriedrähte, in der dritten die, in welche die Enden des Galvanometerdrahtes tauchten. In der fünften bedeutet die Bezeichnung $B_{ab}\,G_{cd}$, dass die Batterie mit den Näpfen a und b, das Galvanometer mit denen c und d verbunden war. Es sind nicht alle Combinationen erschöpft, welche sich herstellen liessen, doch glaube ich genug beobachtet zu haben, um die Richtigkeit des zu prüfenden Satzes ausser Zweifel zu stellen.

370 Beobachtungsmethode IV.

Nr.	Batterie	Galvanometer	Stromstärke	Mittel
	a d	*b c*	90,25	
	b c	*a d*	90,45	
	a d	*b c*	90,9	
1	*b c*	*a d*	90,5	$B_{ad}\,G_{bc} = 90{,}44$
	a d	*b c*	90,5	$B_{bc}\,G_{ad} = 90{,}28$
	b c	*a d*	90,05	
	a d	*b c*	90,1	
	b c	*a d*	90,1	
	a c	*b d*	83,15	
2	*b d*	*a c*	83,0	$B_{ac}\,G_{bd} = 83{,}10$
	a c	*b d*	83,05	$B_{bd}\,G_{ac} = 83{,}17$
	b d	*a c*	83,35	
	c d	*a b*	7,1	
	a b	*c d*	6,4	$B_{cd}\,G_{ab} = 7{,}1$
3	*c d*	*a b*	7,1	$B_{ab}\,G_{cd} = 6{,}95$
	a b	*c d*	7,75	
	a b	*c d*	7,7	
	a d	*b d*	102,8	
4	*b d*	*a d*	102,9	$B_{ad}\,G_{bd} = 103{,}15$
	a d	*b d*	103,5	$B_{bd}\,G_{ad} = 103{,}20$
	b d	*a d*	103,5	

Nr.	Batterie	Galvanometer	Stromstärke	Mittel
5	*c d*	*a d*	73,0	$B_{cd}\, G_{ad} = 73{,}05$
	a d	*c d*	72,7	$B_{ad}\, G_{cd} = 72{,}67$
	c d	*a d*	73,1	
	a d	*c d*	72,65	
6	*c d*	*b d*	75,45	$B_{cd}\, G_{bd} = 75{,}67$
	b d	*c d*	75,4	$B_{bd}\, G_{cd} = 75{,}70$
	c d	*b d*	75,9	
	b d	*c d*	76,0	
7	*b c*	*a c*	93,45	$B_{bc}\, G_{ac} = 93{,}47$
	a c	*b c*	93,25	$B_{ac}\, G_{bc} = 93{,}37$
	b c	*a c*	93,5	
	a c	*b c*	93,5	
8	*d c*	*a c*	65,1	$B_{dc}\, G_{ac} = 65{,}12$
	a c	*d c*	65,5	$B_{ac}\, G_{dc} = 65{,}27$
	d c	*a c*	65,15	
	a c	*d c*	65,05	
9	*b c*	*d c*	62,55	$B_{bc}\, G_{dc} = 62{,}55$
	d c	*b c*	62,9	$B_{dc}\, G_{bc} = 62{,}9$.

VI. Anwendung auf die thierisch-elektrischen Versuche. 371

Die thierischen Theile, Muskeln und Nerven, stellen körperlich ausgedehnte Leiter dar, in deren Innerem überall elektromotorische Kräfte verbreitet sind; denn jeder kleinste noch reizbare Theil eines Muskels ist nach den Untersuchungen von E. du Bois-Reymond fähig, elektrische Ströme hervorzubringen. Bei den darüber anzustellenden Versuchen werden die thierischen Theile in geeigneter Weise mit einem Galvanometer verbunden, und der in den Draht dieses Instrumentes abgeleitete Stromzweig ist vorläufig der einzige Theil jener elektrischen Wirkungen, welcher der directen Beobachtung und Messung zugänglich ist. Mit den empirisch gefundenen Gesetzen seiner Erscheinung müssen die Folgerungen aus den theoretischen Vorstellungen verglichen werden, welche wir uns über die Anordnung elektromotorischer Theile im Innern des Muskels oder Nerven gebildet haben. Dafür waren die bisherigen theoretischen Kenntnisse der Stromvertheilung in Körpern nicht ausreichend, daher du Bois-Reymond in seinem ausgezeichneten Werke über thierische Elektricität in den Abschnitten, welche die hypothetischen Vertheilungsweisen elektro-

motorischer Kräfte im Innern der Muskeln behandeln, sich vielfältig mit scharfsinnig combinirten Analogien und Wahrscheinlichkeitsgründen begnügen musste, um zum Ziele zu gelangen. Unsere Theoreme setzen uns jetzt in den Stand, strengere und kürzere Ableitungen für die Hauptpunkte seiner theoretischen Betrachtungen zu geben, welche in allen wesentlicheren Punkten mit den von ihm aufgestellten Sätzen übereinstimmen. Dass in einigen weniger wesentlichen Punkten Abweichungen vorkommen, ist unter diesen Umständen nicht zu verwundern, und kann dem Lobe, welches du Bois' Scharfsinn gebührt, keinen Abbruch thun, um so weniger als diese Punkte solche sind, in denen die Versuche an den Kupferzinkschematen seine Schlüsse zu bestätigen schienen.

Die Versuche ergeben unmittelbar, dass jedes Stück einer
372 einzelnen Muskelfaser in einem angelegten unwirksamen leitenden Bogen Ströme erregt, welche von ihrer prismatischen oder cylindrischen Oberfläche (ihrem Längsschnitte) zu ihren Endflächen (Querschnitten) hingehen. Denken wir uns also die elektromotorische Oberfläche eines solchen Faserstückes an die Stelle seiner inneren Kräfte gesetzt, so muss diese am Längsschnitt nach aussen positiv, an den Querschnitten negativ sein. Mit einer kleinen Erweiterung der von du Bois angewendeten Bezeichnungsweise wollen wir eine solche Anordnung elektromotorischer Kräfte, welche eine elektromotorische Oberfläche giebt, an der zwei unter sich gleichartige Pole der Aequatorialgegend entgegengesetzt sind, die *peripolare* nennen. Die Muskelprimitivfasern sind nun allerdings die kleinsten Theile des Muskels, welche wir mechanisch abtrennen, und allenfalls noch auf ihr elektromotorisches Verhalten untersuchen können, auch zeigt selbst das Mikroskop keine weiteren Unterabtheilungen im Innern von frischen Fasern[1]); indessen machen doch andere elektrische Erscheinungen, namentlich die ungeheure Schnelligkeit, mit der in der negativen Stromesschwankung und im elektrotonischen Zustande die elektromotorischen Kräfte der Muskeln und Nerven ihre Stärke und Richtung wechseln können, es wahrscheinlich, dass die kleinsten elektro-

1) Diese sind später gefunden worden. (1881.)

motorischen Elemente noch viel kleiner als der Durchmesser der Muskel- und Nervenfasern sind, und eine grosse Beweglichkeit besitzen. Deshalb führt du Bois die elektrischen Wirkungen der thierischen Theile auf peripolar elektromotorische Molekeln von verschwindend kleiner Grösse zurück, welche, umgeben von einer indifferenten leitenden Substanz, im Inhalt der Fasern in gleichen Abständen regelmässig vertheilt sind, so dass ihre Axe der Axe der Faser parallel ist. Mögen wir nun bis auf die Primitiv-Fasern oder bis auf die hypothetischen elektromotorischen Molekeln zurückgehen, jedenfalls müssen wir uns den ganzen Muskel aus unzähligen, sehr kleinen, regelmässig geordneten Theilen zusammengesetzt denken, deren 373
innere elektromotorische Kräfte wir für unseren Zweck durch eine elektromotorische Fläche mit peripolarer Anordnung, positivem Aequator und negativen Polen ersetzen können. Die elektrischen Ströme, welche der ganze Muskel erregt, sind nun aus den Wirkungen dieser elektromotorischen Flächen herzuleiten.

Legen wir zwei gleiche peripolare Elemente mit zweien ihrer Polflächen aneinander, so stossen daselbst zwei gleich starke elektromotorische Flächen, aber in entgegengesetzter Richtung, die negative Seite an die negative, zusammen, und heben deshalb ihre Wirkungen gegenseitig auf. Legen wir zwei solche Elemente mit ihrem Längsschnitt aneinander, so stossen wieder gleich starke Theile der elektromotorischen Oberflächen, und wieder in entgegengesetzter Richtung, dieses Mal aber mit den positiven Seiten zusammen, und heben wiederum ihre Wirkungen gegenseitig auf. Setzen wir also einen ganzen Muskel oder Nerven regelmässig aus solchen Elementen zusammen, indem wir immer Querschnitt an Querschnitt, und Längsschnitt an Längsschnitt fügen, so heben sich im Innern des Ganzen alle elektromotorischen Flächen gegenseitig auf, und es bleiben nur diejenigen bestehen, welche der Aussenfläche des Ganzen angehören. Wir bekommen also dadurch unmittelbar die elektromotorische Oberfläche des Ganzen, welche nach aussen hin alle Kräfte der inneren Theile ersetzt. Sie ist überall, wo nur Querschnitte der Fasern zu Tage liegen (am natürlichen und künstlichen Querschnitte des Ganzen) aus den negativen Polarflächen der Elemente, im natürlichen oder

künstlichen Längsschnitt des Ganzen dagegen aus den positiven Aequatorialflächen der Elemente zusammengesetzt. Deshalb muss, wie der Versuch bestätigt, jede Stelle des Längsschnittes, durch einen angelegten Bogen mit einer des Querschnittes verbunden, im Bogen einen Strom geben, der von jener zu dieser geht.

So ergiebt sich also sehr einfach die Erklärung der Ströme zwischen Längsschnitt und Querschnitt. Anders ist es mit denjenigen, welche du Bois zwischen verschiedenen Punkten des
374 Querschnittes, und ebenso zwischen verschiedenen Punkten des Längsschnittes gefunden hat; sie erklären sich nicht aus den bisher angenommenen theoretischen Grundlagen. Diese Ströme haben dieselbe Richtung wie die bisher besprochenen, d. h. sie sind im ableitenden Bogen von der Mitte des Längsschnittes zu seinem Rande und vom Rande des Querschnittes zu seiner Mitte gerichtet, sind aber sehr viel schwächer als die zwischen Längsschnitt und Querschnitt. Wir wollen für unsere Erörterung annehmen, ein cylindrisches Bündel paralleler Fasern habe durch zwei senkrecht gegen seine Axe geführte Schnitte zwei reine Querschnitte erhalten, in denen nur die negativen Polarflächen der Elemente zu Tage liegen, ebenso wie der Cylindermantel ganz aus den positiven Aequatorialflächen zusammengesetzt ist. Jede Polarfläche eines einzelnen Elementes kann nun zwar Flächenelemente von verschieden intensiver elektromotorischer Kraft darbieten, muss aber in jeder Beziehung jeder anderen gleich sein, so dass die mittlere elektromotorische Kraft des Gesammtquerschnittes an allen Stellen dieselbe sein muss. Ebenso verhält es sich mit dem Längsschnitt des Ganzen. Innerhalb der elementaren Aequatorialflächen können wohl verschiedene Grössen der elektromotorischen Kraft vorkommen, die mittlere Grösse derselben muss aber überall dieselbe sein. Ist nun die Breite der an den Muskel gelegten Endflächen des leitenden Bogens so gross, dass sie eine sehr grosse Menge von elementaren Abtheilungen des Muskels gleichzeitig berühren, und werden sie beide entweder an reinen Querschnitt oder an reinen Längsschnitt angelegt, so kann kein Strom entstehen, weil die mittlere elektromotorische Kraft jeder Berührungsfläche gleich gross ist, und

beide entgegengesetzte Ströme im Bogen hervorzurufen streben, sich also gegenseitig vollständig im Gleichgewicht halten müssen.

Es könnte hierbei zweifelhaft erscheinen, ob es erlaubt sei, die mittlere elektromotorische Kraft für die verschiedenen Grössen dieser Kraft zu substituiren, welche sich in jeder einzelnen Elementarabtheilung der Begrenzungsfläche vorfinden, 375
selbst wenn diese Elementarabtheilungen gegen die Grösse des ganzen Muskels verschwindend klein sind. Deshalb lasse ich noch eine zweite Ableitung desselben Resultates folgen, welche aus dem Theorem von der gleichen gegenseitigen Wirkung elektromotorischer Flächenelemente hergenommen ist, und jenem Einwurfe nicht unterliegt. Man denke sich wiederum die elektromotorische Oberfläche des ganzen Faserbündels construirt. *A* und *B* mögen die Berührungsflächen der Galvanometerleitung mit zwei verschiedenen Stellen des Längsschnittes sein. Wir denken uns diese Flächen so breit, wie sie es in der That bei den Versuchen sind, dass sie unzählbar viele von den Aequatorialfeldern der Elementarabtheilungen des Muskels umfassen. Die Begrenzungsfläche eines jeden Elementes sei in zwei Abtheilungen getheilt, deren eine alle diejenigen Punkte dieser kleinen Fläche in sich begreift, deren elektromotorische Kraft stärker als eine gewisse bestimmte Grösse ist, die andere alle anderen Punkte, in denen das Gegentheil stattfindet. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein willkürlich gewählter Punkt der Fläche *A* in eine der Abtheilungen von stärkerer elektromotorischer Kraft falle, ist dann offenbar überall in der ganzen Fläche *A*, auch an deren Rändern, dieselbe, und genau ebenso gross wie dieselbe Wahrscheinlichkeit in der Fläche *B*. Nehmen wir nun die Wirkungen der elektromotorischen Kräfte des Muskels suspendirt an, und dafür in dem Galvanometerdrahte eine solche Kraft angebracht, welche einen durch den Muskel sich vertheilenden Strom erregt, so folgt aus dem Theorem des Abschnittes IV, dass, wenn hierbei mehr Elektricität durch die Abtheilungen stärkerer Kraft in der Fläche *A*, als durch dieselben der Fläche *B* fliesst, der Muskel im Galvanometer einen Strom von *A* nach *B* geben muss, im umgekehrten Falle umgekehrt. Nun hat aber jeder Stromesfaden, durch welche Stelle der Fläche *A* er auch in den Muskel eintreten, und durch welche von *B* er

auch austreten mag, in der einen die gleiche Wahrscheinlichkeit
376 eine Abtheilung stärkerer Kraft zu treffen, wie in der anderen. Daraus folgt, dass durch die Abtheilungen stärkerer Kraft in A so viel Elektricität fliessen muss, wie in B, und daraus wieder, dass der Muskel im Galvanometerdrahte keinen Strom erregen kann.

Eine Ausnahme würde nur dann eintreten, wenn in einer der Flächen A oder B die Grenze des Längsschnittes läge, weil unmittelbar an dieser auch nur Grenztheile der Elementarfelder, d. h. Abtheilungen geringerer Kraft liegen würden, und daher die Wahrscheinlichkeit, in ein Feld stärkerer Kraft zu fallen, für die Punkte der Grenze gleich Null wird. Unter diesen Umständen muss, gemäss der eben gemachten Auseinandersetzung der Muskel im Galvanometer einen Strom erregen, welcher nach dem die Grösse des Längsschnittes berührenden Ende hingeht, ähnlich als wenn dieses schon den Querschnitt zu berühren anfinge.

Da diese Folgerungen mit den Versuchen an den Muskeln selbst in Widerspruch stehen, so ist daraus zu schliessen, dass noch Einflüsse hier in Betracht kommen, welche bisher nicht beachtet sind. Zwei Fragen, welche sich in dieser Hinsicht zunächst aufdrängen, sind folgende: Erstens ob die oberflächlichen Theile der thierischen Gebilde, welche der Eintrocknung, der Berührung der Luft und fremdartiger Flüssigkeiten ausgesetzt sind, ihre elektromotorischen Kräfte wohl ungeschwächt erhalten. Zweitens beziehen sich alle in dieser Abhandlung aufgestellten Theoreme nur auf solche elektromotorische Kräfte, welche von der Stromstärke unabhängig sind. Es fragt sich, ob dies bei denen der Muskeln der Fall ist. Natürlich können erst für diesen Zweck besonders angestellte Versuche entscheiden, ob eine und welche von diesen Möglichkeiten stattfinde. Ich bemerke noch, dass auch die aus Kupfer und Zink in Schwefelsäure zusammengesetzten schematischen Nachahmungen der Muskeln, welche du Bois-Reymond untersucht hat, ähnliche Abweichungen von der Theorie zeigten, wie die Muskeln. Aber diese haben inconstante elektromotorische Kräfte, und entsprechen deshalb nicht den Voraussetzungen unserer Theoreme.

Andere Abweichungen finden sich bei der Vergleichung 377 der Stromeswirkungen von verschieden langen und dicken Muskeln. Die Kraft der elektromotorischen Oberfläche hängt ihrer Grösse nach nicht ab von der Zahl der vereinigten Elementarabtheilungen; der Theorie nach muss sie deshalb an grossen und kleinen Muskeln immer dieselbe sein. Beim Versuche hat du Bois-Reymond dagegen an längeren und an dickeren Muskeln eine grössere elektromotorische Kraft gefunden, was wahrscheinlich durch dieselben Umstände bedingt sein wird, welche die schwachen Ströme des Längsschnittes für sich, und des Querschnittes für sich hervorbringen.

XXVIII.

Ueber eine allgemeine Transformationsmethode der Probleme über elektrische Vertheilung.

Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg. Bd. II. S. 185—188 vom 8. December 1861 und S. 217 vom 30. Mai 1862.

Bei den Untersuchungen, welche sich auf die Vertheilung der Elektricität, elektrischen Ströme, Wärmeströmung, des
186 Magnetismus u. s. w. in und auf Kugeln beziehen, spielt eine besondere Beziehung je zweier Punkte zur Kugelfläche eine besondere Rolle. Man denke sich den Mittelpunkt einer Kugel vom Radius R im Mittelpunkte der Coordinaten gelegen, x, y, z seien diejenigen für einen beliebigen Punkt des Raumes, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ dessen Entfernung vom Mittelpunkte. Man bestimme einen zweiten Punkt ξ, v, ζ so, dass er mit dem Punkte x, y, z und dem Kugelmittelpunkte in einer geraden Linie liege, und dass sei:

$$\varrho = \sqrt{\xi^2 + v^2 + \zeta^2} = \frac{R^2}{r},$$

also:

$$\left.\xi = x\frac{R^2}{r^2},\ v = y\,\frac{R^2}{r^2},\ \zeta = z\,\frac{R^2}{r^2}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Dann sind bekanntlich die Entfernungen irgend eines beliebigen Punktes auf der Kugelfläche von den beiden Punkten x, y z und ξ, v, ζ im constanten Verhältnisse wie $R:\varrho$ oder wie $r:R$, und wenn im Punkte x, y, z die elektrische Masse M sich befindet, und auf der Kugel eine solche Vertheilung der Elektricität eintritt, dass längs der ganzen Oberfläche ihr Po-

tential gleich dem der Masse M wird, so wirkt die elektrische Vertheilung auf der Kugelschale nach dem inneren und äusseren Raume hin so, als wäre alle Elektricität einmal im Punkte x, y, z, das andere Mal im Punkte ξ, v, ζ concentrirt. Man hat deshalb auch den einen dieser Punkte als das elektrische Abbild des anderen in Bezug auf die Kugelschale bezeichnet.

Diese Beziehung beider Punkte erlaubt aber noch eine weitere Verallgemeinerung. Es sei $F_{x,\, y,\, z}$ eine beliebige Function der Coordinaten x, y, z, man setze in dieser Function statt jedes Punktes sein elektrisches Abbild, sodass man eine neue Function $\Phi_{\xi,\, v,\, \zeta}$ von ξ, v und ζ gewinne, und:

$$F_{x,\, y,\, z} = \Phi_{\xi,\, v,\, \zeta}$$

sei, so oft die Gleichungen (1) erfüllt sind, so zeigt sich, dass:

$$\frac{R^5}{r^5}\left[\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} + \frac{d^2F}{dz^2}\right] = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{R}{\varrho}\,\Phi\right) + \frac{d^2}{dy^2}\left(\frac{R}{\varrho}\,\Phi\right) + \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{R}{\varrho}\,\Phi\right).$$

So weit also die Function F die linke Seite dieser Gleichung gleich Null macht, soweit thut es für die entsprechenden Punkte ξ, v, ζ auch die Function $(R/\varrho)\,\Phi$. Jedem Theile des Raumes aber, wo es durch die Function F nicht geschieht, entspricht ein anderer Theil des Raumes, wo es durch die Function $(R/\varrho)\,\Phi$ nicht geschieht. Ist also F eine Potentialfunction elektrischer Massen, so ist $(R/\varrho)\,\Phi$ eine Potentialfunction anderer elektrischer Massen, welche die Abbilder der vorigen in Bezug auf die Kugel sind.

Die neue Function $(R/\varrho)\,\Phi$ wird discontinuirlich 1) im 187
Punkte $\varrho = 0$, wenn nicht $\Phi_0 = F_\infty = 0$ ist; 2) in allen solchen Punkten, die die Abbilder discontinuirlicher Punkte von F sind. — Ebenso verhält es sich mit den ersten Differentialquotienten, denn es ist:

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2 = \frac{R^4}{\varrho^4}\left[\left(\frac{d\Phi}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{d\zeta}\right)^2\right].$$

Die Function F ist discontinuirlich in Punkten und Linien, welche elektrische Massen enthalten, ihr Differentialquotient ist discontinuirlich in Flächen, welche mit einer Schicht Elektricität bedeckt sind.

Ist also F die Potentialfunction von elektrischen Massen,

die in begrenzten Räumen, in Flächen, Linien, Punkten verbreitet sind, so ist $(R/\varrho)\,\Phi$ die Potentialfunction von elektrischen Massen, welche in den Abbildern dieser Räume, Flächen, Linien, Punkte verbreitet sind, und einer Masse im Punkte $\varrho = 0$.

Ist in einem Theile des Raumes oder auf einer Fläche $F = 0$, so ist in dem entsprechenden Abbilde dieses Raumes oder dieser Fläche $\Phi = 0$. Wenn also die Vertheilung der Elektricität im Gleichgewichte auf einer Fläche gefunden ist, unter dem Einflusse gewisser anderer Massen, so giebt uns unsere Transformation die Lösung eines anderen Problems für das elektrische Gleichgewicht auf dem Abbilde jener Fläche.

Die Vertheilung der Elektricität auf einer gewissen Fläche A kann gefunden werden für alle beliebig vertheilten elektrischen Massen, wenn die Vertheilung gefunden werden kann, welche unter dem Einflusse eines jeden beliebig gelegenen elektrischen Massenpunktes das Potential F längs der Fläche A gleich Null macht. Dann ist $F_\infty = 0$.

Ist diese allgemeine Aufgabe gelöst für die Fläche A, so kann sie vermöge unseres Problems auch für die Abbilder der Fläche A in Bezug auf eine beliebig gelegene Kugel stets gelöst werden.

Ist die allgemeine Aufgabe nur gelöst für einen Punkt, der im inneren Raume der geschlossenen Fläche A liegt, so giebt die Transformation die Lösung für den äusseren Raum des Abbildes, falls der Mittelpunkt der Kugel, auf die sich die Abbildungen beziehen, in das Innere von A verlegt ist, und umgekehrt.

Die allgemeine Aufgabe der Vertheilung ist gelöst:

1) Für unbegrenzte Kugelflächen und Ebenen, diese geben bei der Transformation wieder unbegrenzte Kugelflächen und Ebenen, also nichts Neues.

2) Für Ellipsoide und andere Flächen zweiten Grades. Diese geben bei der Transformation eine besondere Art von Flächen vierten Grades, und zwar drei Systeme von solchen, welche zu einander orthogonal sind, wie die drei Systeme der Flächen zweiten Grades, welche die bekannten elliptischen Coordinaten bilden.

3) Für kreisförmig begrenzte Ebenen und Kugelstücke. 188
Die einen werden durch unsere Transformation in die anderen übergeführt.

4) Dem Vortragenden ist es gelungen, das Problem zu lösen für Kanten, in denen zwei unendliche Ebenen unter beliebigem Winkel zusammenstossen; diese geben bei der Transformation linsenförmige Körper, von zwei sich schneidenden Kugelflächen begrenzt.

5) Das Problem ist gelöst für den inneren Raum rechtwinkeliger Parallelepipeda, regelmässiger Tetraëder und Octaëder; diese verwandeln sich bei der Transformation in Räume, welche von sich schneidenden Kugelflächen begrenzt sind, und an denen es entweder für den inneren oder äusseren Raum gelöst werden kann.

Die wesentlichen Resultate dieses Aufsatzes waren schon 1845 durch Sir W. Thomson gefunden und in zwei Briefen an Herrn Lionville (S. dessen Journal de Mathématiques. 1845 und 1847) veröffentlicht. Ich habe dies bald nach Veröffentlichung des vorhergehenden Aufsatzes gefunden und in der zweiten oben citirten Stelle der Heidelberger Verhandlungen vom 30. Mai 1862 anerkannt.

Zusatz (1881, noch nicht veröffentlicht).

Ich erlaube mir hier noch auf eine andere, sehr fruchtbare und bequeme Transformationsmethode aufmerksam zu machen, die ich in meinen Vorlesungen oft anzuwenden pflege.

Wenn φ eine Function von x, y, z ist, die mit Ausnahme gewisser Punkte oder Linien der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} + k^2\varphi = 0$$

identisch genügt, so wird derselben Differentialgleichung auch der reelle und imaginäre Theil einer anderen Function Ψ genügen, die man aus φ erhält, indem man $(\xi + ai)$ statt x setzt. Dabei ist:

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} = \frac{d^2\Psi}{dx^2}.$$

Man kann also für Ψ die Differentialgleichung auch schreiben:

$$\frac{d^2 \Psi}{d \xi^2} + \frac{d^2 \Psi}{d y^2} + \frac{d^2 \Psi}{d z^2} + k^2 \Psi = 0.$$

Wenn φ in einem Punkte unendlich wird, zum Beispiel in demjenigen, wo $x = y = z = 0$, so wird der Werth von r, der gegeben ist durch die Gleichung:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

nach der Transformation:

$$r^2 = \xi^2 + y^2 + z^2 - a^2 + 2 \xi a i,$$

und setzen wir also:

$$r = \alpha + \beta i,$$

so wird zu setzen sein:

$$\xi^2 + y^2 + z^2 - a^2 = \alpha^2 - \beta^2 \text{ und } a \xi = \alpha \beta,$$

woraus folgt:

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{y^2 + z^2}{a^2 + \alpha^2} = 1, \text{ und } -\frac{\xi^2}{\beta^2} + \frac{y^2 + z^2}{a^2 - \beta^2} = 1.$$

Es hat also α in der Oberfläche eines Systems von abgeplatteten Rotationsellipsoiden von gleichem Brennkreise constante Werthe, und ist gleich der halben kleinen Axe jedes dieser Ellipsoide, während β die imaginäre Axe eines Systems confocaler Rotations-Hyperboloide darstellt, die auch mit jenen Ellipsoiden confocal sind. Der Radius des focalen Kreises ist die Constante a; und die grosse Halb-Axe der Ellipsoide, sowie die reelle der Hyperboloide sind beziehlich:

$$\sqrt{a^2 + \alpha^2} \text{ und } \sqrt{a^2 - \beta^2}.$$

Es sind also α und β die bekannten elliptischen Coordinaten.

Die Bedingung $r = 0$ zerfällt hier in:

$$\alpha = 0 \text{ und } \beta = 0.$$

Beide zusammen sind nur erfüllt in dem Focalkreise. Wenn also φ im Punkte $r = 0$ unendlich wird, wird Ψ in dem Focalkreise unendlich werden. Führen wir im Meridianschnitt Polarcoordinaten σ, ϑ ein, die vom Focalkreise als Anfangspunkte aus gerechnet sind, d. h. setzen wir:

$$x = \sigma \sin \vartheta \text{ und } \varrho = \sqrt{y^2 + z^2} = a + \sigma \cos \vartheta,$$

so werden für sehr kleine Werthe von σ bei Vernachlässigung

der Quadrate dieser Grösse die Gleichungen der Ellipse und Hyperbel ergeben:

$$r = \alpha + \beta i = \sqrt{2\,a\,\sigma}\,.\,e^{+i\vartheta/2}.$$

Wird also φ im Punkte r unendlich wie r^{-n}, so wird Ψ am focalen Kreise unendlich wie $\sigma^{-n/2}$.

Die Function dagegen:

$$\varphi = \log\left(\frac{r+x}{r-x}\right),$$

welche das Potential einer auf der positiven x-Axe in gleichmässiger Dichtigkeit verbreiteten positiven, auf der negativen Axenhälfte negativen Masse darstellt, verwandelt sich in:

$$\Psi = \log\left(\frac{a+\beta}{a-\beta}\right) + 2\,i\,\text{artg.}\left(\frac{a}{\alpha}\right).$$

Der imaginäre Theil dieser Function ist längs der Kreisfläche constant $= \frac{1}{2}\pi$, und in unendlicher Entfernung, wo α sehr klein ist, gleich a/α. Dieser imaginäre Theil stellt also die Potentialfunction einer auf der Kreisscheibe im Gleichgewicht verbreiteten elektrischen Masse a dar.

XXIX.

Ueber die physiologische Wirkung kurz dauernder elektrischer Schläge im Innern von ausgedehnten leitenden Massen.

Aus: Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg. Bd. V. S. 14—17 vom 12. Februar 1869.

---

14 Bei neueren Versuchen über die Fortpflanzung der Reizung in den Nerven, welche im Physiologischen Laboratorium angestellt worden sind, wurde der Vortragende aufmerksam gemacht auf die, übrigens auch schon von den Elektrotherapeuten bemerkte geringe Wirksamkeit, welche elektrische Inductionsschläge auf die tiefer gelegenen Nerven des menschlichen Körpers ausüben, während es andererseits verhältnissmässig leicht ist, selbst tief liegende Nerven durch die constanten Ströme einer Batterie von zehn bis zwanzig Platinzinkelementen zur Erregung von Zuckungen oder selbst von Tetanus zu veranlassen. Die elektromotorische Kraft eines Inductionsapparates, der zwischen den genäherten Enden der inducirten Spirale kleine Funken hervorbringt, ist aber jedenfalls viel grösser, als die einer Batterie der genannten Grösse, welche nie einen sichtbaren Schliessungsfunken giebt. Es gehören im Gegentheil nach den Versuchen von Gassiot gegen vierhundert Platinzinkelemente dazu, um kleine sichtbare Funken beim Schluss der Kette zu geben. Dagegen ist die grosse elektromotorische Kraft eines Inductionsapparates nur während eines ausserordentlich kurzen Bruchtheiles einer Secunde wirksam, während man die der Batterie beliebig lange Zeit hindurch auf die reizbaren Theile wirken lassen kann.

Um zunächst die Thatsache rein fest zu stellen, hat der Vortragende Versuche angestellt am stromprüfenden Froschschenkel, dessen Nerv auf ein feuchtes Fliesspapier gelegt wurde, welches letztere die Oberfläche eines mit Kochsalzlösung von $^1/_2$ Procent gefüllten Gefässes bedeckte, sodass der Nerv dadurch zu einem nur kleinen Theile einer grösseren leitenden Flüssigkeitsmasse gemacht wurde. Die Elektroden für den erregenden Strom waren zwei an Platindrähten angeschmolzene Platinkügelchen von 1 mm Durchmesser, welche, unverrückbar neben einander in 3 mm Abstand befestigt, mit der Oberfläche des genannten feuchten Leiters in Berührung gesetzt wurden, sodass Stromesschlingen bald von grösserer, bald von geringerer Länge durch den bald ferner, bald näher liegenden Nerven geleitet wurden. Die Ströme, welche durch diese Elektroden zugeleitet wurden, waren meistens erzeugt durch die secundäre Spirale eines Inductionsschlitten, und zwar wurden bei einem Theile der Versuche in gewöhnlicher Weise die bei der Oeffnung oder Schliessung der primären Spirale entstehenden inducirten Ströme einfach durch den feuchten Leiter geleitet. Ich will diese als Oeffnungsschläge und Schliessungsschläge bezeichnen. Die letzteren sind bekanntlich von geringerer Intensität und relativ längerer Dauer, sodass sie der Regel nach physiologisch viel weniger wirksam sind, als die viel intensiveren, aber in demselben Verhältniss kürzeren Oeffnungsschläge desselben Apparates, welche bei derselben Stellung des Schlittens durch die Unterbrechung des primären Stromes erzeugt werden. In einem anderen Theile der Versuche brachte ich dagegen eine noch grössere Verkürzung der Dauer dieser Oeffnungsschläge hervor, indem ich ausser dem feuchten Leiter und seinen zuführenden Platinkügelchen, auch noch eine bis drei kleine Leydener Flaschen einfügte, deren jede aus zwei ineinander gestellten und mit Quecksilber gefüllten Reagenzgläschen gebildet war. Das eine Ende der Inductionsspirale war mit der inneren Quecksilbermasse dieser Gläschen, das andere durch den feuchten Leiter hindurch mit der äusseren verbunden. Die Elektricitätsbewegung ist in diesem Falle eine solche, dass, hinreichend schnelle Unterbrechung des Stromes vorausgesetzt, die Leydener Flaschen sich laden, und dann eine

Reihe ausserordentlich kurzer und schneller Oscillationen der Elektricität zwischen ihren Belegungen durch den sie verbindenden Draht der inducirten Spirale eintritt. Diese gehen dann bei der getroffenen Einrichtung durch den feuchten Leiter und erregen den diesem anliegenden Nerven. Ich will diese Art der Strömung als Entladungsschlag bezeichnen.

Der Eisenkern des Inductionsapparates war bei allen zu beschreibenden Versuchen entfernt worden.

A. Der Nerv wurde soweit von den Platinkügelchen entfernt (etwa 4 mm), bis der Entladungsschlag einer der kleinen Leydener Flaschen bei zusammengeschobenen Spiralen des Inductionsapparates gerade noch hinreichte, eine Spur von Zuckung hervorzurufen. Der Oeffnungsinductionsschlag musste dann durch Einlagerung eines Widerstandes von bestimmter Grösse in den primären Stromkreis geschwächt werden, bis er auf den Nerven gleich stark wie der Entladungsschlag der Flasche wirkte.

Nun wurde der Widerstand entfernt und der Nerv dicht an die Elektroden geschoben, der Schlitten des Inductionsapparates von der primären Spirale abgezogen, bis der Entladungsschlag der Flasche nur noch eine Spur von Zuckung gab. Der Oeffnungsschlag, bei Einlagerung desselben Widerstandes in den primären Kreis wie vorher, gab nun keine Wirkung, sondern dieser Widerstand musste soweit verringert werden, dass die Stärke des primären Stromes mehr als doppelt so gross wurde, als sie bei den früheren Oeffnungsschlägen gewesen war.

In einer anderen Versuchsreihe, wo drei Leydener Fläschchen angewendet wurden und deshalb der Nerv weiter bis auf 5 mm entfernt werden konnte, erforderte bei gleicher Wirkung der Entladungsschläge der Oeffnungsschlag eine drei Mal so grosse Intensität des primären Stroms bei berührendem Nerven als bei abstehendem Nerven.

16 B. Noch auffallender war der Unterschied der Wirkungen in der Nähe und in der Ferne, wenn man die Entladungsströme der Leydener Fläschchen mit der des Schliessungsinductionsstromes verglich. Während diese beiden Arten von Strömen bei Berührung des Nerven mit den Elektroden nahehin gleich stark wirken, musste bei der Wirkung in die Ferne

der primäre Strom für den Schliessungsinductionsschlag etwa nur ein Neuntel derjenigen Stärke erhalten, die für die Entladung von drei Leydener Fläschchen nöthig war, wenn beide gleiche Wirkung hervorbringen sollten.

C. Endlich habe ich dann auch noch den Entladungsschlag von einem der Leydener Fläschchen mit den Schliessungs- und Oeffnungsschlägen eines constanten Stromes verglichen, der von der primären Leitung durch Verzweigung abgeleitet wurde. Die inducirte Spirale blieb dabei in unveränderter Stellung, und die Wirkung der Ströme wurde nur durch Veränderung des Widerstandes in der primären Leitung auf das Maass gebracht, dass bei verschiedenen Lagen des Nerven immer die ersten Spuren der Zuckung eintraten. Auch hierbei zeigte sich eine relativ stärkere Fernwirkung der constanten Ströme. Doch reichten die mir zu Gebote stehenden Drahtwiderstände bisher nur für verhältnissmässig kleine Abänderungen des Abstandes zwischen Nerv und Elektroden aus.

Die am Froschnerven in Berührung mit einer grösseren leitenden Flüssigkeitsmasse beobachteten Erscheinungen bestätigen also allerdings die am menschlichen Körper beobachteten Thatsachen. Gleichzeitig stellten aber die von mir in Verbindung mit diesen Versuchen angestellten Untersuchungen über die Vorgänge bei kurz dauernden elektrischen Entladungen, worüber ich mir späteren Bericht vorbehalte, verschiedene Möglichkeiten der Erklärung dieser Erscheinungen heraus, zwischen denen erst nach weiteren experimentellen Untersuchungen über die Dauer des Funken, und die Dauer der elektrischen Oscillationen in der angewendeten Spirale bei ihrer Verbindung mit den Leydener Fläschchen, entschieden werden kann.

Bei den Versuchen mit Schliessungsinductionsschlägen hängen die Erfolge wahrscheinlich hauptsächlich davon ab, dass durch die Rückwirkung des inducirten Stromes auf den inducirenden die steile Ansteigung und damit die physiologische Wirkung des ersteren desto mehr begünstigt wird, je näher die Spiralen einander stehen, was eben bei weiter entferntem Nerven der Fall war. Wenn die Dauer der elektrischen Oscillationen bei den Entladungsschlägen der Leydener Fläschchen klein ist im Vergleich mit der Dauer des Oeffnungsfunkens, was nur

durch weitere Versuche zu ermitteln ist, kann etwas Aehnliches auch bei der Vergleichung dieser Entladungsschläge eintreten.

Andererseits ergiebt die Theorie, dass schnell oscillirende elektrische Entladungen, welche sich von zwei Einströmungspunkten aus in einem Leiter verbreiten, ausser der
17 Schwächung, welche auch constante Ströme bei ihrer Ausbreitung zeigen, durch elektrodynamische Induction eine stärkere Schwächung erleiden, welche einen Factor e^{-kr} in den Ausdruck für ihre Intensität einführt. Hierin ist unter r die Entfernung von dem Elektrodenpaar, unter k eine positive Constante verstanden, deren Grösse von der Leitungsfähigkeit des Medium abhängt. Bei hinreichender Schnelligkeit der Oscillationen der von uns gebrauchten Entladungsschläge würde dieser Umstand ebenfalls die beobachteten Resultate hervorbringen können.

XXX.

Ueber elektrische Oscillationen.

Aus: Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg. Bd. V. S. 27—31 vom 30. April 1869.

Die Erklärung der unter dem 12. Februar d. J. der Ge- 27
sellschaft mitgetheilten Versuche über die Ausbreitung elektrischer Entladungen in ausgedehnten leitenden Massen erforderte eine Kenntniss der Oscillationsdauer der Ströme in den angewendeten Apparaten, namentlich in einer Inductionsspirale von der angewendeten Grösse, die an ihren Enden mit den Belegen einer Leydener Flasche verbunden ist. Der Vortragende hat solche Versuche nach einer neuen Methode gemacht, welche vor allen ihm bekannten bisher gebrauchten Methoden den Vorzug hat, dass die elektrischen Oscillationen zwischen den Belegen der Leydener Flasche in einem vollständigen, nirgends unterbrochenen Bogen vor sich gehen können, der keine Funkenstrecke enthält, und in welchem deshalb diese Oscillationen bis auf ihre letzten schwächsten Reste ungestört ablaufen können. Als Reagenz zur Wahrnehmung der elektrischen Bewegungen wandte er einen stromprüfenden Froschnerven an, der in einem solchen Falle bisher noch allen bekannten physikalischen Mitteln an Empfindlichkeit überlegen ist.

Zur Zeitmessung wurde ein schweres festes Secundenpendel angewendet, was einem nach A. Fick's Vorschlage construirtem Pendelmyographion angehörte. Dasselbe fiel immer von gleicher Höhe und stiess mit einem unten hervorragenden Vorsprunge im Verlauf seiner Schwingung kurz nach ein-

ander gegen zwei Hebelchen, wodurch zwei Stromleitungen geöffnet wurden.

Die erste dieser Stromleitungen war die des primären Stromes eines Du Bois'schen Schlittenapparates. Die Enden der inducirten Spirale dieses Apparates waren mit den Belegungen einer oder mehrerer Leydener Flaschen metallisch verbunden. Die Unterbrechung des primären Stromes inducirte also zunächst in der secundären Spirale einen gleichgerichteten Strom, der die Belege der Batterie lud, darauf entlud sich die Batterie wieder in oscillirender Weise durch dieselbe Spirale, durch die sie geladen war. Die eisernen Drähte aus dem Innern der primären Spirale waren in allen Fällen entfernt, um durch die Einwirkung, die sie von der secundären Spirale
28 empfangen und wieder rückwirkend auf sie ausüben konnten, den Vorgang nicht zu compliciren. Ausserdem würden die Oscillationen durch die Anwesenheit der Eisendrähte beträchtlich verzögert worden sein.

Die gute metallische Leitung des inducirten Stromes wurde an einer Stelle unterbrochen, sobald das Pendel des Myographion gegen den zweiten Hebel stiess; dann trat eine Nebenleitung in Function, welche den Nerven des stromprüfenden Schenkels enthielt. Letzteren hatte ich übrigens ganz und gar in eine Kochsalzlösung von $^1/_2$ Procent eingelegt, wo sich seine Reizbarkeit 3 bis 4 Stunden lang vortrefflich erhielt. Der Nerv war zum Theil in ein enges Glasröhrchen hineingezogen, welches auch in die Flüssigkeit tauchte, und in welches ein feiner Platindraht als Elektrode hineinragte. Die andere Elektrode war eine Platinplatte in der grösseren Flüssigkeitsmasse. So lange die metallische Nebenschliessung zum Nerven nicht geöffnet war, ging kein merklicher Theil des Stromes durch den Nerven. Sobald jene geöffnet war, entlud sich der Rest des Stromes durch den Nerven, und erregte Zuckungen, wenn er dazu kräftig genug war.

Die Wirkung des Stromes ist hierbei am stärksten, wenn die Unterbrechung der Leitung zu einer Zeit geschieht, wo die Geschwindigkeit der Strömung in der Spirale ein Maximum erreicht hat, zu welcher Zeit die Belege der Batterie nur schwach oder gar nicht geladen sind. Dann stürzt nämlich ganz plötzlich der Extracurrent der Spirale in den Nerven,

und zwar mit einer Intensität, welche wegen des sehr kleinen elektrodynamischen Potentials der Nervenleitung der in der Spirale zur Zeit der Unterbrechung bestehenden Stromintensität fast gleich sein muss. Dieser Strom wird nachher allerdings wegen des grossen Widerstandes des Nerven sehr schnell an Stärke abnehmen und entweder geradezu, oder nach wenigen schnell abnehmenden Oscillationen verschwinden. Aber die physiologische Wirkung seines plötzlichen Hereinbrechens in den Nerven kann dennoch eine sehr kräftige sein.

Wird dagegen die metallische Leitung unterbrochen zu einer Zeit, wo die Belege der Batterie das Maximum ihrer Ladung erreicht haben, und der die Elektricität ihnen zuführende Strom in der Spirale eben aufhört und in die entgegengesetzte Richtung überzugehen beginnt: so müssen sich nach der Unterbrechung die in der Batterie aufgesammelten Elektricitäten durch den Nerven, also durch einen Bogen von viel grösserem Widerstande, entladen, wodurch die lebendige Kraft der nun noch stattfindenden Oscillationen schnell vernichtet wird. Die Ansteigung des Stromes zum Maximum geschieht dann erst allmählig ansteigend im Laufe einer Viertel-Oscillation, und während dieser Zeit kann die Intensität der schnell erlöschenden Oscillationen schon sehr merklich vermindert sein, so dass die physiologische Wirkung in diesem Falle sowohl wegen der verminderten Ansteigungsgeschwindigkeit, als auch
wegen der geringeren Höhe des zu erreichenden Maximums 29
schwächer ist als im ersten Falle.

Die Intensität der physiologischen Wirkung liess sich nun dadurch vergleichen, dass ich bei verschiedenen Werthen der Zeitdauer zwischen den beiden durch das Pendel ausgeführten Stromunterbrechungen jedesmal diejenige Stellung der verschiebbaren inducirten Spirale suchte, wo sie noch eben sichtbare Muskelzuckung gab. Wenn das Pendel zur Zeit eines Stromesmaximums in der Spirale die Nebenleitung zum Nerven unterbrach, konnte ich die inducirte Spirale weit von der inducirenden entfernen; wenn es zur Zeit eines Stromesminimums unterbrach, musste ich die Spiralen einander mehr nähern, oder erhielt auch von den späteren Minimis gar keine Wirkungen mehr.

Die Unterbrechungszeit konnte durch eine feine Schraube regulirt werden, welche die Stellung des zweiten Hebelchen änderte, und deren Kopf ich mit einer groben Kreistheilung versehen hatte. Um die den Schraubenumgängen entsprechenden Zeitwerthe zu berechnen, mass ich den Weg, den das Pendel zwischen den beiden Unterbrechungen zurücklegte, mit einem an diesem selbst befestigten feinen Maassstabe und berechnete die Zeit aus der Schwingungsdauer und Schwingungsamplitude des Pendels.

Der Apparat war extemporirt, und wird sich in vieler Beziehung zweckmässiger und feiner einrichten lassen, aber es liessen sich schon so eine ganze Reihe von Resultaten erreichen.

Zunächst ist zu bemerken, dass bei Anwendung von einem Grove'schen Elemente für den primären Strom, die Gesammtdauer der wahrnehmbaren elektrischen Oscillationen in der mit einer Leydener Flasche verbundenen Spirale etwa $^1/_{50}$ Secunde betrug. Diese Gesammtdauer ist der Theorie nach unabhängig von der Capacität der mit der Spirale verbundenen Batterie.

Bezeichnen wir nämlich das elektrodynamische Potential der inducirenden Spirale auf die inducirte bei Einheit der Stromesstärke in beiden mit P, das der inducirten auf sich selbst mit p, die Capacität der Batterie mit c, den Widerstand und die Stromesstärke der inducirten Spirale mit w und i, die Stromesstärke, welche in der inducirenden vorhanden war, mit J, die in der inneren Belegung der Batterie aufgehäufte Elektricitätsmenge mit q, die Zeit mit t, die Oscillationsdauer mit T, und setzen wir $t = o$ für den Moment der Unterbrechung des primären Stromes, so ist nach Kirchhoff's und W. Thomson's Theorie:

$$q = J \frac{P}{\beta p} e^{-\alpha t} \sin(\beta t)$$

$$i = \frac{JP}{p} \left\{ \cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right\}$$

30 worin:

$$\alpha = \frac{w}{2p}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{1}{pc} - \alpha^2}.$$

Die Anzahl der Oscillationen für die Secunde ergab sich zum Beispiel bei der Verbindung der Spirale mit einer Leydener Flasche gewöhnlicher Form zu 2164; von solchen konnten hinter einander an meinem Apparate 45 Maxima beobachtet werden. Die drei kleinen aus mit Quecksilber gefüllten Reagenzgläschen gebildeten Leydener Flaschen, welche ich in meiner früheren Mittheilung erwähnt habe, hatten wegen ihres viel dünneren Glases zusammen genommen noch etwas grössere Capacität als jene Flasche und gaben 2050 Schwingungen für die Secunde. Die drei kleinen und die grössere Flasche zusammen genommen gaben 1550 Schwingungen. Letzterer Werth hätte der Berechnung nach nur 1484 betragen sollen, wenn als Capacität des Apparates nur die der Leydener Flaschen in Betracht gezogen wurde. Die Differenz erklärt sich daraus, dass bei diesen Versuchen auch die Spirale selbst in einem gewissen Grade die Rolle einer kleinen Leydener Flasche spielt. Das mit der zur Zeit positiv geladenen Belegung der Batterie zusammenhängende Ende der Drahtmasse ladet sich selbst positiv, das andere negativ, und da jede so geladene Drahtwindung mit anderen, welche einer entfernteren Stelle des Drahtes angehören und geringeres elektrostatisches Potential haben, in naher Berührung ist, und jene von diesen letzteren nur durch die dünne isolirende Schicht der umspinnenden Seide getrennt ist, so wird dadurch eine Anhäufung entgegengesetzter Elektricitäten an beiden Seiten dieses Ueberzuges bedingt. Dabei wird die äusserste Lage von Drahtwindungen nur Elektricität der einen Art, die innerste nur solche der anderen Art anhäufen. In den inneren Drahtschichten tritt nur Vertheilung der entgegengesetzten Elektricitäten nach der äusseren und inneren Seite des Drahtes ein.

Diese Ueberlegung führte mich dazu zu untersuchen, ob Oscillationen nachweisbar seien, auch wenn die Spirale gar nicht mit einer Leydener Flasche verknüpft ist, wie dies bei den unipolaren Zuckungen vorkommt. Dies gelang in der That.

Zu dem Ende wurde das eine Ende der Spirale ganz isolirt, das andere mit den Gasröhren des Hauses verknüpft. Die zweite Unterbrechungsstelle mit dem Nerven als Neben-

schliessung wurde zwischen die Spirale und die Gasröhren eingeschaltet. Die Oscillationen waren in diesem Falle sehr schnell, etwa 7300 in der Secunde, und ihre physiologische Wirkung schwach, sodass überhaupt nur die ersten Maxima eine solche ausübten. Ich konnte in diesem Falle nur die neun ersten Strömungsmaxima beobachten. Der Theorie nach
31 sollte die Abnahme der Oscillationen in diesem Falle nicht
schneller geschehen, als in den früher beobachteten; doch lässt die Theorie erkennen, dass ein etwaiger Mangel an Isolation der Drahtwindungen hier viel grösseren Einfluss haben musste als bei langsameren Oscillationen. Andererseits kann hier aber auch in Betracht kommen, dass vielleicht der Nerv durch so schnelle Schwankungen nicht mehr kräftig genug afficirt wird.

Hier wie in den früheren Versuchen mit langsameren Oscillationen unterscheiden sich die im Nerven aufsteigend fliessenden Strommaxima von den abwärts fliessenden durch grössere physiologische Wirkung, sodass man auch die abwechselnde Strömungsrichtung dieser Maxima erkennen kann.

Dadurch ist constatirt, dass selbst eine leere, am einen Ende isolirte, am anderen Ende mit dem Erdboden verbundene Spirale sich abwechselnd positiv und negativ ladet, und die entgegengesetzte Elektricität in den Erdboden austreibt, bis sie nach einer Reihe von Schwankungen zur Ruhe kommt.

Die Theorie lässt ferner hieraus die Folgerung ziehen, dass solche Schwankungen, nur etwas schneller abnehmend, in einer inducirten Spirale beim Oeffnungsschlage auch dann stattfinden, wenn ihre Enden durch einen schlecht leitenden Körper, z. B. einen Nerven, verbunden sind, sodass auch die elektrische Bewegung im Nerven aus Oscillationen von schnell abnehmender Stärke und nahehin derselben Schwingungsdauer besteht, welche die Spirale bei vollkommener Isolation eines ihrer Enden giebt.

XXXI.

Ueber die Gesetze der inconstanten elektrischen Ströme in körperlich ausgedehnten Leitern.

Aus: Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg. Bd. V. S. 84—89. 21. Januar 1870. (Vorläufige Anzeige des folgenden Aufsatzes.)

Wenn leitende Körper von elektrischen Strömen von ver- 84
änderlicher Intensität durchströmt werden, ist die elektromotorische Kraft im Innern derselben nicht blos abhängig von den elektrostatischen Kräften der freien Elektricität, die auf der Oberfläche oder auch vielleicht im Innern der Leiter verbreitet ist, sondern sie hängt auch von Inductionswirkungen ab, welche die elektrischen Ströme bei der Veränderung ihrer Intensität gegenseitig auf einander ausüben. In den meisten Fällen, so oft nämlich die Dichtigkeit der freien Elektricität an der Oberfläche oder im Innern der Leiter sich verändert, haben wir es nicht durchaus mit geschlossenen Strömen zu thun, für welche allein die Gesetze der Induction vollständig und genau bekannt sind, sondern die vorkommenden Ströme sind der Regel nach zum Theil, oder auch wohl alle, ungeschlossene.

Das mathematische Gesetz der elektrischen Induction ist in verschiedenen Formen gegeben worden; die erste derselben von Herrn F. E. Neumann (dem Vater)[1], eine zweite von Herrn W. Weber[2], mit welcher auch die Consequenzen der von Herrn C. Neumann (dem Sohne) aufgestellten Hypothese

---

1) Denkschriften der Berliner Akademie für 1845 und 9. Aug. 1847.

2) Elektrodynamische Maassbestimmungen. Leipzig 1846.

wenigstens für schwächere Ströme zusammenstimmen, eine dritte ist in den Arbeiten über Elektrodynamik von Herrn A. Maxwell[1]) enthalten.

Alle diese Formen geben für alle Fälle, wo der inducirende Strom geschlossen ist, vollkommen übereinstimmende
85 Resultate, aber sie differiren, wenn sie auf ungeschlossene Ströme angewendet werden. Die bisher bekannten Thatsachen erlaubten nicht eine sichere Entscheidung zwischen diesen verschiedenen Formen des Inductionsgesetzes zu treffen.

Es wird nur als natürlich angesehen werden dürfen, wenn zunächst die geistreiche Hypothese von Herrn W. Weber, welche den Vortheil hatte, alle bis dahin bekannten elektrischen Phänomene unter einem verhältnissmässig einfachen Gesichtspunkte zu vereinigen, als Ausgangspunkt weiterer Untersuchungen bevorzugt wurde. Die Bewegungsgesetze der inconstanten elektrischen Ströme in körperlichen Leitern wurden aus der Weber'schen Hypothese von Herrn Kirchhoff[2]) abgeleitet, und auf die Ströme in dünnen Drähten angewendet; ein Fall der Anwendung, bei welchem übrigens, wie ich hier gleich bemerken will, die Unterschiede der verschiedenen Theorien verschwinden, wenigstens wenn man gewisse factisch unendlich klein bleibende Grössen auch in der Theorie als unendlich klein voraussetzt. Dieselben Bewegungsgleichungen sind dann von Herrn Jochmann[3]) auf die Ströme in Leitern, die unter dem Einflusse eines Magneten rotiren, angewendet worden; endlich von Herrn Lorberg[4]) auf Bewegungen der Elektricität in einer Kugel, wie sie unter dem Einflusse periodisch wechselnder inducirender äusserer Kräfte zu Stande kommen müssen. In den Untersuchungen von Herrn Jochmann verschwindet ebenfalls das, was dem Weber'schen Gesetze eigenthümlich ist, weil er es wesentlich auch nur mit geschlossenen Strömen zu thun hatte. Die Untersuchungen von Herr Lorberg zeigen, dass in der Kugel unter dem Einflusse beliebiger

1) London Philosophical Transactions 1865. P. I. p. 459.
2) Pogg. Annalen. CII. S. 529.
3) Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. LXIII.
4) Ebenda. Bd. LXXI. S. 53.

periodischer Kräfte Integrale der Bewegungsgleichungen hergestellt werden können, welche stets endlich bleibenden Bewegungen entsprechen, aber es kann in diesem Falle nicht unterschieden werden, ob diese Bewegungen durch die betreffenden äusseren Kräfte hervorgerufen werden können, oder nur durch sie in ihrem Ablauf verändert sind, eine Unterscheidung, die in diesem Falle wesentliche Bedeutung hat.

Ich wurde zu den Untersuchungen, deren Resultate ich hier mittheilen will, geführt durch die Frage, wie elektrische Ströme im Innern von leitenden Körpern anheben zu fliessen, da ihre physiologische Wirkung wesentlich auf der Plötzlichkeit ihres Eintrittes beruht. Dabei zeigte sich, dass die auf das Weber'sche Gesetz gegründeten Bewegungsgleichungen der Elektricität einer Revision bedürfen.

Es lassen sich alle bisher aufgeführten Formen des Inductionsgesetzes auf eine gemeinsame Form zurückführen, in
welcher sie nur durch die verschiedenen Werthe einer darin 86
enthaltenen Constanten verschieden sind.

Nennen wir i die Intensität in einem Stromelement $D\varsigma$, und j in einem anderen $D\sigma$, positiv gerechnet, wenn die positive Elektricität in Richtung der wachsenden ς oder σ strömt, r die Entfernung zwischen $D\varsigma$ und $D\sigma$, ferner $(D\varsigma, D\sigma)$ den Winkel zwischen den Richtungen von $D\varsigma$ und $D\sigma$, $(r, D\varsigma)$ und $(r, D\sigma)$ die Winkel, welche die Richtung von r mit $D\varsigma$ und $D\sigma$ macht, so ist der allgemeinste Ausdruck p für das elektrodynamische Potential der Stromelemente $D\varsigma$ und $D\sigma$ auf einander, wenn wir nur die Voraussetzung festhalten, dass die Wirkungen ungeschlossener Ströme nicht von einer anderen Function der Entfernung abhängen, als die geschlossener, folgender:

$$p = -\tfrac{1}{2}\frac{ij}{r}\left\{(1+k)\cos(D\varsigma, D\sigma) + (1-k)\cos(r, D\varsigma)\cos(r, D\sigma).\right\}$$

Darin ist k eine Constante von unbekanntem Werthe. Der mit k multiplicirte Theil dieses Ausdruckes ist gleich:

$$-\tfrac{1}{2}\, i \,.\, j \,.\, \frac{d^2 r}{d\varsigma \,.\, d\sigma}$$

und verschwindet also, so oft ς oder σ eine geschlossene Strombahn ist, und wir über die geschlossene Bahn integriren. Es hat also der Werth von k keinen Einfluss auf alle diejenigen elektrischen Bewegungen, bei denen alle Ströme geschlossen sind.

Die Werthe von k sind:

bei F. E. Neumann $k = 1$
bei Cl. Maxwell $k = 0$
bei W. Weber $k = -1$.

Aus diesem Werthe von p habe ich also, wie Herr Kirchhoff aus dem Weber'schen Gesetze, die Bewegungsgleichungen der Elektricität in einem körperlich ausgedehnten Leiter entwickelt.

Diese Gleichungen lassen sich auf folgende Form bringen: Es seien U, V, W die Werthe des elektrodynamischen Potentials für die Einheit des Stromes, die an einem gegebenen Orte. beziehlich den x, y oder z parallel fliesst, Φ die elektrostatische Potentialfunction ebendaselbst, t die Zeit. Die Bewegung der Elektricität soll im Innern eines Leiters S bestimmt werden. dessen specifischer Widerstand $\varkappa$ sei; den äusseren Raum bezeichnen wir mit S^1, die Grenzfläche zwischen S und S^1 mit Ω, und die nach aussen gerichtete Normale derselben mit N.

Die Werthe der Functionen U etc. in S^1 bezeichnen wir mit U^1 etc. Wir setzen ferner voraus, dass die etwa vorhandenen Stromcomponenten, welche Bewegungen elektrischer Massen im äusseren Raume entsprechen, u^1, v^1, w^1 gegeben seien. Dann sind die Bedingungen des Problems folgende:

A) Im Innern von S und S^1:

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dx} + \frac{dW}{dz} = -k\frac{d\Phi}{dt}.$$

87 B) Im Innern von S:

$$\Delta U - (1-k)\frac{d^2\Phi}{dx.dt} = \frac{4\pi}{\varkappa}\left[\frac{d\Phi}{dx} + A^2.\frac{dU}{dt}\right]$$

$$\Delta V - (1-k)\frac{d^2\Phi}{dy.dt} = \frac{4\pi}{\varkappa}\left[\frac{d\Phi}{dy} + A^2.\frac{dV}{dt}\right]$$

$$\Delta W - (1-k)\frac{d^2\Phi}{dz.dt} = \frac{4\pi}{\varkappa}\left[\frac{d\Phi}{dz} + A^2.\frac{dW}{dt}\right].$$

C) Im Innern von S^1:

$$\Delta U^1 - (1 - k)\frac{d^2\Phi^1}{dx\,.\,dt} = -4\pi u^1$$
$$\Delta V^1 - (1 - k)\frac{d^2\Phi^1}{dy\,.\,dt} = -4\pi v^1$$
$$\Delta W^1 - (1 - k)\frac{d^2\Phi^1}{dz\,.\,dt} = -4\pi w^1.$$

In B und C ist mit dem Zeichen ΔU u. s. w. gemeint die Operation:

$$\Delta U = \frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2}.$$

D) Grenzbedingungen an der Fläche Ω:

$$U - U^1 = V - V^1 = W - W^1 = 0$$
$$\frac{dU}{dN} - \frac{dU^1}{dN} = \frac{dV}{dN} - \frac{dV^1}{dN} = \frac{dW}{dN} - \frac{dW^1}{dN} = 0.$$

E) Grenzbedingungen für unendliche Entfernung:

$$U^1 = V^1 = W' = \Phi^1 = 0.$$ [1])

Die Geschwindigkeiten u, v, w der strömenden Elektricität im Innern von S werden durch Gleichungen, die ganz von der Form wie C sind, erhalten.

Hier ist eine Analogie hervorzuheben. Die Form der Gleichungen A und B für das Innere von S ist nämlich gleich den Gleichungen für die Bewegungen eines der Reibung unterworfenen Gases, dessen Geschwindigkeiten und Dichtigkeitsänderungen so klein sind, dass man die davon abhängenden Glieder zweiter Dimension vernachlässigen kann. Es vertreten dann in unseren Gleichungen die Componenten des elektrodynamischen Potentials U, V, W die Geschwindigkeitscomponenten des Gases, $k\Phi$ die Vergrösserung der Dichtigkeit des

1) In Hrn. Prof. Kirchhoff's Gleichungen werden meine übergeführt, wenn man setzt $k = -1$ und:

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\Omega, \qquad \varkappa = \frac{1}{4k}, \qquad A^2 = \frac{2}{c^2}.$$

88 Gases, Φ/A^2 die Vergrösserung des durch die Dichtigkeit dividirten Druckes. Es ist ferner $\varkappa/4\pi A^2$ die Constante für diejenige Reibung, die durch Verschiebung der Schichten entsteht, $\varkappa(1-k)/4\pi A^2$ die Constante der Reibung, welche durch Dichtigkeitsänderungen hervorgerufen wird. Diese Vergleichung ist aber direct anwendbar nur so lange, als k und $1-k$ positive Werthe haben. Wenn k negativ wäre, würde ein solches Gas bei Verdichtung kleineren, bei Verdünnung grösseren Druck ausüben müssen, und deshalb labiles Gleichgewicht haben.

Art des Gleichgewichts der Elektricität. Der Gesammtbetrag P derjenigen Arbeit, welche durch Aenderung der elektrischen Strömung und Vertheilung in S verändert werden kann, lässt sich auf die Form bringen:

$$P = \frac{1}{2}\int\left\{\frac{A^2}{4\pi}\Sigma\left[\left(\frac{dU_p}{dx_q}-\frac{dU_q}{dx_p}\right)^2\right]+\frac{1}{4\pi}\Sigma\left[\left(\frac{d\Phi}{dx_p}\right)^2\right]\right.$$
$$\left.+\frac{kA^2}{4\pi}\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2\right\}(dS+dS^1).$$

Darin sollen U_p und U_q irgend eine der Grössen U, V, W, und x_p wie x_q die entsprechenden Coordinaten x, y oder z bedeuten. Wenn $k=o$ oder positiv ist, so ist P die Summe von lauter positiven Quadraten, und also nothwendig positiv. Wenn k negativ ist, kann P aber auch negativ werden, z. B. in dem sehr allgemeinen Falle, wo $\Phi = o$ und U, V, W Differentialquotienten einer und derselben Function der Coordinaten nach x, y, z sind.

Aus den gegebenen Gleichungen folgt ferner, dass der Differentialquotient dP/dt nothwendig negativ ist, wenn keine äusseren Kräfte einwirken. Nämlich es ist:

$$\frac{dP}{dt} = -k\int(u^2+v^2+w^2)\,dS.$$

Daraus folgt, dass wenn P bei negativem Werthe von k einmal negativ werden kann, es zu immer grösseren und grösseren negativen Werthen fortschreiten muss, wenn die Bewegung ohne Wirkung äusserer Kräfte vor sich geht. Auch lässt sich zeigen, dass dP/dt unter diesen Umständen nicht

unter einen gewissen endlichen Werth herabgehen kann, dass also P schliesslich negativ unendlich werden muss.

Das zeigt an, dass wenn k negativ ist, die oben aufgestellten Bewegungsgleichungen der Elektricität für diese ein labiles Gleichgewicht ergeben[1]); dagegen ist das Gleichgewicht stabil, wenn k positiv oder Null ist.

Ueber die Frage, ob die zu unendlich zunehmender Störung 89
des Gleichgewichts fortschreitenden Bewegungen durch äussere inducirende Kräfte hervorgerufen werden können, habe ich erst in einem Falle[2]) entscheiden können, nämlich wenn in einer unendlich ausgedehnten ebenen leitenden Platte durch Annäherung oder Entfernung ihr paralleler unendlich ausgedehnter Elektricitätsschichten elektrische Bewegungen hervorgerufen werden. Es lässt sich zeigen, dass im Allgemeinen solche Bewegungen entstehen, so oft einer der Differentialquotienten der Geschwindigkeit der inducirenden Platten, nach der Zeit genommen, discontinuirlich wird.

Ich folgere hieraus, dass die für die Elektricitätsbewegung aufgestellten Gleichungen mit der Annahme eines negativen Werthes von k nicht zulässig sind, während sie bei Annahme des Werthes Null (Maxwell) oder positiven Werthes (Neumann sen.) vollkommen entsprechende Resultate liefern.

Die auch von Herrn Lorberg acceptirte Modification der Weber'schen Annahme, wonach die Elektricität Masse und Beharrungsvermögen haben soll, ändert an diesen Resultaten nichts Wesentliches.

Fortpflanzungsweise elektrischer Bewegungen in Leitern. Die Fortpflanzung geschieht, theils in Querschwingungen, die, wie schon Herr Prof. Kirchhoff nachgewiesen hat, sich nach Art der geleiteten Wärme verbreiten, wobei

---

1) Dass bei gewissen Bewegungen im Innern einer leitenden Kugel sich das Gleichgewicht der Elektricität nach dem Weber'schen Gesetze als labil erweist, hatte vor mir schon Hr. Prof. Kirchhoff bemerkt, wie ich aus mündlichen Mittheilungen von ihm weiss.

2) Nachträglicher Zusatz. Es ist mir seitdem der Beweis auch für die Bewegungen in einer leitenden Kugel gelungen, in der die Elektricität durch Annäherung und Entfernung eines elektrischen Körpers in Bewegung gesetzt ist.

der Werth der Constante k ohne Einfluss ist. Zum Theil geschieht sie in Längsschwingungen, die einer, nach der Schwingungsdauer und dem Widerstande des Leiters verschiedenen Dämpfung unterworfen sind. Bei grosser Schwingungsdauer oder sehr guter Leitung, wenn die Dämpfung unmerklich wird, ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich $1/A\sqrt{k}$. Bei Maxwell's Annahme wird sie unendlich gross, und die Untersuchung zeigt, dass hierbei dann gar keine freie Elektricität in das Innere des Leiters eintreten kann, wenn sie nicht von Anfang an da war. Nach F. E. Neumann's Annahme, $k = 1$, wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich $1/A$, welche Grösse nach Weber's Messungen der Geschwindigkeit des Lichtes gleich zu sein scheint.

XXXII.

Ueber die Theorie der Elektrodynamik.

Erste Abhandlung.

Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper.

Aus: Borchardt's Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. LXXII. S. 57–129.

Bei Gelegenheit gewisser Versuche wurde ich veranlasst, 57 die Frage zu discutiren, in welcher Weise elektrische Ströme im Inneren eines körperlich ausgedehnten Leiters zu fliessen beginnen. Ich suchte Aufschluss darüber aus der Theorie zu gewinnen. Die Bewegungsgleichungen der elektrischen Ströme von veränderlicher Intensität für Leiter von drei Dimensionen, welche sich aus Herrn W. Weber's sinnreicher Hypothese über das Wesen der elektrischen Fernwirkungen ergeben, sind von Herrn G. Kirchhoff[1]) entwickelt, und theils von ihm, theils von anderen Mathematikern mit Erfolg zur Erklärung einiger Beobachtungsthatsachen benutzt worden. Bei meinem Versuche, sie auf eine neue Aufgabe anzuwenden, ergaben sich physikalisch unzulässige Folgerungen, und die nähere Untersuchung überzeugte mich bald, dass der Grund davon in den Principien der Theorie stecke, dass nämlich nach den Folgerungen aus der Weber'schen Theorie das Gleichgewicht der ruhenden Elektricität in einem leitenden Körper labil sei, und

1) Pogg. Annalen CII. S. 529.

dass deshalb die darauf gegründete Theorie die Möglichkeit von elektrischen Strömungen anzeige, die zu immer grösser werdenden Werthen der Strömungsintensität und der elektrischen Dichtigkeit fortschritten.

Als ich dagegen versuchte, neue Bewegungsgleichungen zu bilden, bei denen ich statt des Weber'schen Gesetzes für die Induction zweier Stromelemente auf einander das von Herrn F. E. Neumann[1]) (dem Vater) formulirte Gesetz zu Grunde legte, erhielt ich brauchbare Gleichungen, die für die ruhende Elektricität stabiles Gleichgewicht ergaben.

Bei diesem Widerstreite der Theorien schien es mir rathsam, möglichst wenig den Boden der Thatsachen zu verlassen
58 und in der Theorie unbestimmt zu lassen, was bisher nicht als durch Versuche entschieden angesehen werden konnte. Die Art, wie ich in diese Frage hineingezogen war, liess schon erkennen, dass die Untersuchung selbst eine gewisse Einengung in der Breite der zulässigen Annahmen herbeiführen würde; denn nur diejenigen Annahmen konnten beibehalten werden, die für die ruhende Elektricität stabiles Gleichgewicht ergeben. Zweitens schien zu hoffen, dass eine solche Theorie erkennen lassen würde, bei welchen Classen von elektrischen Versuchen wir erwarten dürften Erscheinungen zu beobachten, welche auf das wahre Gesetz der Fernwirkung zweier Stromelemente gegen einander einen Rückschluss erlauben würden, und umgekehrt, bei welchen anderen Classen von Versuchen die bestehende Lücke unserer Kenntnisse keinen wesentlichen Einfluss auf ihre theoretische Erklärung und Ableitung habe. Diese Aussicht ist auch in einem gewissen Sinne erfüllt worden, indem sich zeigt, dass die mit den uns gegenwärtig zu Gebote stehenden Beobachtungsmitteln wahrzunehmenden Erscheinungen von jener Lücke in unseren Kenntnissen wahrscheinlich nirgends Kunde geben, und daher auch zunächst nichts zu deren Ausfüllung beitragen werden.

1) Die mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Ströme. Schriften der Berliner Akademie der Wissensch. von 1845. — Besonders abgedruckt. Berlin, Reimer 1846. — Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme. Berlin, Reimer 1848. (Vorgelegt der Berliner Akademie 9. August 1847.)

Die wesentlichste Lücke der Theorie in dem vorliegenden Gebiete bezieht sich auf die durch Aenderung der Stromintensität vorhandener elektrischer Ströme inducirten elektromotorischen Kräfte, sobald die inducirenden Ströme nicht vollständig geschlossen sind. Der charakteristische Unterschied zwischen einem System geschlossener und einem System ungeschlossener Ströme ist, dass in ersterem keine Veränderungen in der Dichtigkeit der freien Elektricität vorkommen, wohl aber in dem letzteren. Bisher kennen wir nun aus der Erfahrung mit hinreichender Genauigkeit die Gesetze der elektrodynamischen Anziehungen und die damit connexen Gesetze der inducirten elektromotorischen Kräfte nur für geschlossene Ströme, oder höchstens solche Fälle ungeschlossener Ströme (Leydener Flaschen), bei denen die Unterbrechungsstelle einflusslos auf die elektrodynamischen Wirkungen blieb.

Der Standpunkt der reinen Erfahrungsthatsachen ist gewahrt, wenn man nach Ampère's Vorgang die elektrodynamischen Anziehungen darstellt als die Kräfte, welche zwei von den Stromkreisen begrenzte Flächen, mit magnetischen Doppelschichten bedeckt, auf einander ausüben; aber diese Art der Darstellung kann, wie ersichtlich, auf ungeschlossene Ströme nicht ausgedehnt werden.

Indessen liegt es in der Natur der Sache, dass man versuchen musste die Gesammtwirkung zweier Stromkreise auf einander nicht von zwei imaginären, durch sie begrenzten Flächen herzuleiten, sondern sie in die Wirkungen ihrer einzelnen Ele- 59
mente aufzulösen. Dabei zeigte sich, dass das Gesetz der Elementarwirkungen nicht vollständig und eindeutig aus dem der Gesammtwirkung bestimmt werden konnte. Schon Ampère hatte ein Gesetz für die anziehenden und abstossenden Kräfte gegeben, welche zwei Stromelemente aufeinander ausüben. Hr. Grassmann[1]) zeigte, dass dafür auch andere Kräfte eingeführt werden konnten, ohne das Resultat bei irgend einer Anwendung auf geschlossene Ströme zu verändern. Herr F. E. Neumann (Vater) leitete aus Ampère's Gesetzen für die Kräfte

1) Neue Theorie der Elektrodynamik in Poggendorff's Annalen LXIV. 1845.

den Ausdruck für das Potential zweier Stromelemente ab, und sprach zuerst das daraus herfliessende Gesetz der Induction aus, im Wesentlichen gestützt auf die Erfahrungsregel, dass die durch Bewegung von Magneten oder Stromleitern inducirten Ströme dieser Bewegung immer entgegenwirken. Wenig später erschien der erste Abschnitt von Herrn W. Weber's „Elektrodynamischen Maassbestimmungen“, in denen er zuerst das unter seinem Namen bekannte Gesetz der elektrischen Fernwirkung aufstellte, welches alle bis dahin bekannten Wirkungen der Elektricität, die elektrostatischen, elektrodynamischen und inducirenden unter einen Gesichtspunkt zusammenfasste. Das daraus hergeleitete Inductionsgesetz war abweichend von dem Neumann'schen Gesetze; aber es zeigte die darauf folgende Discussion, dass, bei richtiger Anwendung des Weber'schen Gesetzes, es für alle Fälle, wo der inducirende Strom geschlossen ist, genau dieselben Resultate giebt, wie das von Herrn Neumann aufgestellte Gesetz.

Da die von Herrn C. Neumann (Sohn)[1]) aufgestellte Hypothese über die elektrischen Fernwirkungen für geringere Strömungsgeschwindigkeiten der elektrischen Massen zum Weber'schen Gesetze führt, so ist auch das daraus folgende Inductionsgesetz dasselbe, so lange nur die ersten Potenzen der Stromstärken zu berücksichtigen sind.

Ein anderes Gesetz der Induction ist dagegen in den Arbeiten von Herrn Cl. Maxwell[2]), wenn auch in verdeckter Form, enthalten, welches wiederum für geschlossene, aber nicht für ungeschlossene Ströme mit den beiden vorher erwähnten übereinstimmt.

Analytisch genommen beruht das bezeichnete Verhältniss dieser verschiedenen Gesetze darauf, dass die Differenzen
60 zwischen den Werthen, die sie ergeben, alle auf die Form:

$$B \frac{d^2 r}{ds \, . \, d\sigma}$$

---

1) Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 16. Juni 1868.

2) London, Philosophical Transactions 1865. P. I. p. 459.

gebracht werden können, wo r die Entfernung der beiden Stromelemente ds und $d\sigma$, und B eine Constante bezeichnet. Diese Grösse liefert aber ein Integral vom Werthe Null, so oft sie über einen ganzen geschlossenen Stromkreis, sei es s oder σ, integrirt wird. Ihr Einfluss verschwindet also aus dem Resultate, so oft dabei einer der beiden Stromkreise als geschlossen in die Rechnung eingeführt wird. Dasselbe würde übrigens der Fall sein, wenn r auch nur irgend eine Function der Entfernung bedeutete. Im ersten Paragraphen der folgenden Untersuchung ist gezeigt worden, dass letzteres die allgemeinste Annahme ist, welche für das Potential zweier Stromelemente gewählt werden kann, wenn das Potential geschlossener Stromsysteme immer seinen richtigen Werth erhalten soll. Wenn man übrigens noch die Annahme hinzufügt, wie dies in den folgenden Untersuchungen geschehen ist, dass die Wirkung ungeschlossener Ströme in die Ferne keiner anderen Function der Entfernung proportional sei, als die aller anderen elektrischen Wirkungen, so ist unter r in dem obigen Ausdrucke die Entfernung selbst zu verstehen.

Auf die hier gemachten Bemerkungen gestützt, habe ich meiner Untersuchung einen Ausdruck für das Potential zweier Stromelemente zu Grunde gelegt [§ 1, Gleichung (1]), welcher eine Constante von unbekanntem Werthe (bezeichnet mit k) enthält, und in dieser Form die sämmtlichen bisher für dieses Potential aufgestellten Ausdrücke umschliesst. Aus meinem allgemeineren Ausdrucke ergiebt sich nämlich der von Herrn F. E. Neumann gebrauchte, wenn wir setzen $k = 1$, dagegen der von Herrn Cl. Maxwell, wenn wir setzen $k = 0$, und endlich der von Herrn W. Weber und C. Neumann, wenn wir setzen $k = -1$.

Die besondere Form der Herleitung des betreffenden Ausdruckes, wie sie im ersten Paragraphen durchgeführt ist, habe ich gewählt, um hervortreten zu lassen, dass unter Hinzunahme der schon erwähnten Hypothese dieser Ausdruck der allgemeinste ist, der den Bedingungen der Aufgabe und dem Gesetze von der Erhaltung der Kraft entspricht. Die weitere Annahme, dass auch die elektrodynamischen Wirkungen der ungeschlossenen Stromtheile ihrer Stromintensität einfach pro-

portional sind, widerspricht gewissen Folgerungen der Weberschen Hypothese, die übrigens noch in keinem Falle durch die Erfahrung unterstützt worden sind. Wie es sich damit aber
61 auch verhalten mag, jedenfalls wird für geringere Stromstärken, die unterhalb einer gewissen Grenze bleiben, meine Annahme zulässig sein, sodass diese ungünstigsten Falls die Anwendbarkeit der von mir gezogenen Folgerungen nur in Bezug auf die zulässigen Stromstärken beschränkt.

Im zweiten Paragraphen sind die Werthe des elektrodynamischen Potentials für Ströme, die continuirlich im Raume verbreitet sind, entwickelt, und zum weiteren Gebrauche umgeformt. Die Art der Umformung und die analytischen Kunstgriffe, welche dabei angewendet sind, sind im Wesentlichen dieselben, welche schon Herr Kirchhoff für denselben Zweck, aber auf einen etwas anders gestalteten Ausdruck angewendet hatte.

Dann sind im dritten Paragraphen die Bewegungsgleichungen der Elektricität aufgestellt, und auf ein System von Differentialgleichungen gebracht worden. Letztere sind im Innern eines Leiters von gleichmässiger Beschaffenheit dieselben, wie für verschwindend kleine Bewegungen in einem der Reibung unterworfenen Gase, nur mit anderen Grenzbedingungen. Dabei entsprechen aber die elektromotorischen Kräfte den Geschwindigkeiten des Gases, die elektrostatische Potentialfunction den Druck- und Dichtigkeitsänderungen des Gases.

Im vierten Paragraphen folgt dann die Untersuchung, ob durch die aufgestellten Gleichungen der Verlauf der Bewegung eindeutig bestimmt sei. Dies ist der Fall, wenn die Constante k nicht negativ ist. Wenn sie aber negativ ist, ergiebt sich, dass der Werth der durch die elektrische Bewegung repräsentirten Arbeit negativ, d. h. kleiner als im Ruhezustande werden kann, was das Zeichen eines labilen Gleichgewichtes der Elektricität im Ruhezustande ist. In der That wird ganz allgemein für Leiter jeder Form nachgewiesen, dass, wenn die genannte Arbeitsgrösse erst einmal einen negativen Werth hat, die Bewegung, sich selbst überlassen, fortdauernd

anschwillt und zu unendlichen Geschwindigkeiten und Dichtigkeiten der Elektricität führt.[1])

Die Frage konnte noch sein, ob solche Bewegungen, die
nach der labilen Seite des elektrischen Gleichgewichtes hin ausschlagen,
durch die bekannten äusseren Einwirkungen, welche
uns bei wirklichen Versuchen zu Gebote stehen, hervorgerufen
werden könnten, falls die Constante k wirklich einen negativen 62
Werth hätte. Es wird im fünften Paragraphen an einem Beispiel, nämlich der Kugel, gezeigt werden, dass dies wirklich der Fall ist. Es muss dies nachweisbar im allgemeinen geschehen, so oft elektrische Bewegungen in einer homogenen leitenden Kugel dadurch hervorgerufen werden, dass man ihr einen elektrisirten Körper nähert, und ihn dann wieder entfernt, gewisse besondere Bewegungsarten des elektrisirten Körpers ausgenommen.

Daraus geht hervor, dass die Annahme eines negativen Werthes für die Constante k, wie sie im Weber'schen Inductionsgesetze gemacht ist, unzulässig ist.

Es kann auffallen, dass in den bisherigen Arbeiten über dieses Thema, welche alle das von Herrn Kirchhoff[2]) aus dem Weber'schen Inductionsgesetz hergeleitete System von Gleichungen benutzt haben, diese Unzulänglichkeit nicht zum Vorschein gekommen ist. In dieser Beziehung ist zu bemerken, dass Herr Kirchhoff selbst Anwendungen der von ihm gefundenen Gleichungen nur auf unendlich dünne Drähte gemacht hat, und es wird in § 7 gezeigt werden, dass, wenn nur solche Oscillationen der Elektricität als stattfindend vorausgesetzt werden, gegen deren Wellenlänge der Durchmesser des Drahtes verschwindend klein ist, der Einfluss der Constante k ebenfalls verschwindet, sodass Herrn Kirchhoff's Resultate durch die meinigen nicht beeinträchtigt werden.

---

1) Aus mündlichen Mittheilungen meines Collegen Kirchhoff weiss ich, dass er schon vor mir gefunden hatte, dass gewisse elektrische Bewegungen in der Kugel nach den von ihm aus der Weber'schen Hypothese abgeleiteten Gleichungen diese Eigenschaft haben.

2) Poggendorff's Annalen CII. S. 529.

Dann hat Herr Jochmann[1]) dieselben Gleichungen angewendet zur Bestimmung der Ströme in einem rotirenden und der Einwirkung eines Magneten ausgesetzten Leiter. Solche Ströme sind in einer rotirenden Kugel immer geschlossene, sodass der Einfluss der Constante k verschwindet, und in einem Leiter von anderer Form (Scheibe) hat Herr Jochmann die Einwirkung der theilweise ungeschlossenen inducirten Ströme aufeinander ausser Rechnung gelassen.

Endlich hat Herr Lorberg[2]) die unter Einwirkung beliebiger periodischer äusserer Kräfte in einer homogenen leitenden Kugel vor sich gehenden periodischen Bewegungen der Elektricität untersucht, und es ist ihm gelungen, das ziemlich complicirte System der Differentialgleichungen für diesen Fall vollständig zu integriren. Seine Arbeit zeigt, dass periodische
63 endlich bleibende Bewegungen der Elektricität in einer Kugel unter Einfluss periodischer Kräfte vor sich gehen können, aber nicht, dass solche Bewegungen durch solche Kräfte aus dem Zustande der Ruhe hervorgerufen werden. Im Gegentheil, die Vergleichung mit den von mir aufgestellten Integralen der Differentialgleichungen zeigt, dass dauernd endliche Bewegungen unter zeitweiliger Einwirkung äusserer Kräfte in der Kugel nur möglich sind, wenn schon vorher eine schwellende Bewegung der Elektricität bestand, welche durch Einwirkung der äusseren Kräfte in eine abschwellende verwandelt worden ist.

Die von den Herren W. Weber und Lorberg hinzugefügte Annahme, dass die elektrischen Flüssigkeiten träge Masse und Beharrungsvermögen hätten, ändert nichts Wesentliches an diesen Ergebnissen.

Auch die von Herrn W. Weber[3]) angedeutete Annahme, dass in elektrisch geladenen Theilen des Leiters sich positive und negative Elektricität mit verschiedener Geschwindigkeit bewegen könnten, wobei dann die Fernwirkungen seiner Hypothese gemäss nicht einfach der Intensität der Strömung pro-

---

1) Borchardt's Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. LXIII. S. 158—178; 329—331.

2) Ebenda. Bd. LXXI. S. 53.

3) Elektrodynamische Maassbestimmungen. Heft I. S. 160—164.

portional, sondern auch von dem Producte dieser Intensität und der elektrischen Dichtigkeit abhängig werden würden, beseitigt die Schwierigkeit nicht, da die genannte Annahme nur Glieder höherer Dimensionen hinzufügen würde, die unzulässigen Folgerungen aber schon aus den Gliedern erster Dimension herfliessen, und sich daher bei den allerschwächsten Strömen schon geltend machen müssen.

Es scheint mir vielmehr, dass die hier zu Tage kommende Unzulänglichkeit des Weber'schen Gesetzes in der Natur desselben tief begründet ist. Dieses Gesetz fügt sich allerdings insofern dem Gesetze von der Erhaltung der Kraft ein, als es keinen Kreisprocess zulässt, der Arbeit aus Nichts erzeugte. Aber es widerspricht insofern, als zwei elektrische Theilchen, die sich nach diesem Gesetze bewegen und mit endlicher Geschwindigkeit beginnen, in endlicher Entfernung von einander unendliche lebendige Kraft erreichen und also eine unendlich grosse Arbeit leisten können.

Es sei m die Masse, welche sich mit dem elektrischen Theilchen e bewegt; dieses sei der abstossenden Kraft des gleichartigen Theilchens e' unterworfen; die Bewegung geschehe in Richtung der Entfernung r beider Theilchen. Nach dem Weber'schen Gesetze ist:

$$m\,.\,\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{e\,.\,e'}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2r}{c^2}\cdot\frac{d^2r}{dt^2}\right].$$

Wir multipliciren mit dr/dt und integriren: 64

$$\frac{m}{2}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = C - \frac{e\,.\,e'}{r} + \frac{e\,.\,e'}{r\,.\,c^2}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

oder:

$$\frac{1}{c^2}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{C - \frac{e\,.\,e'}{r}}{\frac{1}{2}m\,.\,c^2 - \frac{e\,.\,e'}{r}}.$$

Ist $e\,.\,e'/r > \frac{1}{2}mc^2 > C$, so ist $(dr/dt)^2$ positiv und grösser als c^2, also dr/dt reell. Ist letzteres selbst positiv, so wird r wachsen, bis $e\,.\,e'/r = \frac{1}{2}m\,.\,c^2$, dann wird dr/dt unendlich gross.

Dasselbe wird geschehen, wenn im Anfange $C > \frac{1}{2}m\,.\,c^2 > e\,.\,e'/r$, und dr/dt negativ ist.

Dies könnte also schon im einfachsten denkbaren Falle, bei der Bewegung zweier isolirter elektrischer Theilchen geschehen. Die Resultate unseres fünften Paragraphen zeigen, dass dasselbe auch bei wirklich ausführbaren Versuchen müsste vorkommen können, wenn das Weber'sche Gesetz in Wirklichkeit das Grundgesetz der elektrischen Fernwirkungen wäre.[1])

Im sechsten Paragraphen folgt dann eine Untersuchung darüber, ob und bei was für Versuchen ein wahrnehmbarer Einfluss der neu eingeführten Constante k etwa erwartet werden könne. Bilden wir die Gleichungen für eine radial von einem Centrum in einem unendlich ausgedehnten leitenden Medium sich ausbreitende elektrische Bewegung, so zeigt sich, dass sich in einem solchen Falle die Elektricität in longitudinalen Wellen ausbreiten kann, die aber je nach der Schwingungsdauer und dem Leitungswiderstande des Mediums
65 einem verschiedenen Grade von Dämpfung unterworfen sind. Ist die Dämpfung gering, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit solcher longitudinalen Wellen nach unserer Bezeichnung gleich $1/A\sqrt{k}$, wobei der Factor $1/A$ nach Herrn Weber's Bezeichnung gleich $c/\sqrt{2}$ ist, welche letztere Grösse, wie schon Herr Kirchhoff gefunden hat, der Lichtgeschwindigkeit ausserordentlich nahe gleich ist und als Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen in einem sehr gut leitenden Drahte von ihm nachgewiesen wurde.

Nach Herrn Maxwell's Annahme $k=0$ würde die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen elektrischen Wellen in einem Leiter unendlich gross werden, das heisst, die strömende Elektricität würde sich wie ein incompressibles

---

1) Das Potential zweier elektrischer Theilchen ist nach Weber:

$$\frac{e\,.\,e'}{r}\left[1-\frac{1}{c^2}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right].$$

Fügte man diesem Ausdrucke noch ein Glied hinzu, nämlich:

$$-\frac{1+k}{2}\cdot\frac{e\,.\,e'}{c^2}\cdot\frac{d^2r}{dt^2},$$

so würde man das in Gleichung (1) § 1 gegebene Potential zweier Stromelemente erhalten, und wenn k positiv, stabiles Gleichgewicht der Elektricität. Diese Annahme würde aber in den Ausdruck der Kraft ein Glied mit d^3r/dt^3 bringen, und ich wage deshalb keineswegs sie zu empfehlen.

Fluidum verhalten. Es bringt diese Annahme eine sehr beträchtliche Vereinfachung der analytischen Schwierigkeiten hervor, die bei den hierher gehörigen Aufgaben vorliegen, weil bei diesem Werthe von k nie freie Elektricität in das Innere eines homogenen Leiters eintritt, wenn sie nicht von Anfang an darin vorhanden war. Es wird dabei eine der Grundgleichungen der Aufgabe [(II.), beziehlich (IIa.) des § 3] frei von dem Differentialquotienten nach der Zeit, also ihre Integration nach der Zeit unnöthig.

Nach Herrn F. E. Neumann's Annahme $k = 1$ wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen gleich der des Lichtes. Wäre k eine nicht sehr grosse positive Zahl, so würde die genannte Fortpflanzungsgeschwindigkeit doch zu der des Lichtes immer noch in einem endlichen Verhältniss stehen. Nach Fourier's Satz kann man sich jede elektrische Bewegung zerlegt denken in eine Summe superponirter einfacher Oscillationen. So lange nun die Wellenlängen der Longitudinalwellen der mit den gegebenen Beobachtungsmitteln wahrzunehmenden Oscillationen so gross sind, dass die Dimensionen der leitenden Körper dagegen verschwinden, so lange kann auch die Bewegung keinen merklichen Einfluss der Constante k zeigen, und kann, selbst wenn k von Null verschieden ist, mit hinreichender Annäherung gefunden werden, auch wenn wir zur Erleichterung der Rechnung $k = 0$ setzen.

Der einzige praktisch vorkommende Fall eines Leiters von sehr erheblicher Erstreckung, wenigstens nach einer Richtung hin, ist der eines langen Drahtes. Ich habe deshalb im siebenten Paragraphen den Ablauf elektrischer Wellen in einem unendlichen Cylinder von kreisförmiger Basis so weit untersucht, als für den vorliegenden Zweck nöthig war. Ist die Wellenlänge sehr gross gegen den Durchmesser, so afficirt die Constante k erst die kleinen Glieder höherer Ordnung. 66
Die der ersten Ordnung finden sich übereinstimmend mit Herrn Kirchhoff's Analyse.

Es geht daraus hervor, dass wir uns bei den elektrischen Versuchen der von der Constante k abhängigen Geschwindigkeit der elektrischen Longitudinalwellen gegenüber in einer ähnlichen Lage befinden, wie in der Optik der Lichtgeschwindig-

keit gegenüber. Bei unseren Laboratoriumsversuchen werden wir nicht leicht in die Lage kommen, die eine oder die andere berücksichtigen zu müssen, oder ihren Werth bestimmen zu können, wenn wir nicht Mittel anwenden ganz ungewöhnlich feine Zeitunterschiede wahrnehmbar zu machen, wie dies für die physikalische Messung der Lichtgeschwindigkeit geschehen ist.

In den bisher besprochenen ersten sieben Paragraphen der vorliegenden Arbeit sind die elektrostatischen und elektrodynamischen Wirkungen als reine Wirkungen in die Ferne behandelt worden, welche die zwischen liegenden isolirenden Medien nicht afficiren und von ihnen nicht afficirt werden; es war dies, bisher wenigstens, die geläufige Betrachtungsweise der meisten mathematischen Physiker, wenigstens des Continents. Indessen wissen wir jetzt, namentlich durch Faraday's Entdeckungen, dass bei weitem die meisten körperlichen Medien magnetisirbar sind, und dass ein der magnetischen Polarisation ähnlicher Zustand von diëlektrischer Polarisation in den elektrischen Isolatoren vorkommt. Die einfachste Theorie des Diamagnetismus wird gewonnen, wenn wir auch den den Weltraum füllenden Lichtäther als magnetisirbar voraussetzen, und ist dies einmal angenommen, so liegt es nicht fern, ihn auch als Diëlektricum, in Faraday's Sinne, zu betrachten. Für die Wirkungen ruhender oder langsam bewegter Elektricität, ruhender oder langsam bewegter Magnetismen ergiebt eine solche Hypothese, welche das den Weltraum füllende Medium selbst als diëlektrisch und magnetisirbar betrachtet, durchaus dieselben Resultate, wie die, welche den Raum als absolut wirkungslos ansieht. Faraday's Theorie freilich, welcher Herr Cl. Maxwell in dem oben citirten Aufsatze ihren mathematischen Ausdruck gegeben hat, geht weiter, indem sie die Fernkräfte ganz leugnet, und dafür nur die durch contiguirlich fortschreitende Polarisation des Mediums fortgepflanzten Wirkungen setzt. Beide Theorien sind einander in gewissem Sinne entgegengesetzt, da nach der von Poisson ausgegangenen Theorie der magnetischen Induction, welcher die Theorie der diëlektrischen Polarisation der Isolatoren ganz entsprechend durchgeführt werden kann, die Fernwirkung durch die Polari-

sation verkleinert, nach Herrn Maxwell's Theorie dagegen 67
die Fernwirkung durch die Polarisation des Mediums geradezu ersetzt wird.

Aus Herrn Maxwell's Theorie hat sich nun das merkwürdige Resultat ergeben, dass elektrische Störungen in isolirenden Diëlektricis sich in Transversalwellen verbreiten, für deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit sich im Luftraume die Grösse $1/A$, das heisst die Lichtgeschwindigkeit, ergiebt.

Bei der hervorragenden Bedeutung, welche dieses Resultat für die weitere Entwickelung der Physik haben könnte, und da die Frage über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wirkungen in neuerer Zeit mehrfach angeregt worden ist, schien es mir wichtig auch noch zu untersuchen, was das von mir verallgemeinerte Inductionsgesetz für den Fall ergebe, dass magnetisirbare und diëlektrisch polarisirbare Medien vorhanden seien. Dies ist im achten Paragraphen geschehen.

Diese Untersuchung ergiebt Folgendes:

1) In diëlektrischen Isolatoren, selbst wenn sie nicht magnetisirbar sind, können sich elektrische Bewegungen in transversal und longitudinal oscillirenden Wellen fortpflanzen.

2) Die Geschwindigkeit der transversalen Wellen im Luftraume (beziehlich Weltraume) ergiebt sich in der Rechnung als desto geringer, je grösser seine diëlektrische Polarisirungsfähigkeit angenommen wird. Ist diese Null, so ist die genannte Geschwindigkeit unendlich; ist die Polarisirungsfähigkeit sehr gross, so findet man die Geschwindigkeit der transversalen Wellen, wie bei Herrn Maxwell, gleich der Lichtgeschwindigkeit.

3) Die Geschwindigkeit der longitudinalen Wellen im Luftraume findet sich gleich dem Product aus der der transversalen Wellen mit dem Factor $1/\sqrt{k}$ und einer von der magnetischen Beschaffenheit des Luftraumes abhängigen Constanten. In Herrn Maxwell's Theorie ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen elektrischen Wellen als unendlich vorausgesetzt, was dem Werthe $k = 0$ entspricht; das heisst, longitudinale Wellen kommen gar nicht zu Stande.

4) Die Geschwindigkeit der transversalen und der elektrischen longitudinalen Wellen in anderen Isolatoren wird desto

kleiner, je mehr ihre elektrische und magnetische Polarisirbarkeit die des Luftraumes übertrifft. In den Leitern der Elektricität pflanzen sich die Wellen unter allmähliger Schwächung durch Absorption fort. Für die Transversalwellen stimmt auch dies mit Herrn Maxwell's Theorie.

5) Wenn der Isolator, in welchem sich transversale elek-
68 trische Wellen fortpflanzen, magnetisch polarisirbar ist, und die elektrischen Oscillationen parallel einer durch die Fortpflanzungsrichtung gelegten Ebene geschehen, so finden magnetische transversale Oscillationen senkrecht zu dieser Ebene statt, die mit derselben Geschwindigkeit fortgepflanzt werden. Für magnetische longitudinale Oscillationen ergiebt sich in solchen Medien unendliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Es ergiebt sich also aus diesen Untersuchungen, dass die merkwürdige Analogie zwischen den Bewegungen der Elektricität in einem Diëlektricum und denen des Lichtäthers[1]) nicht von der besonderen Form von Herrn Maxwell's Hypothesen abhängt, sondern sich in wesentlich ähnlicher Weise auch ergiebt, wenn wir die ältere Ansicht über die elektrischen Fernwirkungen beibehalten.

Zu der bisher nicht bestimmbaren Constanten k unserer Untersuchungen kommt also noch eine zweite, nämlich die aus den bisherigen Versuchen ebenfalls nicht bestimmbare diëlektrische Constante des Luftraumes, oder die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Transversalwellen im Luftraume.

§ 1. Die allgemeinere Form des Inductionsgesetzes.

Das von Herrn F. E. Neumann aufgestellte Inductionsgesetz für die Ströme, welche durch Bewegung von Magneten

---

1) Diese Analogie ist noch in einer anderen sehr wichtigen Beziehung vorhanden, welche Herr Maxwell nicht berührt hat. Man hat den mechanischen Zustand des Lichtäthers in durchsichtigen Medien bisher dem der festen elastischen Körper gleich gesetzt. Diese Annahme ergiebt aber für die Grenze zweier durchsichtiger Medien andere Grenzbedingungen als man braucht, um die Refraction und Reflexion des Lichtes an dieser Grenze zu erklären, sodass hier in der theoretischen Optik ein ungelöster Widerspruch bestanden hat. Die Theorie der elektrischen Oscillationen

oder von Leitern constanter geschlossener Ströme inducirt werden, ist der unmittelbare Ausdruck der Erfahrung, wonach die durch Bewegung inducirten Ströme dieser Bewegung immer entgegenwirken, und wonach die elektromotorische Gesammtkraft des durch eine gewisse Bewegung erzeugten Integralstromes unabhängig von der Schnelligkeit dieser Bewegung ist. Um den mathematischen Ausdruck hierfür zu geben, mussten die Kräfte, welche zwei durchströmte Leiter, oder ein solcher 69
und ein Magnet auf einander ausüben, auf die Differentialquotienten einer Kräftefunction, oder wie diese hier genannt wurde, eines Potentials zurückgeführt werden.

Dies war zunächst unmittelbar möglich mittels des Ampère'schen Satzes, wonach die Fernwirkung eines geschlossenen Stromes auf Magnete oder andere Ströme gleich ist derjenigen einer vom Strome begrenzten Fläche, die mit einer magnetischen Doppelschicht bedeckt ist, deren Moment in allen gleich grossen Flächenstücken das gleiche und der Stromstärke proportional ist.

Das Potential eines Stromes auf einen anderen oder auf einen Magneten, im Neumann'schen Sinne, kann definirt werden als die Quantität mechanischer Arbeit, welche durch die elektrodynamischen oder elektromagnetischen Abstossungskräfte geleistet wird, wenn die beiden Ströme, beziehlich Strom und Magnet, bei unveränderter Stromstärke und Magnetisirung in unendliche Entfernung von einander übergeführt werden.

Das von Herrn Neumann formulirte Gesetz sagt dem entsprechend aus, dass die inducirte elektromotorische Kraft, welche in dem Stromleiter s durch Bewegung anderer con-

---

(Gleichungen (20c) bis (20e) unten) ergiebt aber nicht blos im Inneren eines gleichartigen isolirenden Mediums, sondern auch an der Grenze von zwei solchen Medien, dieselben Gesetze der Fortpflanzung, der Refraction und Reflexion der Wellen, wie wir sie beim Lichte thatsächlich finden, vorausgesetzt dass man entweder die magnetische oder die diëlektrische Polarisationsfähigkeit beider Medien gleich und letztere sehr gross setzt. Von der bezeichneten Alternative hängt es ab, ob die elektrischen oder magnetischen Oscillationen eines polarisirten Strahles in der Polarisationsebene geschehen.

stanter Ströme oder Magneten hervorgebracht wird, proportional ist der auf die Zeiteinheit berechneten Zunahme des Potentials jener Ströme und Magnete, genommen auf den von der Stromeinheit durchströmten Leiter s.

Ich habe dann gezeigt, dass, wenigstens bei der Induction durch Bewegung eines unveränderlichen und die Elektricität nicht leitenden Magneten, aus dem Gesetze der Erhaltung der Kraft folgt, dass die genannte elektromotorische Kraft der genannten Aenderung des Potentials nicht nur proportional, sondern gleich sein muss, wenn man die Einheit des Widerstandes so wählt, dass die Einheit des Stromes in derselben während der Zeiteinheit eine der Einheit der Arbeit äquivalente Wärmemenge erzeugt.

Weitere Erfahrungen zeigten, dass die elektromotorische Kraft des Integralstromes ebenfalls den gleichen Werth hat, wenn der inducirende Strom im unbewegten Leiter geschlossen wird, als wenn der Leiter mit dem schon bestehenden Strome aus unendlicher Ferne her schnell in die betreffende Lage geführt wird. Es folgt daraus, dass es für die inducirende Wirkung einerlei ist, ob die Zunahme des Potentials durch Bewegung oder Verstärkung des Stromes erfolgt.

Die Induction, welche ein Strom auf sich selbst ausübt, und welche in seiner eigenen Bahn den Extracurrent der
70 Schliessung und Oeffnung hervorruft, konnte unter dasselbe Gesetz gebracht werden, und ich selbst habe durch den Versuch nachgewiesen, dass die Stärke auch dieser verhältnissmässig schnell verlaufenden Stromesschwankungen, wenigstens bei vielgewundenen gut leitenden Spiralen, einfach durch das Neumann'sche Gesetz geregelt wird.[1] Für einen einzelnen Stromkreis, dessen Widerstand W ist und in welchem die constante elektromotorische Kraft A wirkt, ist also nach dem Ohm'schen Gesetze:

$$JW = A + 2P \cdot \frac{dJ}{dt},$$

worin P das Potential des von der Stromeinheit durchlaufenen

1) Ueber die Dauer und den Verlauf der durch Stromesschwankungen inducirten Ströme. Pogg. Annalen LXXXIII, S. 505. — Nr. XXV oben.

Stromkreises auf sich selbst bezogen bedeutet, und zwar so berechnet, dass die Wirkung aller Elemente a des Stromes auf alle diejenigen Elemente b, die noch nicht als a in die Summe aufgenommen sind, addirt wird. So berechnet, ist das Potential das Maass der mechanischen Arbeit, die bei Formveränderungen des Stromes geleistet werden kann. Bei den Inductionswirkungen kommt jedes Stromelement als inducirendes und inducirtes in Betracht, und kehrt deshalb jede Combination aus je zweien zwei Mal wieder. Daher der Factor 2 vor P.

Aus jener Gleichung folgt die Gleichung der Erhaltung der Kraft:

$$J^2 W dt - AJdt = \frac{d}{dt}[PJ^2].dt.$$

Nun ist $AJdt$ die Arbeit (chemische in den hydroëlektrischen Ketten), welche während der Zeit dt, um den Strom zu treiben, aufgebraucht ist; $J^2 W dt$ ist der Theil dieser Arbeit, der durch Wärmeentwickelung in der Stromleitung vernichtet ist. Daraus folgt, dass die gleichzeitige Zunahme der Grösse $-PJ^2$ einer Arbeitsleistung entspricht, welche die den Strom treibenden Kräfte verrichtet haben, während der Strom ansteigt. Umgekehrt, wenn die elektromotorische Kraft A beseitigt wird, und der Strom allmählig auf Null sinkt in der übrigens geschlossen bleibenden Leitung, so wird durch den Extracurrent die der Grösse $-PJ^2$ äquivalente Wärmemenge wiedererzeugt.

Es ist hierbei zu bemerken, dass die Grösse P nach Herrn Neumann's Definition nothwendig negativ ist, und daher $-PJ^2$ positiv. Dieser Satz, dass das negativ genommene Gesammtpotential sämmtlicher vorhandener Ströme auf einander dem durch das Bestehen dieser Ströme repräsentirten Arbeitsäquivalent gleich ist, gilt ganz allgemein für beliebige 71
Systeme geschlossener Ströme. Es wird nicht nöthig sein, den Beweis dafür an dieser Stelle auszuführen, da in § 4, Gleichung (5a) der Beweis ganz allgemein (auch ungeschlossene Ströme nach der neuen Inductionsformel umfassend) gegeben werden wird.

Daraus folgt also, wie schon die Herren W. Thomson und Cl. Maxwell hervorgehoben haben, dass die Strömung

der Elektricität, ähnlich der lebendigen Kraft einer bewegten trägen Masse, einer Arbeit äquivalent ist. Nur tritt der Unterschied ein, dass dies Arbeitsäquivalent der elektrischen Strömung in einer complicirten Weise von den räumlichen Verhältnissen der vorhandenen Ströme abhängt.

Wenn zwei geschlossene Stromkreise s und σ mit den Stromintensitäten i und j vorhanden sind, ist das Potential von der Form:

$$P_{s,s} . i^2 + P_{s,\sigma} . i . j + P_{\sigma,\sigma} . j^2 .$$

Darin sind $P_{s,s}$ und $P_{\sigma,\sigma}$ die Potentiale der Kreise s und σ auf sich selbst, $P_{s,\sigma}$ das Potential der beiden aufeinander, alle für die Stromeinheit in s und σ berechnet.

Die Grösse $P_{s,\sigma} . i . j$ ist also nach ihrer ursprünglich von Herrn F. E. Neumann ihr gegebenen Bedeutung die Grösse mechanischer Arbeit, welche bei constanten Strömen die beiden Leiter leisten können, wenn sie in unendliche Entfernung von einander gebracht werden. Ihre negativen Differentialquotienten, für irgend eine Lagenänderung genommen, sind die elektrodynamischen Kräfte, welche diese Lagenänderung hervorzubringen streben. Dass für geschlossene Ströme diese Kräfte auf ein Potential zurückgeführt werden können, ist durch die Ergebnisse der Versuche erwiesen. Für ungeschlossene Ströme könnte dies zweifelhaft erscheinen.

Eben deshalb ist es wichtig, dass die Grösse $- P_{s,\sigma} . i . j$ noch die zweite, von den Bewegungen der Stromleiter unabhängige Bedeutung hat. Sie ist derjenige Theil des vorhandenen Arbeitsäquivalentes, der von dem gleichzeitigen Vorhandensein der beiden Ströme i und j herrührt. Eine Function dieser Art muss offenbar auch für eine einzelne oder zwei neben einander bestehende ungeschlossene Strömungen existiren. Es muss sich der Werth des Arbeitsäquivalentes ihrer elektrischen Bewegung angeben lassen.

Wenn wir mit D_s und D_σ die Elemente der Länge zweier linearen Leiter s und σ bezeichnen, mit (D_s, D_σ) den Winkel, welchen die Richtungen beider mit einander machen, mit r ihre Entfernung, mit i die Intensität des Stromes in s, mit j

die in σ, so ist nach Herrn F. E. Neumann das Potential der beiden Stromelemente aufeinander gleich: 72

$$-A^2 . i . j . \frac{\cos(D_s, D_\sigma)}{r} . D_s . D_\sigma .$$

Darin ist A^2 eine Constante, deren Grösse von dem zur Messung der Stromstärke gebrauchten Maasse abhängt. Herr Neumann hat Ampère's elektrodynamische Stromeinheiten gebraucht, und demzufolge $A^2 = \frac{1}{2}$ gesetzt. Wir wollen im Folgenden elektrostatisches Strommaass gebrauchen, das heisst als Einheit der Stromstärke diejenige ansehen, wobei die gesammte Quantität Elektricität (algebraisch summirt), welche durch einen Querschnitt des Leiters in der Zeiteinheit fliesst, gleich Eins ist.[1] Als Einheit der Elektricität bezeichnen wir mit Gauss diejenige, welche ruhend in der Einheit der Entfernung die gleiche ruhende Masse mit der Einheit der Kraft abstösst. Dann ist nach den Messungen der Herren W. Weber und R. Kohlrausch zu setzen:

$$\frac{1}{A} = 310\,740 . 10^6 \frac{\text{Millim.}}{\text{Secdn.}},$$

oder $1/A$ ist eine Geschwindigkeit von 41 928 geographischen Meilen in der Secunde, eine Geschwindigkeit, welche der des Lichtes gleich kommt.

Der obige Ausdruck für das Potential zweier Stromelemente, sowie auch der von Ampère für die Anziehungskraft zweier Stromelemente gegebene Ausdruck, aus dem jener Werth des Potentials abgeleitet wurde, ist selbst hergeleitet aus und geprüft worden an Beobachtungsthatsachen, welche sich auf geschlossene Ströme beziehen.[2] Er ist aber

1) Diese Bestimmung ist analog gemacht derjenigen, welche die Commission der British Association für Bestimmung des Widerstandsmaasses gewählt hat. Herrn W. Weber's mechanische Stromeinheit ist doppelt so gross, weil er verlangt, dass die Einheit der positiven Elektricität allein genommen, in der Zeiteinheit den Querschnitt durchfliesse.

2) Ströme mit Gleitstellen können immer als geschlossene Ströme von veränderlicher Form betrachtet werden. Entladungsströme von Leydener Flaschen sind bisher auf die elektrodynamischen Wirkungen der Unterbrechungsstelle zwischen den beiden Belegen nicht untersucht worden.

bisher nicht durch die Erfahrung als gültig erwiesen für solche Ströme, welche nicht als ein System überall geschlossener Stromcurven angesehen werden können, deren jede einzelne in ihrer ganzen Länge constante Intensität hat, und in der That ergeben die Theorien der Herren W. Weber und Cl. Maxwell andere abweichende Ausdrücke für das Potential zweier Stromelemente, obgleich ihre Ergebnisse für alle elektrodynamischen und inducirenden Wirkungen geschlossener Ströme durchaus mit der Neumann'schen Theorie zusammenstimmen.

73 Wir haben zunächst zu untersuchen, welches die allgemeinste Form des Ausdrucks für das Potential der einzelnen Stromelemente sei, die in allen den Fällen, wo einer der Ströme geschlossen ist, den gleichen Werth wie die Neumann'sche Formel ergiebt. Zu dem Ende stellen wir folgende Ueberlegung an.

Es gehe der Stromleiter s vom Punkte a zum Punkte b, und der in ihm fliessende Strom habe die Intensität i, ferner gehe der Stromleiter σ vom Punkte c zum Punkte d, und der Strom in ihm habe die Intensität j. Es sei Q der wirkliche Werth des Potentials dieser beiden Stromleiter und P der nach Neumann's Formel berechnete Werth. Wenn wir nun statt des Stromleiters s einen anderen s_1 mit denselben Endpunkten setzen, und in ihm dieselbe Stromintensität i von a nach b fliessen lassen, mögen die entsprechenden Werthe von Q und von P beziehlich mit Q_1 und P_1 bezeichnet werden. Lassen wir nun die beiden Stromleiter s und s_1 zugleich bestehen, aber so, dass die Stromintensität in letzterem gleich $-i$ gemacht wird, und daher sein Potential auf σ den negativen Werth $-Q_1$ erhält, so bilden i in s und $-i$ in s_1 einen geschlossenen Strom, dessen Potential $Q - Q_1$ ist. Dieses ist aber auch durch die Neumann'sche Form vollständig gegeben, also:

$$Q - Q_1 = P - P_1.$$

Setzen wir also: $$Q = P + F,$$
so ist auch: $$Q_1 = P_1 + F$$

und die Grösse F überhaupt durchaus unabhängig von der Form, Länge, Lage, Richtung des Stromleiters s zwischen a

und b, wenn nur die Lage dieser seiner Endpunkte unverändert bleibt.

Ebenso ergiebt sich, dass F auch unabhängig von der Form des Stromleiters σ zwischen den Punkten c und d ist, wenn nur diese beiden Endpunkte von σ unverändert bleiben.

Die Grösse F hängt also von keinen anderen Raumgrössen ab, als von den Coordinaten der Punkte a, b, c und d. Wenn nun überhaupt die Gesammtwirkungen, welche zwei Ströme auf einander ausüben, als die Summen der gleichartigen Wirkungen aller einzelnen Elemente des einen auf alle einzelnen Elemente des anderen betrachtet werden dürfen, so sind die Ausdrücke Q und F entstanden durch Integrationen über sämmtliche Elemente von s und σ, und die Function F, welche nur von den Coordinaten der Endpunkte abhängt, muss also die Form haben: 74

$$F = F_{b,d} - F_{a,d} - F_{b,c} + F_{a,c},$$

wo jede dieser rechts stehenden Functionen nur von der Lage der durch die Indices bezeichneten Punkte abhängt.

Die einzige Raumgrösse, welche durch zwei Punkte vollständig bestimmt ist, ist deren Entfernung; also müssen $F_{b,d}$ etc. Functionen der Entfernungen $r_{b,d}$ etc. sein. Von anderen Raumgrössen können sie nicht abhängen, wohl aber können sie noch beliebige Functionen der Intensitäten i und j sein.

Reduciren wir nun die beiden Stromleiter s und σ auf zwei verschwindend kleine Elemente Ds und $D\sigma$, und verstehen wir unter F irgend eine Function der Entfernung r dieser Elemente und der Intensitäten i und j, so wird:

$$F_{b,d} - F_{a,d} - F_{b,c} + F_{a,c} = \frac{d^2 F}{ds \,.\, d\sigma} \,.\, Ds \,.\, D\sigma.$$

Dies ist also die allgemeinste Form der Ergänzung, welche dem Neumann'schen Ausdrucke des Potentials zweier Stromelemente gegeben werden kann, ohne dass dadurch die Gesammtwirkung eines geschlossenen Stromes auf einen beliebig beschaffenen anderen Strom geändert wird.

Ich erlaube mir im Folgenden die Form der Function F durch die schon in der Einleitung erwähnten Hypothesen zu

beschränken, welche sich auf die Analogie der sämmtlichen bisher bekannten Fälle elektrischer Wirkungen stützen.

Erstens setze ich die in der Function F zusammengefassten Wirkungen den Intensitäten i und j direct proportional.

Zweitens setze ich voraus, dass die Abhängigkeit von der Entfernung in diesem Falle dieselbe ist, wie bei allen anderen elektrischen Fernwirkungen, die sich von einem Massenelemente gleichmässig nach allen Richtungen ausbreiten; dass nämlich die Potentialfunction proportional $1/r$, die Kräfte proportional $1/r^2$ sind.

Nach diesen beiden Hypothesen haben wir zu setzen:

$$\frac{d^2 F}{ds \, . \, d\sigma} = B \, . \, i \, . \, j \, . \, \frac{d^2 r}{ds \, . \, d\sigma},$$

wo B eine Constante bezeichnet.

Bezeichnen wir die Coordinaten von Ds und $D\sigma$ beziehlich mit x, y, z und ξ, η, ζ, die Projectionen beider Elemente
75 auf die Coordinaten beziehlich mit Dx, Dy, Dz und $D\xi$, $D\eta$, $D\zeta$, so ist:

$$\frac{dr}{ds} \, . \, Ds = \frac{x - \xi}{r} \, . \, Dx + \frac{y - \eta}{r} \, . \, Dy + \frac{z - \zeta}{r} \, . \, Dz$$

$$= \cos(r, Ds) \, . \, Ds,$$

$$\frac{dr}{d\sigma} \, . \, D\sigma = - \cos(r, D\sigma) \, . \, Ds,$$

wenn (r, Ds) und $(r, D\sigma)$ die Winkel bezeichnen, welche die vom Punkte (ξ, η, ζ) nach (x, y, z) positiv gerechnete Richtung von r mit den Richtungen der Elemente Ds und $D\sigma$ macht.

Weiter erhalten wir durch nochmalige Differentiirung:

$$\frac{d^2 r}{ds \, . \, d\sigma} \, . \, Ds \, . \, D\sigma$$

$$= - \frac{1}{r} (Dx \, . \, D\xi + Dy \, . \, D\eta + Dz \, . \, D\zeta)$$

$$+ \frac{1}{r} \cos(r, Ds) \, . \, \cos(r, D\sigma) \, Ds \, . \, D\sigma,$$

oder:

$$\frac{d^2 r}{ds \, . \, d\sigma} = \frac{1}{r} [\cos(r, Ds) \, . \, \cos(r, D\sigma) - \cos(Ds \, . \, D\sigma)].$$

Es hat also der oben gegebene Werth von $d^2 F/ds \, . \, d\sigma$ wirklich dieselbe Art der Abhängigkeit von r, wie andere elektrische Potentialfunctionen. Dagegen wäre, wie man sich leicht

überzeugt, keine andere Function von r, als allein $F = B.i.j.r$, im Stande, den in den obigen beiden Hypothesen gestellten Anforderungen zu genügen.

Was die Annahme insbesondere betrifft, dass die Function F den Intensitäten i und j direct proportional sei, so werden wir es im Folgenden mit Gleichungen zu thun haben, in denen die Stromintensitäten nur linear vorkommen. Sollte also die Abhängigkeit der Function F von i eine solche sein, dass sie nach Potenzen von i entwickelt höhere Potenzen dieser Grösse eintreten liesse, als die erste, — worauf bisher aber noch keine Erfahrungsthatsache hindeutet, — so würden immerhin unsere Gleichungen noch für Strömungen von einer gewissen geringeren Intensität ihre Geltung behalten.

Dasselbe würde, wie schon erwähnt, der Fall sein, wenn nach einer von Herrn W. Weber aufgestellten Hypothese die Fernwirkungen nicht bloss von der Intensität, sondern auch vom Product der Intensität und der Dichtigkeit der freien Elektricität abhängen sollten, eine Hypothese, die übrigens ebenfalls noch durch keine Erfahrungsthatsache unterstützt wird.

In den von uns zu behandelnden Fällen wenigstens würde die Dichtigkeit im Innern der Leiter bei verschwindend kleinen
Stromintensitäten immer selbst eine verschwindend kleine Grösse 76
derselben Ordnung sein, und also das Product beider zu vernachlässigen.

Beide Möglichkeiten würden also nur die Breite der Anwendbarkeit unserer Folgerungen für stärkere Ströme beschränken, ohne ihre Richtigkeit für schwache Ströme aufzuheben.

Ich setze jetzt, um den von uns zu brauchenden verallgemeinerten Ausdruck des elektrodynamischen Potentials zweier Elemente auf die zweckmässigste Form zu bringen, die oben gebrauchte Constante:

$$B = -\frac{1-k}{2}.A^2,$$

worin k eine neue Constante bezeichnet. Dann wird das Potential zweier Stromelemente gleich dem Ausdrucke:

$$\left.\begin{array}{r} -\frac{1}{2}A^2\frac{i.j}{r}[(1+k).\cos(Ds, D\sigma) \\ +(1-k).\cos(r, Ds).\cos(r, D\sigma)]\,Ds.D\sigma. \end{array}\right\} \quad (1)$$

§ 2. Umformung der Ausdrücke des Potentials für continuirlich im Raume verbreitete Strömungen.

Ich bezeichne mit u, v, w die Componenten der elektrischen Strömung in Richtung der positiven rechtwinkligen Coordinaten x, y, z im Innern eines continuirlich durchströmten Körpers, und die Werthe des elektrodynamischen Potentials, welches die sämmtlichen vorhandenen Ströme in Bezug auf die Stromcomponenten u, v, w im Volumenelemente $dx.dy.dz$ hervorbringen, der Reihe nach mit:

$$-A^2.U.u.dx.dy.dz,$$
$$-A^2.V.v.dx.dy.dz,$$
$$-A^2.W.w.dx.dy.dz.$$

Der Werth von U ist nach dem in Gleichung (1) festgestellten Werthe des Potentials je zweier einzelner Stromelemente:

$$\left.\begin{aligned} U = \iiint \Big\{ & \frac{1+k}{2} \cdot \frac{u}{r} + \frac{1-k}{2} \cdot \frac{x-\xi}{r^2} [u.(x-\xi) + v(y-\eta) \\ & + w(z-\zeta)] \Big\} . d\xi . d\eta . d\zeta \end{aligned}\right\} \quad (1a)$$

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2.$$

Unter dem Integralzeichen sind u, v, w als Functionen von ξ, η, ζ zu nehmen, und die Integration ist entweder über den ganzen Raum, oder wenigstens über alle Stellen des Raumes auszudehnen, in denen elektrische Strömungen oder Bewegungen elektrisirter Massen vorkommen.

77 Die Werthe von V und W erhalten wir, wenn wir in (1a) vertauschen: U, u, x, ξ
mit V, v, y, η
oder mit W, w, z, ζ.

Der Werth von U lässt sich auch in folgender Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned} U = \iiint \Big\{ & \frac{u}{r} + \frac{1-k}{2} \cdot \Big[u . \frac{d^2 r}{dx . d\xi} + v . \frac{d^2 r}{dx . d\eta} \\ & + w . \frac{d^2 r}{dx . d\zeta} \Big] \Big\} . d\xi . d\eta . d\zeta . \end{aligned}\right\} \quad (1b)$$

Bezeichnen wir mit Ψ folgenden Ausdruck:

$$\Psi = \iiint \left(u . \frac{dr}{d\xi} + v . \frac{dr}{d\eta} + w . \frac{dr}{d\zeta} \right) . d\xi . d\eta . d\zeta , \qquad (1c)$$

so können wir, vorausgesetzt, dass Ψ einen endlichen Werth hat, die Werthe von U, V und W in folgender Form geben:

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{1-k}{2} \cdot \frac{d\Psi}{dx} + \iiint \frac{u}{r} \, . \, d\xi \, . \, d\eta \, . \, d\zeta, \\ V &= \frac{1-k}{2} \cdot \frac{d\Psi}{dy} + \iiint \frac{v}{r} \, . \, d\xi \, . \, d\eta \, . \, d\zeta, \\ W &= \frac{1-k}{2} \cdot \frac{d\Psi}{dz} + \iiint \frac{w}{r} \, . \, d\xi \, . \, d\eta \, . \, d\zeta. \end{aligned}\right\} \tag{1d}$$

In dem Ausdrucke (1c) für Ψ sind die Grössen $dr/d\xi$, $dr/d\eta$, $dr/d\zeta$ echte Brüche, und Ψ ist jedenfalls endlich, wenn, wie im Folgenden mit Ausnahme von § 7 immer angenommen werden wird, nur endliche elektrische Massen mit endlicher Geschwindigkeit bewegt werden, und diese sich alle in endlicher Entfernung von einander befinden, so dass jenseits eines gewissen Abstandes:

$$u = v = w = 0. \tag{1e}$$

Um die Continuität der Functionen Ψ, U, V und W, sowie ihrer Differentialquotienten festzustellen, beziehlich die Ausnahmefälle zu finden, nehmen wir hierzu noch die Gleichungen, welche die Constanz der Quantität der Elektricität ausdrücken.

Bezeichnen wir mit φ die Potentialfunction der freien Elektricität, so ist im Innern eines Raumes, in welchem die Elektricität endliche Dichtigkeit hat, die Abnahme dieser Dichtigkeit für die Zeiteinheit gleich:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{d\Delta\varphi}{dt} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}, \tag{2}$$

worin das Zeichen Δ die Operation bezeichnet:

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}.$$

Und an einer mit Elektricität belegten Fläche Ω mag N die Normale der Fläche bezeichnen, a, b, c die Winkel, welche ihre Richtung mit den positiven Axenrichtungen der x, y, z bildet, $d\Omega$ das Flächenelement; φ, u, v, w mögen Werthe dieser Functionen bezeichnen an der Seite der Fläche, die der 78

negativen Richtung der Normale zugekehrt ist, dagegen φ_1, u_1, v_1 und w_1 die Werthe an der Seite der Fläche, wo die positive Richtung der Normale hinzeigt. Dann ist die Zunahme der Elektricitätsmenge auf der Flächeneinheit gleich:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi}\left[\frac{d^2\varphi}{dt\,.\,dN}-\frac{d^2\varphi_1}{dt\,.\,dN}\right]\\&=(u-u_1)\cos a+(v-v_1)\cos b+(w-w_1)\cos c.\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{a})$$

Wenn man nun mit Benutzung von (2) und (2a) die Gleichung (1c) partiell integrirt, so erhält man:

$$\Psi=\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int r\left(\frac{d\varphi}{dN}-\frac{d\varphi_1}{dN}\right).\,d\Omega-\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int r\,.\,\Delta\varphi\,.\,d\xi\,.\,d\eta\,.\,d\zeta,\qquad(2\text{b})$$

oder auch, wenn man die freie Elektricität mit E bezeichnet:

$$\Psi=\int r\,.\,\frac{dE}{dt}\,.\,d\xi\,.\,d\zeta\,.\,d\zeta.\qquad(2\text{c})$$

Die Integrale, welche bei der Bildung von (2b) sich auf die unendlich entfernte Grenzfläche des Raumes beziehen, müssen nach der bei (1c) gemachten Annahme gleich Null werden, und sind deshalb weggelassen.

Durch Benutzung des Green'schen Satzes ergiebt sich ferner, dass, wenn $d\varphi/dt$ nirgends discontinuirlich ist, das heisst, wenn nirgends elektromotorische Flächen von veränderlicher Kraft vorkommen, der in (2b) angegebene Werth von Ψ gleich sei:

$$\Psi=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{d\varphi}{dt}\,.\,\Delta r\,.\,d\xi\,.\,d\eta\,.\,d\zeta.$$

Auch hier können wieder die auf die unendlich entfernte Grenzfläche des Raumes bezüglichen Integrale weggelassen werden, unter Voraussetzung, dass daselbst $d\varphi/dt$ keine grösseren Glieder enthält, als solche von der Form:

$$B\,.\,\frac{\cos\alpha}{r^2},$$

wo α der Winkel ist, den die Linie r mit irgend einer festen geraden Linie bildet, und B eine Constante. Die gemachte Voraussetzung wird immer zutreffen, wenn alle zu berücksichtigenden elektrischen Bewegungen nur in endlicher Entfernung von der untersuchten Stelle vor sich gehen.

Da nun: 79

$$\Delta r = \frac{2}{r},$$

so folgt:

$$\left.\begin{aligned} \Psi &= -\frac{1}{2\pi}\int \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{1}{r} \cdot d\xi \,.\, d\eta \,.\, d\zeta, \\ &\text{und:} \\ \Delta \Psi &= 2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (2\mathrm{d})$$

Die Function Ψ ist also analytisch darstellbar als die Potentialfunction einer mit der Dichtigkeit $-(1/2\pi).d\varphi/dt$ ausgebreiteten Masse. Da nun $d\varphi/dt$ jedenfalls nicht an einer Fläche unendlich wird, so ist Ψ überall stetig, ebenso seine Differentialquotienten $d\Psi/dx$, $d\Psi/dy$, $d\Psi/dz$; beide mit eventueller Ausnahme solcher Punkte, in denen $d\varphi/dt$ unendlich wird.

Demgemäss sind die oben in (1d) gegebenen Werthe von U, V, W jedenfalls überall stetig, mit Ausnahme solcher Punkte, wo die elektrische Strömung unendlich wird.

Es ergiebt sich ferner aus (2d) durch Differentiation nach x:

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{1}{2\pi}\int \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{x-\xi}{r^3}\, d\xi \,.\, d\eta \,.\, d\zeta,$$

und durch partielle Integration nach ξ:

$$\frac{d\Psi}{dx} = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{d^2\varphi}{dt\,.\,d\xi} \cdot \frac{1}{r} \cdot d\xi \,.\, d\eta \,.\, d\zeta. \qquad (2\mathrm{e})$$

Daraus folgt, dass auch die ersten Differentialquotienten von Ψ nach x, y, z genommen als Potentialfunctionen einer Masse dargestellt werden können, deren Dichtigkeit $-(1/2\pi).d^2\varphi/dt.dx$ ist. Diese ist überall endlich, ausgenommen in Punkten, in denen die Geschwindigkeiten unendlich werden. Also müssen mit Ausnahme solcher Punkte auch die zweiten Differentialquotienten von Ψ überall stetig sein.

Nachdem dies festgestellt ist, folgt aus den in (1b) für U, V und W gegebenen Werthen, dass auch U, V, W mit Ausnahme einzelner Punkte unter den angegebenen Voraussetzungen überall, namentlich auch an den Grenzflächen der Leiter, stetige Differentialquotienten haben müssen. Dasselbe

Resultat kann übrigens auch direct aus der Gleichung (1a) mittels ähnlicher Betrachtungen abgeleitet werden, wie sie angewendet werden, um für die Potentialfunctionen von Massen endlicher Dichtigkeit den gleichen Beweis zu führen.

80 Aus der Gleichung (2d) folgt:

$$\Delta \Psi = 2 \frac{d\varphi}{dt}, \tag{2f}$$

und demgemäss aus (1d):

$$\left.\begin{aligned} \Delta U &= (1-k)\cdot\frac{d^2\varphi}{dx.dt} - 4\pi u, \\ \Delta V &= (1-k)\cdot\frac{d^2\varphi}{dy.dt} - 4\pi v, \\ \Delta W &= (1-k)\cdot\frac{d^2\varphi}{dz.dt} - 4\pi w. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Ferner ergiebt sich aus (1d):

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = \frac{1-k}{2}\cdot\Delta\Psi$$
$$+ \int \left(u\cdot\frac{\xi-x}{r^3} + v\cdot\frac{\eta-y}{r^3} + w\cdot\frac{\zeta-z}{r^3}\right)\cdot d\xi\,.\,d\eta\,.\,d\zeta\,.$$

Indem man aus (2f) für das erste Glied links den Werth setzt und das folgende Glied partiell integrirt mit Berücksichtigung von (2) und (2a), so erhält man:

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = -k\cdot\frac{d\varphi}{dt}. \tag{3a}$$

Nachdem diese Eigenschaften der Functionen U, V, W festgestellt sind, können wir zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen übergehen.

§ 3. Bewegungsgleichungen der Elektricität.

Die elektromotorische Kraft, die im Punkte x, y, z wirkt, ist zusammengesetzt aus derjenigen, die von der elektrostatischen Kraft der freien Elektricität herrührt, und deren Grösse durch die negativ genommenen Differentialquotienten der Potentialfunction φ der freien Elektricität gegeben wird, und ferner aus der Inductionskraft, die in Richtung der x gleich $-A^2 dU/dt$

ist. Bezeichnen wir also den Widerstand eines prismatischen Leiters von der Einheit der Länge und Einheit des Querschnittes mit $\varkappa$, so sind Folgendes die Bewegungsgleichungen der Elektricität:[1]

$$\left.\begin{aligned} \varkappa u &= -\frac{d\varphi}{dx} - A^2 \frac{dU}{dt}, \\ \varkappa v &= -\frac{d\varphi}{dy} - A^2 \frac{dV}{dt}, \\ \varkappa w &= -\frac{d\varphi}{dz} - A^2 \frac{dW}{dt}, \end{aligned}\right\} \quad (3\,\mathrm{b})$$ 81

Was den Werth der Constanten $\varkappa$ betrifft, so ist Herrn W. Weber's elektromagnetische Stromeinheit nach unserer Bezeichnung gleich $1/A$, seine Einheit der elektromotorischen Kraft dagegen gleich A zu setzen, also seine elektromagnetische Widerstandseinheit gleich A^2. Für Kupferdrähte von 1 mm Länge und 1 mg Gewicht ergeben seine Messungen die Grösse des Widerstandes, aus verschiedenen Drahtproben berechnet, wie folgt:

Jacobi's Draht	2 310 000
Kirchhoff's Draht.	1 916 000
W. Weber's Draht	1 865 000
Mittel	2 030 300.

Um für einen Leiter von einem Millimeter Länge und einem Quadratmillimeter Querschnitt den Widerstand zu finden, muss man diese Zahlen durch das specifische Gewicht des Kupfers 8,95 dividiren, und so ergiebt sich als dem Mittel jener drei Kupfersorten entsprechend:

$$\varkappa = 227\,000\, A^2 \frac{\text{Quadratmillim.}}{\text{Secdn.}}$$

oder:

$$\varkappa = \frac{1}{425\,370\,.\,10^{12}}\ \text{Secdn.}$$

---

1) Um die hier gegebenen Gleichungen auf die Kirchhoff'schen zurückzuführen, setze man:

statt	k	$\varkappa$	φ	A^2
nunmehr	-1	$\frac{2}{4k}$	$\frac{1}{2}\Omega$	$\frac{2}{c^2}$

Der bestleitende Draht von galvanoplastischem Kupfer ergiebt:

$$\varkappa = \frac{1}{513\,144\,.\,10^{12}}\ \text{Secdn.}$$

In den Gleichungen (3b) sind U, V, W und φ zunächst als Integrale gegeben. Um die betreffenden Gleichungen in die Form von Differentialgleichungen zu bringen, brauchen wir nur die genannten vier Grössen als Unbekannte zu benutzen.

Wir haben dabei zu unterscheiden:

1) Theile des Raumes, die wir mit S bezeichnen wollen, welche leitend sind, und auf deren Inneres keine anderen Kräfte wirken, als die elektrostatischen und inducirten elektro-
32 motorischen Kräfte. Innerhalb solcher Theile gelten die Gleichungen (3b), welche bei Berücksichtigung von (3) die Form annehmen:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta U - (1-k)\frac{d^2\varphi}{dx\,.\,dt} &= \frac{4\pi}{\varkappa}\left\{\frac{d\varphi}{dx} + A^2\frac{dU}{dt}\right\}, \\ \varDelta V - (1-k)\frac{d^2\varphi}{dy\,.\,dt} &= \frac{4\pi}{\varkappa}\left\{\frac{d\varphi}{dy} + A^2\frac{dV}{dt}\right\}, \\ \varDelta W - (1-k)\frac{d^2\varphi}{dz\,.\,dt} &= \frac{4\pi}{\varkappa}\left\{\frac{d\varphi}{dz} + A^2\frac{dW}{dt}\right\}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

2) In anderen Theilen des Raumes können wir die elektrischen Strömungen als vorgeschrieben betrachten. Dies wird zum Beispiel der Fall sein, wo elektrisch geladene Isolatoren bewegt werden, oder elektrische Ströme in Drähten unter Einfluss relativ grosser hydroëlektrischer Kräfte circuliren. Auch wenn man Magnete durch ein System elektrischer Ströme ersetzt denkt, sind diese als unveränderlich vorgeschriebene Ströme zu betrachten. Diese Theile des Raumes mögen mit S_1, die Werthe der Functionen U, V, W, φ etc. mit U_1, V_1, W_1, φ_1 etc. bezeichnet werden. In ihnen ist:

$$\left.\begin{aligned} \varDelta U_1 - (1-k)\frac{d^2\varphi_1}{dx\,.\,dt} &= -\,4\pi u_1\,, \\ \varDelta V_1 - (1-k)\frac{d^2\varphi_1}{dy\,.\,dt} &= -\,4\pi v_1\,, \\ \varDelta W_1 - (1-k)\frac{d^2\varphi_1}{dz\,.\,dt} &= -\,4\pi w_1\,. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(Ia)}$$

3) Im ganzen Raume S und S_1 gilt die Gleichung (3a):

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = -k \cdot \frac{d\varphi}{dt}, \qquad \text{(II)}$$

$$\frac{dU_1}{dx} + \frac{dV_1}{dy} + \frac{dW_1}{dz} = -k \cdot \frac{d\varphi_1}{dt}. \qquad \text{(IIa)}$$

4) Die Grenzbedingungen an mit Elektricität belegten Flächen Ω sind:

$$U - U_1 = V - V_1 = W - W_1 = \varphi - \varphi_1 = 0, \qquad \text{(III)}$$

$$\frac{dU}{dN} - \frac{dU_1}{dN} = \frac{dV}{dN} - \frac{dV_1}{dN} = \frac{dW}{dN} - \frac{dW_1}{dN} = 0. \qquad \text{(IV)}$$

5) In unendlicher Entfernung von den Leitern und bewegten Massen:

$$U = V = W = \varphi = 0. \qquad \text{(V)}$$

Wenn aus diesen Gleichungen U, V, W und φ bestimmt sind, erhält man u, v, w durch die Gleichungen (3).

Das System der Gleichungen (I) bis (V) vertritt vollständig die Bedingungen der Aufgabe, die ausgesprochen sind 83 durch die Gleichungen (1a), nebst den entsprechenden Gleichungen für v und w, und durch (2), (2a), (3b).

Da das System (I) bis (V) abgeleitet ist aus den Bedingungsgleichungen der Aufgabe, so fügt es keine neuen Bedingungen hinzu, die jene nicht enthalten.

Umgekehrt ist nachzuweisen, dass, wenn das System (I) bis (V.) erfüllt ist, jene vier Bedingungsgleichungen der Aufgabe erfüllt sind.

Zunächst ist ersichtlich, dass die Gleichungen (3b) unmittelbar aus (I) erhalten werden, wenn man ΔU etc. durch die Geschwindigkeiten ausdrückt, wie in den u, v, w definirenden Gleichungen (3) vorgeschrieben ist.

Die Gleichung (2) erhält man, wenn man die Gleichungen (II) und (IIa) der Operation Δ unterwirft, und die Werthe von $\Delta\,(dU/dx)$ etc. aus (3) bildet.

Die Gleichung (2a), welche an Flächen Ω gilt, erhält man

durch folgende Betrachtungen. Wenn Ψ eine Function ist, die auf beiden Seiten der Fläche Ω gleiche Werthe hat,

$$\Psi = \Psi_1,$$

aber $d\Psi/dN$ von $d\Psi_1/dN$ verschieden ist, so ist, wie leicht zu sehen:

$$\frac{d(\Psi - \Psi_1)}{dx} = \frac{d(\Psi - \Psi_1)}{dN} \cos a,$$
$$\frac{d(\Psi - \Psi_1)}{dy} = \frac{d(\Psi - \Psi_1)}{dN} \cos b,$$
$$\frac{d(\Psi - \Psi_1)}{dz} = \frac{d(\Psi - \Psi_1)}{dN} \cos c,$$

wo a, b, c wie früher die Winkel sind, welche die Normale N mit den Coordinatenaxen macht. Da dU/dx, dU/dy, dU/dz auf beiden Seiten der Fläche Ω nicht verschieden sind, so ist:

$$\frac{d^2(U - U_1)}{dx \, . \, dy} = \frac{d}{dN} \left\{ \frac{d(U - U_1)}{dy} \right\} \cos a,$$
$$\frac{d^2(U - U_1)}{dy \, . \, dy} = \frac{d}{dN} \left\{ \frac{d(U - U_1)}{dy} \right\} \cos b,$$

und daraus folgt:

$$\frac{d^2(U - U_1)}{dx \, . \, dy} \cos b - \frac{d^2(U - U_1)}{dy^2} \cos a = 0.$$

Daraus folgt weiter, dass, wenn man die Werthe von $d\varphi/dt$ und $d\varphi_1/dt$ aus den Gleichungen (II) entnimmt:

84 $$\cos a \left[\Delta (U - U_1) + k \frac{d^2(\varphi - \varphi_1)}{dt \, . \, dx} \right] + \cos b \left[\Delta (V - V_1) + k \frac{d^2(\varphi - \varphi_1)}{dt \, . \, dy} \right]$$
$$+ \cos c \left[\Delta (W - W_1) + k \frac{d^2(\varphi - \varphi_1)}{dt \, . \, dz} \right] = 0,$$

und wenn man hierin für ΔU, ΔU_1 u. s. w. die Werthe setzt aus (3) und (I a), so folgt die Gleichung (2 a).

Endlich ist noch zu erweisen, dass die Functionen U, V, W der Gleichungen (I) bis (V), wenn man vermöge der Gleichungen (3) die Geschwindigkeiten u, v, w einführt, gleich den in (1 a) und gemäss (1 a) gebildeten Werthen dieser Grössen sind. Dies geht daraus hervor, dass eine Function, die überall endlich und stetig ist, deren Differentialquotienten ebenfalls überall endlich und stetig sind, und die in unendlicher Entfernung gleich Null ist, wie dies die Gleichungen (III), (IV),

(V) von U, V, W aussagen, nach den bekannten Sätzen über Potentialfunctionen dargestellt werden kann in der Form:

$$U = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\Delta U}{r} . d\xi . d\eta . d\zeta.$$

Setzt man nun statt ΔU die in (3) und (Ia) gegebenen Werthe, so erhält man Gleichungen von der Form (1d), wo der Werth von $d\Psi/dx$ u. s. w. zunächst in der Form von (2e) gegeben ist. Die Transformationen aber des Werthes von Ψ, welche uns von der Form (1c) zu (2e) geführt haben, und welche auf partiellen Integrationen beruhten, kann man alle rückwärts machen, und kommt so auf die Gleichungen (1d) und (1c), die nur eine andere Schreibweise von (1a) sind.

Es ist in diesen Entwickelungen keine Rücksicht genommen auf das Vorkommen elektromotorischer (hydroëlektrischer oder thermoëlektrischer) Molecularprocesse. Haben diese constante Kraft, so geben sie einfach einen den übrigen Strömen superponirten constanten Strom. Haben sie aber inconstante Kraft, so lassen sich die Umformungen der Function Ψ nicht immer so ausführen, wie oben geschehen.

Die in der Einleitung erwähnte Analogie zwischen den Bewegungen der Elektricität in einem Leiter und denen eines Gases zeigt sich in folgender Weise. Es sei p der Druck, ϱ die Dichtigkeit, u, v, w die Componenten der Strömungsgeschwindigkeit; letztere seien so klein, p und ϱ so wenig von den Werthen p_0 und ϱ_0 in der ruhenden Flüssigkeit unterschieden, dass die Glieder zweiter Dimension der Grössen 35
$(p - p_0)$, $(\varrho - \varrho_0)$ vernachlässigt werden können. Dann sind die Bewegungsgleichungen eines reibenden Gases, auf dessen Inneres keine äusseren Kräfte wirken:

$$-\frac{1}{\varrho}.\frac{dp}{dx} = \frac{du}{dt} - \mu\,\Delta u - \nu\,\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right),$$

$$-\frac{1}{\varrho}.\frac{dp}{dy} = \frac{dv}{dt} - \mu\,\Delta v - \nu\,\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right),$$

$$-\frac{1}{\varrho}.\frac{dp}{dz} = \frac{dw}{dt} - \mu\,\Delta w - \nu\,\frac{d}{dz}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right),$$

$$-\frac{1}{\varrho}.\frac{d\varrho}{dt} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}.$$

Man setze:

statt $u, \quad v, \quad w, \quad \frac{p-p_0}{\varrho_0}, \quad \frac{\varrho-\varrho_0}{\varrho_0}, \quad \mu, \quad \nu$

$U, \quad V, \quad W, \quad \frac{1}{A^2}\varphi, \quad k\varphi, \quad \frac{\varkappa}{4\pi A^2}, \quad \frac{1-k}{k}\cdot\frac{\varkappa}{4\pi A^2},$

so erhalten wir die für das Innere eines Leiters von constantem Leitungsvermögen geltenden Bewegungsgleichungen der Elektricität. Dabei ergiebt sich:

$$\frac{p-p_0}{\varrho-\varrho_0} = \frac{1}{kA^2}.$$

Dem kann ein Gas von stabilem Gleichgewicht nur entsprechen, wenn k positiv ist. Ist $k = 0$, wie in Herrn Maxwell's Annahme, so würde die Elektricität sich wie eine incompressible Flüssigkeit bewegen. Auch müssen die beiden Reibungscoëfficienten μ und ν positiven Werth haben, wenn die Vergleichung statthaft sein soll, was bei ν nur der Fall ist, wenn $1 > k > 0$ ist.

Die Geschwindigkeiten der Flüssigkeit entsprechen aber hierbei, wie man sieht, nicht den Geschwindigkeiten der Elektricität, sondern den elektromotorischen Kräften. Die Geschwindigkeiten der Elektricität wären vielmehr den durch die Reibung hervorgebrachten Bewegungskräften proportional.

Die Grenzbedingungen freilich sind abweichend; indessen giebt eine solche Vergleichung immerhin einen Anhalt für die Vorstellung.

§ 4. Eindeutigkeit der Lösungen und Stabilität des Gleichgewichts.

Bezeichnen wir mit Φ denjenigen Theil der Arbeit, welcher durch Abänderung der elektrischen Strömungen in den Leitern S
86 verändert wird, so besteht derselbe aus zwei Theilen Φ_0, welcher den elektrodynamischen, und Φ_1, welcher den elektrostatischen Wirkungen entspricht. Die ganze Grösse dieser Arbeit ist:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1, \tag{4}$$

$$\Phi_0 = \tfrac{1}{2}A^2\int(Uu + Vv + Ww)\,dx\,.\,dy\,.\,dz, \tag{4a}$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{8\pi}\int\varphi\left(\frac{d\varphi}{dN} - \frac{d\varphi_1}{dN}\right)d\Omega - \frac{1}{8\pi}\int\varphi\,.\,\Delta\varphi\,.\,dx\,.\,dy\,.\,dz. \tag{4b}$$

Durch partielle Integration ist dieser letztere Werth, wie bekannt, auf die Form zu bringen:

$$\Phi_1 = \frac{1}{8\pi}\int\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right] dx \,.\, dy \,.\, dz, \tag{4c}$$

und ist also nothwendig positiv.

In dem Werthe von Φ_0 ersetzen wir zunächst u, v, w durch die Werthe dieser Grössen in (3) und (I a) und erhalten:

$$\Phi_0 = -\frac{A^2}{8\pi}\int\Big\{U \,.\, \Delta U + V \,.\, \Delta V + W \,.\, \Delta W$$

$$-(1-k)\left[U\frac{d^2\varphi}{dx\,.\,dt} + V\frac{d^2\varphi}{dy\,.\,dt} + W\frac{d^2\varphi}{dz\,.\,dt}\right]\Big\} dx \,.\, dy \,.\, dz.$$

Wenn man hier partiell integrirt mit Berücksichtigung der Gleichungen (III), (IV) und (V), so erhält man:

$$\Phi_0 = \frac{A^2}{8\pi}\int\left\{\Sigma\left[\left(\frac{dU_m}{dx_n}\right)^2\right] + \frac{1-k}{k}\left[\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz}\right]^2\right\} dx \,.\, dy \,.\, dz.$$

Hierin bezeichnet U_m irgend eine von den Grössen U, V, W, und x_n irgend eine von den Coordinaten x, y, z.

Wenn man berücksichtigt, wie sich aus (III) und (IV) durch partielle Integration ergiebt, dass:

$$\int\left(\frac{dU}{dy}\cdot\frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dx}\cdot\frac{dV}{dy}\right) dx \,.\, dy \,.\, dz = 0,$$

so verwandelt sich der letzte Ausdruck in:

$$\Phi_0 = \frac{A^2}{8\pi}\int\left\{\Sigma\left[\left(\frac{dU_m}{dx_n} - \frac{dU_n}{dx_m}\right)^2\right] + k\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\} dx \,.\, dy \,.\, dz. \tag{4d}$$

Durch die in (4c) und (4d) gegebenen Werthe von Φ_1 und Φ_0 ergiebt sich, dass beide nothwendig positiv sind, wenn k einen positiven Werth hat, oder gleich Null ist. Wenn aber k einen negativen Werth hat, so kann das Arbeitsäquivalent der elektrischen Bewegung negativ, also kleiner als im Gleichgewichts- 87
zustande werden. Es wäre alsdann der Zustand der Ruhe nicht ein Minimum der Arbeit, also das Gleichgewicht in diesem Zustande nicht stabil.

Der Unterschied im Verlauf der Störungen des Gleichgewichtszustandes, je nachdem k positiv oder negativ ist, zeigt sich noch bestimmter, wenn wir die Gleichung der lebendigen

Kraft für die elektrischen Bewegungen aufstellen. Dieselbe wird uns auch dazu dienen, nachzuweisen, dass durch die Gleichungen (I) bis (V), wenn gleichzeitig der Anfangszustand gegeben ist, die elektrische Bewegung eindeutig bestimmt ist, vorausgesetzt, dass $k \geqq 0$.

Wenn nämlich zwei von einander verschiedene Lösungen der Gleichungen (I) bis (V) existirten, und in der einen:

$$U', \quad V', \quad W', \quad \varphi',$$

in der anderen:

$$U'', \quad V'', \quad W'', \quad \varphi''$$

die Werthe der in den Gleichungen vorkommenden Functionen wären, so würden auch ihre Unterschiede:

$$\left.\begin{array}{ll} U' - U'' = U, & V' - V'' = V, \\ W' - W'' = W, & \varphi' - \varphi'' = \varphi \end{array}\right\} \tag{4e}$$

gesetzt, den Gleichungen (I) bis (V) genügen, wenn in diesen $u_1 = v_1 = w_1 = 0$ gesetzt würde.

Um nun zu ermitteln, unter welchen Bedingungen eine solche Verschiedenheit der Lösungen möglich wäre, wollen wir den Werth von $d\Phi/dt$ mittels der Gleichungen (I) bis (V) bestimmen, wobei wir festsetzen, dass:

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0 \tag{5}$$

sei, also keine Bewegung der Elektricität ausserhalb der Leiter S vorkomme.

Aus den in § 1 aufgestellten Principien ist schon klar, dass der Werth sein muss:

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\int \varkappa (u^2 + v^2 + w^2)\, dS, \tag{5a}$$

da, wenn äussere inducirende Kräfte fehlen, die in der Leitung erzeugte Wärme, deren mechanisches Aequivalent rechts in Gleichung (5a) steht, nur erzeugt werden kann auf Kosten des Arbeitsäquivalents der elektrischen Vertheilung und Bewegung. In der That lässt sich die Gleichung (5a) verificiren aus den Gleichungen (3), (I) bis (V), (4) bis (4d) und (5). Am

einfachsten geschieht dies mittels der mit (I) identischen Gleichungen (3b).

$$\int \varkappa (u^2 + v^2 + w^2)\, dS = -\int \left(u \cdot \frac{d\varphi}{dx} + v \cdot \frac{d\varphi}{dy} + w \cdot \frac{d\varphi}{dz} \right) dS$$ 88

$$- A^2 \int \left(u \cdot \frac{dU}{dt} + v \cdot \frac{dV}{dt} + w \cdot \frac{dW}{dt} \right) dS.$$

Aus der in (1b) vorgeschriebenen Bildungsweise von U und der in (4a) vorgeschriebenen von Φ_0 ist leicht ersichtlich, dass:

$$A^2 \int \left(u \cdot \frac{dU}{dt} + v \cdot \frac{dV}{dt} + w \cdot \frac{dW}{dt} \right) dS$$

$$= A^2 \int \left(U \cdot \frac{du}{dt} + V \cdot \frac{dv}{dt} + W \cdot \frac{dw}{dt} \right) dS = \frac{d\Phi_0}{dt}.$$

Ferner ergiebt sich aus (4c) leicht:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int \left[\frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{d^2\varphi}{dx \, . \, dt} + \frac{d\varphi}{dy} \cdot \frac{d^2\varphi}{dy \, . \, dt} + \frac{d\varphi}{dz} \cdot \frac{d^2\varphi}{dz \, . \, dt} \right] dx \, . \, dy \, . \, dz$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int \varphi \cdot \left(\frac{d^2\varphi}{dN \, . \, dt} - \frac{d^2\varphi_1}{dN \, . \, dt} \right) d\Omega - \frac{1}{4\pi} \int \varphi \, . \, \Delta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) dx \, . \, dy \, . \, dz,$$

und wenn wir hierin die Grössen u, v, w mittels der Gleichungen (2) und (2a) einführen, und partiell integriren, ergiebt sich:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = \int \left(u \cdot \frac{d\varphi}{dx} + v \cdot \frac{d\varphi}{dy} + w \cdot \frac{d\varphi}{dz} \right) dx \, . \, dy \, . \, dz.$$

Da ausserhalb S nach Gleichung (5a) u, v, w überall Null sind, ist es einerlei, ob wir die Integration in diesem letzten Ausdruck nur auf den Raum S, oder auf den ganzen unendlichen Raum ausdehnen.

Diese Umformungen zeigen, dass die Gleichungen (I) bis (V) der Forderung des Gesetzes von der Erhaltung der Kraft, wie sie in (5a) aufgestellt ist, entsprechen.

Die Gleichung (5a) zeigt, dass die Grösse $d\Phi/dt$ nur einen negativen Werth haben kann, da das rechts stehende Integral eine Summe von lauter Quadraten ist, und $\varkappa$, der Widerstand, jedenfalls positiv.

A. Wenn $k \geqq 0$ ist, ist Φ nothwendig immer positiv, und kann nicht kleiner als Null werden. Ist es also in irgend einem Augenblicke der Bewegung gleich Null, so muss es von da ab fortdauernd gleich Null sein. Damit Φ aber Null sei,

müssen alle die positiven Quadrate, deren Summe es ist, gleich Null sein, also entsprechend (4), (4c) und (4d):

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

was, da φ im Unendlichen gleich Null sein muss, nur geschehen kann, wenn im ganzen Raume $\varphi = 0$, d. h. wenn gar keine freie Elektricität existirt.

89 Ferner, wenn wir (4d) gleich Null setzen, ergiebt sich:

$$\frac{dU}{dy} = \frac{dV}{dx}, \quad \frac{dV}{dz} = \frac{dW}{dy}, \quad \frac{dW}{dx} = \frac{dU}{dz},$$

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = 0.$$

Durch Differentiiren erhält man aus diesen Gleichungen:

$$\Delta U = \Delta V = \Delta W = 0,$$

und da ausserdem U, V, W und ihre ersten Differentialquotienten nirgends unstetig sein sollen, so folgt, dass im ganzen Raume:

$$U = V = W = 0.$$

Daraus folgt also entsprechend den Gleichungen (4e), dass, wenn im Anfang der Bewegung:

$$U' - U'' = V' - V'' = W' - W'' = \varphi' - \varphi'' = 0,$$

diese Differenzen fortdauernd gleich Null bleiben.

Wenn also $k \geqq 0$, und wenn für den Anfang der Bewegung die Werthe von U, V, W gegeben sind, so bestimmen die Gleichungen (I) bis (V) in Verbindung mit (3) die Bewegung der Elektricität vollständig.

Es folgt ferner daraus, dass, wenn wir für die Zeit $t < \tau$ und $t > \tau$ zwei verschiedene analytische Ausdrücke der Bewegung haben, diese eine einzige continuirliche Bewegung darstellen, wenn zur Zeit $t = \tau$ beide Ausdrucksformen überall im Raume gleiche Werthe von φ, U, V und W ergeben.

B. Wenn k negativ ist, so kann Φ negativ werden, und die Bewegung der Elektricität kommt nicht nothwendig zum Stillstand, wenn Φ gleich Null wird. Aber auch in diesem Falle muss, wenn äussere Einwirkungen fehlen, $d\Phi/dt$ nach Gleichung (5a) nothwendig immer einen negativen Werth

haben, und wenn also Φ einmal negativ geworden ist, so muss es zu immer grösseren und grösseren negativen Werthen fortschreiten. Damit Φ einen endlichen negativen Werth F haben könne, muss nothwendig der mit dem negativen k multiplicirte Theil seines Werthes:

$$\int\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 dx\,.\,dy\,.\,dz = \frac{1}{k^2}\int\left[\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}+\frac{dW}{dz}\right]^2 dx\,.\,dy\,.\,dz$$

grösser als $F/(-k)$ sein und bleiben.

Wenn φ überall endlich ist und bleibt, so muss $d\varphi/dt$ in endlichen Theilen des Raumes einen endlichen Werth haben, damit das vorstehende Integral einen endlichen Werth haben 90
könne. Wenn die leitenden Körper S endlich begrenzt sind, nimmt $d\varphi/dt$ in unendlicher Entfernung ab wie $1/r^2$, und die von unendlich entfernten Theilen des Raumes herrührenden Theile des Integrals werden also jedenfalls unendlich klein. Damit aber $d\varphi/dt$ endliche Werthe in endlicher Raumerstreckung habe, müssen endliche Geschwindigkeiten der Elektricität in endlichen Räumen, oder unendlich grosse Geschwindigkeiten in unendlich kleinen Räumen bestehen. Denn es ist:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\int\left[u\,.\,\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{r}\right)+v\,.\,\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{r}\right)+w\,.\,\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]d\xi\,.\,d\eta\,.\,d\zeta.$$

Wenn aber die Geschwindigkeiten fortdauernd in endlichen Räumen endliche Werthe haben, muss $d\Phi/dt$ nach Gleichung (5a) fortdauernd einen endlichen negativen Werth haben, und Φ also fortdauernd wachsen bis zu unendlicher negativer Grösse.

Daraus folgt, dass, wenn nicht $d\varphi/dt$, u, v oder w von vornherein an einzelnen Stellen unendliche Werthe haben, sie jedenfalls mit der Zeit zu unendlichen Werthen anwachsen müssen. Ist also bei negativem k die Grösse Φ nur einmal negativ geworden, so wird die entsprechende elektrische Bewegung sich fortwährend an Intensität steigern, wenn sie nicht von Anfang an in einzelnen Stellen unendlich ist.

Das bedeutet also, dass *bei negativen Werthen von k das Gleichgewicht der ruhenden Elektricität in leitenden Körpern ein labiles Gleichgewicht ist.*

Bewegungen, welche Φ negativ machen, sind in sehr mannigfacher Weise möglich. Man braucht nur anzunehmen, dass

in irgend einem Augenblick keine freie Elektricität existire, also $\varphi = 0$ sei, und dass ausserdem sei:

$$U = \frac{d\chi}{dx}, \quad V = \frac{d\chi}{dy}, \quad W = \frac{d\chi}{dz}.$$

Dann fallen alle positiven Theile von Φ weg, und nur der negative bleibt übrig. Die Function χ ist hierbei nur den Bedingungen unterworfen, dass nach den Gleichungen (I a) bis (V) und (5a) ausserhalb S:

$$\varDelta \varDelta \chi = 0,$$

und an den Grenzen von S die ersten und zweiten Differentialquotienten von χ continuirlich und in unendlicher Entfernung gleich Null seien. Es kann χ innerhalb S vollkommen beliebig gewählt werden, und ist dann für den Aussenraum bis auf eine willkürliche Constante bestimmt.

91 Unter diesen Umständen ist nun auch die für positive Werthe von k gezogene Folgerung nicht zulässig, dass die Gleichungen (I) bis (V) die Bewegung der Elektricität eindeutig bestimmen, wenn die Werthe U, V, W, φ für die Anfangszeit gegeben sind. Es kann sich nämlich zu der gegebenen Anfangsbewegung eine verschwindend kleine labile Bewegung gesellen, welche nach Verlauf einer gewissen Zeit endliche Werthe erhält.

Wohl aber kann auch für negative Werthe von k gezeigt werden, dass, wenn in zwei verschiedenen Integralen der Gleichungen (I) bis (V) sich die Grössen U, V, W, φ zu Anfang und zu Ende einer gewissen Zeit unendlich wenig von einander unterscheiden, die beiden Integrale auch während der ganzen Dauer dieser Zeit sich unendlich wenig von einander unterscheiden.

Denn für ihre Differenz gilt Gleichung (5a), und ist $d\Phi/dt$ fortdauernd negativ. Wenn also für ihre Differenz der Werth von Φ zu Anfang und zu Ende der betreffenden Zeitperiode verschwindend klein ist, so muss er während der ganzen Dauer dieser Periode verschwindend klein gewesen sein.

Wenn also auf einen elektrischen Leiter während einer gewissen endlichen Zeit inducirende Kräfte einwirken, und ein Integral der entsprechenden Bewegung gefunden wird, welches

die Werthe von U, V, W, φ für $t = -\infty$ und $t = +\infty$, gleich Null ergiebt, so giebt es keine zweite Lösung, die denselben Bedingungen genügte.

§ 5. Radiale Strömungen der Elektricität in einer leitenden Kugel.

Die Erörterungen des vorigen Paragraphen zeigen nur die Möglichkeit, dass unendlich fortschreitende Störungen des elektrischen Gleichgewichts eintreten könnten, wenn k einen negativen Werth hat; aber sie lassen noch dem Zweifel Raum, ob solche Störungen auch wirklich zu Stande kommen können bei denjenigen Methoden, elektrische Bewegungen hervorzurufen, welche uns bei Versuchen zu Gebote stehen.

Um zu zeigen, dass dies der Fall sei, wird es genügen, ein möglichst einfaches Beispiel zu behandeln, und ich wähle dazu radiale Bewegungen der Elektricität in einer Kugel, die hervorgebracht werden durch Verengerung und Erweiterung einer äusseren concentrischen, mit Elektricität geladenen Kugelschaale. In dieser Form wird zwar das wirkliche Experiment nicht leicht ausgeführt werden. Aber es ist zu bemerken, dass ein unserem Falle entsprechendes, von den Richtungen der 92
Radien unabhängiges Glied jedesmal vorkommen wird, wenn man die durch Annäherung eines elektrisirten Körpers in der Kugel hervorgerufene Bewegung nach Kugelfunctionen entwickelt. Denkt man sich nämlich alle die elektrischen Bewegungen in der Kugel superponirt (und ungestörte Superposition verschiedener Bewegungen ist möglich), welche dadurch entstehen würden, dass der gleiche elektrisirte Körper von allen möglichen verschiedenen Richtungen aus zur Kugel in gleicher Weise bewegt wird, so wird die Summe aller dieser Bewegungen auf den von uns zu behandelnden Fall führen, und es ist klar, dass die durch solche Superposition entstandene Gesammtbewegung kein mit der Zeit in das Unendliche wachsendes Glied enthalten kann, wenn nicht die ursprüngliche einzelne Bewegung ein solches enthält. Stellt sich also heraus, dass unser vorausgesetzter einfachster Fall eine labile Störung des elektrischen Gleichgewichts ergiebt, so folgt, dass diese auch stattfindet in jedem Falle, wo eine elektrische Masse

in gleicher Weise der leitenden Kugel genähert und von ihr entfernt worden ist, wie wir dies von der von uns angenommenen concentrischen elektrischen Schicht voraussetzen.

Wir setzen:

$$x = \varrho \cos \alpha, \quad y = \varrho \cos \beta, \quad z = \varrho \cos \gamma.$$

Der Radius der leitenden Kugel sei $\mathfrak{R}$; über eine grössere concentrische Kugelfläche von dem veränderlichen Radius R sei die elektrische Masse M gleichmässig ausgebreitet. Die elektrischen Strömungen sollen nur in Richtung des Radius geschehen; wir werden also setzen können:

$$u = \frac{d\chi}{dx}, \qquad v = \frac{d\chi}{dy}, \qquad w = \frac{d\chi}{dz}. \tag{6}$$

Da alles um den Mittelpunkt der Kugel symmetrisch ist, werden auch die Werthe der elektromotorischen Kräfte U, V, W von der Form sein:

$$U = \frac{d\Pi}{dx}, \qquad V = \frac{d\Pi}{dy}, \qquad W = \frac{d\Pi}{dz}, \tag{6a}$$

und φ wird wie χ und Π nur eine Function von ϱ und t sein.

Da die Herren W. Weber und Lorberg die Annahme gemacht haben, die Elektricität könne auch träge Masse haben, so will ich diese Annahme in diesem Paragraphen ebenfalls recipiren, und den linken Seiten der Bewegungsgleichungen (3b) noch entsprechende Glieder hinzusetzen; die träge Masse der elektrostatischen elektrischen Einheit werde mit μ bezeichnet. Die Gleichungen (3b) verschmelzen dann in eine Integralgleichung für das Innere der Kugel:

$$\mu \frac{d\chi}{dt} + \varkappa\chi = -\varphi - A^2 \frac{d\Pi}{dt}, \tag{6b}$$

93 und die Gleichungen (3) und (3a), die im ganzen Raume gelten, werden:

$$\Delta \Pi = (1-k)\frac{d\varphi}{dt} - 4\pi\chi, \tag{6c}$$

$$\Delta \Pi = -k\frac{d\varphi}{dt}, \tag{6d}$$

Die Gleichungen (6b) und (6c) treten hier an Stelle von je drei Gleichungen, die durch Differentiirung nach x, y und z

aus ihnen entstehen. Es ist beim Uebergang von den letzteren zu ihren beiden Integralgleichungen nicht nöthig, eine willkürliche Function der Zeit hinzuzufügen, da eine solche schon in Π und χ steckt, deren Differentialquotienten nach x, y, z genommen wir allein brauchen.

Die letzten beiden Gleichungen ergeben noch, wenn sie von einander subtrahirt werden:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 4\pi\chi. \tag{6e}$$

Die Gleichung (6d) ergiebt ferner, dass Π durch den ganzen Raum gleich der Potentialfunction der Dichtigkeit $(k/4\pi) \cdot d\varphi/dt$ sei. Dadurch ist Π ebenfalls bis auf eine willkürliche Function der Zeit, die keinen Einfluss auf die Lösung unserer Aufgabe hat, vollständig bestimmt, wenn φ gefunden ist.

Zur Bestimmung von φ im Innern der Kugel ergiebt sich zunächst aus der Gleichung (6b), wenn wir an ihr die Operation Δ ausführen, und die Werthe von Π und χ aus (6d) und (6e) substituiren:

$$\Delta\left\{\frac{\mu}{4\pi}\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\varkappa}{4\pi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} + \varphi\right\} = A^2 k \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{7}$$

Im äusseren Raume dagegen ist der Werth von φ nur abhängig von den Gesammtmengen der Elektricität $\mathfrak{M}$ auf der Kugel vom Radius $\mathfrak{R}$, M auf der vom Radius R.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Für } \mathfrak{R} < \varrho < R \text{ ist } \varphi = \dfrac{\mathfrak{M}}{\varrho} + \dfrac{M}{R} \text{ und } \dfrac{d\varphi}{dt} = -\dfrac{M}{R^2}\cdot\dfrac{dR}{dt}; \\ \text{für } \varrho > R \text{ ist } \varphi = \dfrac{\mathfrak{M} + M}{\varrho} \text{ und } \dfrac{d\varphi}{dt} = 0. \end{array}\right\} \tag{7a}$$

Was die Grenzbedingungen (III), (IV), (V) betrifft, so sind diese erfüllt, wenn Π die Potentialfunction von $(k/4\pi) \cdot d\varphi/dt$, und letztere Grösse überall continuirlich ist. Also die einzige Grenzbedingung ist, dass die aus der Gleichung (7) gefundene Function φ für $\varrho = \mathfrak{R}$ sei:

$$\varphi = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} + \frac{M}{R}. \tag{7b}$$

Ich bemerke hier gleich, dass für den Fall $k = 0$, wenn 91

wir mit e die Dichtigkeit der Elektricität bezeichnen, die Gleichung (7) ergiebt:

$$\mu \frac{d^2 e}{dt^2} + \varkappa \frac{de}{dt} + 4\pi e = 0,$$

woraus folgt:

$$e = B_0 e^{-n_0 t} + B_1 e^{-n_1 t},$$

wo n_0 und n_1 die beiden Wurzeln der Gleichung sind:

$$\mu n^2 - \varkappa n + 4\pi = 0.$$

Soll vor Einwirkung der äusseren Kräfte Ruhe bestehen, so muss $B_0 = B_1 = 0$ sein, folglich für alle Zeit $e = de/dt = 0$. Folglich tritt gar keine Bewegung ein, wenn $k = 0$.

Die im vorigen Paragraphen aufgestellten Sätze über den Werth des Arbeitsäquivalents der elektrischen Bewegung und die continuirliche Abnahme dieses Werthes bei einer durch äussere Kräfte nicht influirten Bewegung ändern sich in unserem Falle nur in so weit, als zu dem elektrostatischen und elektrodynamischen Arbeitsäquivalent noch die lebendige Kraft der bewegten Elektricität hinzukommt, deren Grösse ist:

$$\Phi_2 = \frac{\mu}{2}\int (u^2 + v^2 + w^2)\, dS = \frac{\mu}{32 \, . \, \pi^2}\int \left(\frac{d^2\varphi}{dt \, . \, d\varrho}\right)^2 dS,$$

die Integration über die ganze Kugel ausgedehnt.

Wenn man die Gleichung (7) mit $d\varphi/dt$ multiplicirt, über die ganze Ausdehnung der Kugel integrirt, und diese Integration partiell ausführt, beachtend, dass in diesem Falle an der Oberfläche der Kugel $d\varphi/dt = 0$ ist, so können wir der Bezeichnung des vorigen Paragraphen entsprechend setzen:

$$\tfrac{1}{2} A^2 k \int \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 dS + \frac{\mu}{8\pi}\int \left(\frac{d^2\varphi}{dt \, . \, d\varrho}\right)^2 dS + \tfrac{1}{2}\int \left(\frac{d\varphi}{d\varrho}\right)^2 dS = 4\pi \, . \, \Phi,$$

und erhalten dann das Resultat:

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\varkappa}{16\pi^2}\int \left(\frac{d^2\varphi}{dt \, . \, d\varrho}\right)^2 . \, dS.$$

Es entspricht diese Gleichung der Gleichung (5a) des vorigen Paragraphen, mit der durch Einführung der Grösse μ bedingten Modification, und es lassen sich dieselben Schlüsse betreffs der Stabilität des Gleichgewichts, der Eindeutigkeit der Lösungen, der Continuität zweier Bewegungen von verschiedenem analytischen Ausdrucke daraus ableiten.

Ablauf elektrischer Radialströme in der Kugel ohne äussere Einwirkung. 95

Um später die vollständigen Integrale der durch eine gegebene äussere Einwirkung hervorgerufenen Ströme finden zu können, müssen wir zuerst das vollständige Integral der Gleichung (7) mit der Grenzbedingung (7b) suchen für den Fall, dass:

$$\frac{dR}{dt} = 0. \tag{8}$$

Setzen wir innerhalb der Kugel:

$$\varphi = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} + \frac{M}{R} + \frac{B_{\mathfrak{a}}}{\varrho} \,.\, e^{n_{\mathfrak{a}} t} \,.\, \sin\left(\frac{\pi \mathfrak{a} \varrho}{\mathfrak{R}}\right), \tag{8a}$$

so ist Gleichung (7b) erfüllt, wenn $\mathfrak{a}$ eine ganze Zahl ist, und Gleichung (7), wenn:

$$-\frac{\pi^2 \mathfrak{a}^2}{\mathfrak{R}^2}\left\{\frac{\mu}{4\pi} \,.\, n_{\mathfrak{a}}^2 + \frac{\varkappa}{4\pi} \,.\, n_{\mathfrak{a}} + 1\right\} = A^2 \,.\, k \,.\, n_{\mathfrak{a}}^2, \tag{8b}$$

oder:

$$\frac{1}{n_{\mathfrak{a}}} = -\frac{\varkappa}{8\pi} \pm \sqrt{\left(\frac{\varkappa}{8\pi}\right)^2 - \frac{\mu}{4\pi} - k\left(\frac{A\mathfrak{R}}{\pi\mathfrak{a}}\right)^2}. \tag{8c}$$

Die beiden hier für $1/n_{\mathfrak{a}}$ gegebenen Werthe sind auch die Werthe für die Grösse:

$$n_{\mathfrak{a}}\left[\frac{\mu}{4\pi} + k\left(\frac{A\mathfrak{R}}{\pi\mathfrak{a}}\right)^2\right].$$

Ich bemerke dabei, dass ein complexer Werth für $\mathfrak{a}$ die Bedingungen nicht erfüllen kann, da ein solcher einen complexen auch für n ergeben würde, und dann nicht für jeden Werth von t die Gleichung (7b) zu erfüllen wäre.

Da $\varkappa$ und μ positive Grössen bedeuten, so hat $n_{\mathfrak{a}}$ Werthe, deren reeller Theil jedenfalls negativ ist, und einer zum Gleichgewichtszustand zurückkehrenden Bewegung entspricht, wenn k positiv ist.

Ist k dagegen negativ, so wird n ebenfalls für sehr grosse Werthe von $\mathfrak{a}$ negative reelle Theile haben. Wenn aber $\mathfrak{R}$ gross genug ist, dass für niedrige Werthe von $\mathfrak{a}$:

$$-k\left(\frac{A\mathfrak{R}}{\pi\mathfrak{a}}\right)^2 > \frac{\mu}{4\pi},$$

so wird von den beiden entsprechenden Werthen von $n_{\mathfrak{a}}$ einer

positiv werden, und einer das Gleichgewicht zerstörenden Bewegung entsprechen. Wenn $\mu = 0$ ist, wird dies für jeden Werth von $\mathfrak{a}$ der Fall sein. Hat μ einen gewissen positiven Werth, so wird jedenfalls $\mathfrak{R}$ so gross gedacht werden können, dass es der vorstehenden Ungleichung Genüge leistet. Da
90 übrigens die Constante μ so klein ist, dass ihr Einfluss durch keine bisher angestellten Versuche sich entdecken liess, so wird es sich dabei gar nicht um erhebliche Werthe von $\mathfrak{R}$ handeln. Hätte μ Werthe, welche neben der Grösse $A^2\mathfrak{R}^2$ in Betracht kämen, wenn $\mathfrak{R}$ auch nur mit den Dimensionen gewöhnlich gebrauchter Drahtspiralen vergleichbar wäre, so müssten solche Spiralen, die zwei neben einander laufende Fäden enthalten, einen merklichen Extracurrent auch dann geben, wenn beide Fäden in entgegengesetzter Richtung durchströmt werden. In diesem Falle würde es das durch die Grösse μ gemessene Beharrungsvermögen der Elektricität fast allein sein, was den Extracurrent in Gang erhielte. Jedenfalls ist aber der so entstehende Extracurrent verschwindend klein gegen denjenigen, welcher bei gleich gerichteter Durchströmung solcher Doppelspiralen entsteht, und dessen Grösse von dem mit A^2 multiplicirten Potential der ganzen Spirale, auf sich selbst genommen, abhängt.

Aus der Gleichung (8a) können wir ein vollständiges Integral der Gleichungen (7) und (7b) ableiten in der Form:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} + \frac{M}{R} + \varphi_0, \\ \varphi_0 &= \frac{1}{\varrho} \sum_{\mathfrak{a}=0}^{\mathfrak{a}=\infty} \left\{ [\mathrm{B}_{\mathfrak{a}} \cdot e^{n_{\mathfrak{a}} t} + \mathfrak{B}_{\mathfrak{a}} \cdot e^{\mathfrak{n}_{\mathfrak{a}} t}] \sin\left(\frac{\pi \mathfrak{a} \varrho}{\mathfrak{R}}\right) \right\}. \end{aligned}\right\} \quad (9$$

Darin sind $n_{\mathfrak{a}}$ und $\mathfrak{n}_{\mathfrak{a}}$ die beiden Werthe, welche Gleichung (8b) für den betreffenden Werth von $\mathfrak{a}$ ergiebt, $B_{\mathfrak{a}}$ und $\mathfrak{B}_{\mathfrak{a}}$ aber sind willkürliche Coëfficienten, welche so bestimmt werden können, dass φ und $d\varphi/dt$ für $t = 0$ willkürlich gegebene Functionen von ϱ im Innern der Kugel werden.

Wenn φ und $d\varphi/dt$ für die Zeit $t = 0$ gegeben sind, so ist in unserem Falle, wo

$$\frac{dU}{dy} = \frac{dV}{dx}, \quad \frac{dV}{dz} = \frac{dW}{dy}, \quad \frac{dW}{dx} = \frac{dU}{dz}.$$

der Anfangszustand vollständig bestimmt, da dann die Potentiale Φ_0 und Φ_1 nach (4c) und (4d) vollständig bestimmt sind, ebenso wie das von der lebendigen Kraft der elektrischen Bewegung abhängige Glied Φ_2 des Potentials, welches noch hinzukommt, wenn μ von Null verschieden ist. Es können also zwei Bewegungen, für welche φ und $d\varphi/dt$ überall im Anfang gleich ist, sich, wenigstens wenn k positiv ist, überhaupt nicht von einander unterscheiden. Ebensowenig können sich bei negativem Werthe von k zwei Bewegungen von einander unterscheiden, bei denen zur Zeit $t=0$ die Functionen φ und $d\varphi/dt$ 97
überall die gleichen Werthe haben, und die beide nach Ablauf unendlicher Zeit:

$$\varphi = \text{Const.},$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = 0$$

machen. Zu dem Ende müssen in der Reihe (9) nur die Glieder bewahrt bleiben, welche hinreichend grosse Werthe von $\mathfrak{a}$ enthalten, dass $n_\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{n}_\mathfrak{a}$ nur negative reelle Theile enthalten.

Die Fälle, wo $n_\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{n}_\mathfrak{a}$ positive reelle Theile enthalten, werden wir erst am Schlusse dieses Paragraphen besonders besprechen.

Elektrische Radialströme bei bestimmter äusserer Erregungsweise.

Es sei λ irgend eine Constante, für welche wir nur, um die Behandlung von Ausnahmefällen zu umgehen, festsetzen, dass $\sin(\lambda\mathfrak{R})$ nicht gleich Null sein soll. Es seien ferner ν_0 und ν_1 die Werthe von n aus der Gleichung:

$$-\lambda^2\left\{\frac{\mu}{4\pi}n^2 + \frac{\varkappa}{4\pi}n + 1\right\} = A^2 . k . n^2, \tag{9a}$$

und es werde gesetzt:

$$\frac{M}{R} = \frac{C}{\nu_1 - \nu_0}\left[\nu_1 . e^{\nu_0 t} - \nu_0 . e^{\nu_1 t}\right] + C_0, \tag{9b}$$

so ist innerhalb der Kugel:

$$\varphi = \frac{C}{\nu_1 - \nu_0} \cdot \frac{\mathfrak{R} . \sin(\lambda\varrho)}{\varrho . \sin(\lambda\mathfrak{R})}\left[\nu_1 . e^{\nu_0 t} - \nu_0 . e^{\nu_1 t}\right] + \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} + \varphi_0 + C_0, \tag{9c}$$

wo unter φ_0 die in der Gleichung (9) enthaltene unendliche Reihe zu verstehen ist.

Dass φ ein Integral der Gleichung (7) mit Einhaltung der Grenzbedingung (7b) ist, geht aus dem Bisherigen hervor. Die Coëfficienten $B_\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{B}_\mathfrak{a}$ der Reihe φ_0 werden wir nun nach Fourier's Methode so bestimmen können, das für die Zeit $t = 0$:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= C + \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} + C_0, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{9d}$$

wird. Zu dem Ende muss sein:

$$\left.\begin{aligned} C\left[1 - \frac{\mathfrak{R}\,.\sin(\lambda\varrho)}{\varrho\,.\sin(\lambda\mathfrak{R})}\right] &= \frac{1}{\varrho}\sum_{\mathfrak{a}=0}^{\mathfrak{a}=\infty}\left\{(B_\mathfrak{a} + \mathfrak{B}_\mathfrak{a})\sin\left(\frac{\pi\mathfrak{a}\varrho}{\mathfrak{R}}\right)\right\}, \\ 0 &= n_\mathfrak{a}\,.\,B_\mathfrak{a} + \mathfrak{n}_\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{B}_\mathfrak{a}, \end{aligned}\right\} \tag{9e}$$

98 was nach bekannten Rechnungsmethoden ergiebt:

$$\left.\begin{aligned} B_\mathfrak{a} + \mathfrak{B}_\mathfrak{a} &= (-1)^{\mathfrak{a}+1}\,.\,\frac{2\mathfrak{R}^3\lambda^2}{\pi\mathfrak{a}(\lambda^2\mathfrak{R}^2 - \pi^2\mathfrak{a}^2)}, \\ B_\mathfrak{a} &= \frac{-\mathfrak{n}_\mathfrak{a}}{n_\mathfrak{a} - \mathfrak{n}_\mathfrak{a}}\,[B_\mathfrak{a} + \mathfrak{B}_\mathfrak{a}], \\ \mathfrak{B}_\mathfrak{a} &= \frac{n_\mathfrak{a}}{n_\mathfrak{a} - \mathfrak{n}_\mathfrak{a}}\,[B_\mathfrak{a} + \mathfrak{B}_\mathfrak{a}]. \end{aligned}\right\} \tag{9f}$$

Da die Coëfficienten B und $\mathfrak{B}$ für hohe Werthe von $\mathfrak{a}$ abnehmen, wie $\mathfrak{a}^{-3}$, so convergirt die Reihe für φ_0 und hat einen eindeutigen Werth für $t = 0$ und alle positiven Werthe von t, wenn nicht eine von den Grössen n_∞ oder $\mathfrak{n}_\infty$ positiv unendlich wird, was geschieht, wenn gleichzeitig $\mu = 0$ und k negativ ist. Ebenso sind die Reihen für $d\varphi/dt$ und für $d\varphi/d\varrho$, wenn $t \geqq 0$, und die Reihe für $d^2\varphi/dt.d\varrho$, wenn ausserdem auch $\mu = 0$, convergent und eindeutig.

Unter diesen Umständen können wir den Grössen φ und $d\varphi/dt$ die ihnen in den Gleichungen (9d) für die Zeit $t = 0$ und den ganzen Raum beigelegten Werthe auch für alle negativen Werthe von t beilegen, ohne die Continuität der Bewegung zu stören.

Das entscheidende Kennzeichen für die Möglichkeit, zwei Bewegungen von verschiedenem analytischen Ausdrucke in einem gegebenen Zeitpunkte aneinander zu schliessen, ist, wie oben gezeigt wurde, dass die den gesammten Arbeitswerth ihrer Differenz messende Function Φ gleich Null sei. Das ist aber im vorliegenden Beispiele der Fall, da die in dem Werthe von Φ vorkommenden Werthe von $d\varphi/d\varrho$, $d\varphi/dt$, und eventualiter auch $d^2\varphi/dt.d\varrho$, für $t=0$ einerseits durch convergente Reihen gegeben sind, deren Werthe andererseits mit den Werthen der Gleichungen (9d) zusammenfallen.

Dadurch ist also diejenige elektrische Bewegung in der Kugel gegeben, welche nach vorausgehendem Gleichgewichtszustande der Elektricität erregt wird, wenn von der Zeit $t=0$ ab die äussere Kugelschicht eine solche Bewegung ausführt, dass die elektrische Potentialfunction in dem Raume zwischen den beiden Kugeln die durch Gleichung (9b) gegebene Function der Zeit wird.

So oft entweder μ von Null verschieden ist, oder k positiv ist, wird es immer möglich sein, für λ einen so hohen Werth zu nehmen, dass ν_0 und ν_1 reelle negative Grössen sind, und also die Bewegung der äusseren Kugel eine vorübergehende ist. Dies werde im Folgenden immer angenommen.

Da man übrigens beliebig viele verschiedene Bewegungen
derselben Art, die zu verschiedener Zeit anfangen und ver- 99
schiedene Intensität haben, in der Kugel superponiren kann, so erhalten wir die Lösung einer allgemeineren Form der letztbehandelten Aufgabe, wenn wir mit $\mathfrak{F}$ die elektrische Potentialfunction bezeichnen, die Bezeichnung φ_t dagegen für die in den Gleichungen (9) bis (9f) gegebene Function φ der Zeit beibehalten und setzen:

$$\mathfrak{F} = \int_t^\infty \varphi_{(-\infty)} . \psi_\tau . d\tau + \int_{-\infty}^t \varphi_{(t-\tau)} . \psi_\tau . d\tau. \qquad (10)$$

Darin ist unter ψ_τ eine willkürliche Function von τ verstanden, von der wir nur voraussetzen, dass das Integral $\int \psi_\tau . d\tau$, zwischen welchen Grenzen man es auch nehme, immer endlich sei. Unter $\varphi_{(-\infty)}$ dagegen ist der constante Werth verstanden,

den in den Gleichungen (9) bis (9f) das φ_t für negative Werthe von t hat:

$$\varphi_{(-\infty)} = C + \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} + C_0.$$

Zu bemerken ist, dass für den Raum zwischen beiden Kugelflächen bei der in Gleichung (10) angezeigten Integration immer nur die Werthe von φ zu nehmen sind, die diesem Zwischenraume entsprechen, auch wenn R zeitweilig kleiner gewesen wäre, als das entsprechende ϱ.

Der Werth von φ ist eine Summe von Theilen, die theils wie $(\mathfrak{M}/\varrho + C_0)$ in aller Zeit unverändert bleiben, und deshalb in der Gleichung (10) nur eine Constante zum Werthe von $\mathfrak{F}$ hinzufügen, theils aber auch veränderlich sind.

Zunächst wollen wir berechnen, welcher Art von Bewegung der äusseren Kugelfläche die in Gleichung (10) dargestellte Bewegung der Elektricität angehört, und dazu den Werth von $\mathfrak{F}$ für den Raum zwischen $\mathfrak{R}$ und R berechnen. Der veränderliche Theil von φ ist hier das Glied $M/R - C_0$, was wir als Function der Zeit mit ε_t bezeichnen wollen. Es hat aber für negative Werthe von $t - \tau$ die Grösse $\varepsilon_{t-\tau}$ den constanten Werth C, und für positive Werthe von $t - \tau$ ist entsprechend der Gleichung (9b):

$$\varepsilon_{t-\tau} = \frac{C}{\nu_1 - \nu_0}\left[\nu_1 \cdot e^{\nu_0 t} - \nu_0 \cdot e^{\nu_1 t}\right]. \qquad (10a)$$

Diese Grösse genügt, wie leicht zu sehen, der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - (\nu_0 + \nu_1)\frac{d\varphi}{dt} + \nu_0 \nu_1 \varphi = 0. \qquad (10b)$$

Bezeichnen wir nun den entsprechenden veränderlichen Theil von $\mathfrak{F}$ mit E, indem wir setzen:

100 $$\mathrm{E} = C\int_t^{\infty} \psi_\tau \cdot d\tau + \int_{-\infty}^{t} \varepsilon_{t-\tau} \cdot \psi_\tau \cdot d\tau. \qquad (10c)$$

Der oben gemachten Annahme gemäss sind ν_0 und ν_1 negative reelle Grössen, und ψ_τ immer endlich, folglich ist für $\tau = -\infty$:

$$\varepsilon_{t-\tau} \cdot \psi_\tau = 0,$$

ferner ist für $t = \tau$:

$$\varepsilon_{t-\tau} = C \text{ und } \frac{d\varepsilon_{t-\tau}}{dt} = 0 .$$

Wenn wir mit Berücksichtigung davon die Differentialquotienten von E bilden, so erhalten wir:

$$\frac{d\mathrm{E}}{dt} = \int_{-\infty}^{t} \frac{d\varepsilon_{t-\tau}}{dt} \cdot \psi_\tau \cdot d\tau ,$$

$$\frac{d^2\mathrm{E}}{dt^2} = \int_{-\infty}^{t} \frac{d^2\varepsilon_{t-\tau}}{dt^2} \cdot \psi_\tau \cdot d\tau ,$$

und indem wir diese Ausdrücke und (10c) entsprechend der Gleichung (10b) zusammenfügen, erhalten wir:

$$\frac{d^2\mathrm{E}}{dt^2} - (\nu_0 + \nu_1)\frac{d\mathrm{E}}{dt} + \nu_0 . \nu_1 \mathrm{E} = \nu_0 . \nu_1 . C . \int_{t}^{\infty} \psi_\tau . d\tau . \qquad (10\mathrm{d})$$

Wenn wir also E als Function der Zeit als gegeben ansehen, so können wir mittels der letzten Gleichung daraus den entsprechenden Werth von ψ herleiten. Eine nochmalige Differentiation nach t giebt diesen Werth nämlich unmittelbar. Die Function E ist nur der Bedingung unterworfen, dass sie selbst, sowie $d\mathrm{E}/dt$ und $d^2\mathrm{E}/dt^2$ zu jeder Zeit endlich sein müssen, weil sie sonst nicht in Gestalt der oben gegebenen Integrale unzweideutig auszudrücken sind. Nun ist für die in Gleichung (10) dargestellte Bewegung:

$$\frac{M}{R} - C_0 = \mathrm{E} .$$

Folglich ist auch M/R eine bis auf die Endlichkeit der ersten beiden Differentialquotienten willkürliche Function der Zeit, und die Gleichung (10) stellt die elektrische Bewegung in der leitenden Kugel für jede beliebige Function der äusseren elektrischen Schicht mit continuirlich sich ändernder Geschwindigkeit dar.

Ausgeschlossen sind jedoch, wie mehrfach hervorgehoben ist, die Fälle, wo $\mu = 0$ und k negativ ist, in denen die Reihe (9c) nicht convergirt.

101 Ist k positiv, so ist die Lösung die einzige mögliche, wie aus den Betrachtungen des vorigen Paragraphen und den im Anfange des jetzigen dazu gegebenen Zusätzen hervorgeht. Wird von einer gewissen Zeit ab E constant, und also $\psi_t = 0$, so bleiben nur Bewegungen übrig, die die Zeit mit Factoren von negativen reellen Theilen in den Exponenten haben, und daher zum Gleichgewichtszustand zurückkehren.

Wenn dagegen k negativ ist, und μ einen positiven endlichen Werth hat, werden bei gewisser Grösse der leitenden Kugel eine Anzahl Exponenten $n_\mathfrak{a}$, welche den unterhalb einer gewissen Grenze liegenden Werthen von $\mathfrak{a}$ entsprechen, positiv sein, und schwellende Bewegungen darstellen, die nie zum Gleichgewicht zurückkehren. Das im Ausdruck für φ Gleichung (9) vorkommende Glied:

$$B_\mathfrak{a} e^{n_\mathfrak{a} t}$$

giebt laut Gleichung (10) im Werthe von $\mathfrak{F}$ ein Glied:

$$B_\mathfrak{a} e^{n_\mathfrak{a} t} \int_{t_0}^{t_1} \psi_\tau \,.\, e^{-n_\mathfrak{a} \tau} \,.\, d\tau,$$

wenn t_0 und t_1 die Grenzen bezeichnen, zwischen denen ψ_t von Null verschieden ist. Da ψ_t innerhalb dieser Grenzen vollkommen willkürlich ist, wenn sein Integral nur endlich bleibt, so wird das Integral in dem letztgenannten Ausdruck nicht nothwendig gleich Null sein, und diese Glieder, welche schwellende Bewegungen darstellen, werden im Werthe von $\mathfrak{F}$ für Zeiten $t > t_1$ nicht zu fehlen brauchen.

Es könnte nun fraglich erscheinen, ob der gefundene Werth von $\mathfrak{F}$, der solche Glieder mit ansteigender Bewegung enthält, deren Summe mit S bezeichnet werde, das einzige Integral der Bewegungsgleichungen ist, welches den vorgeschriebenen Werthen von M/R und einem anfänglichen Zustande elektrischen Gleichgewichtes entspricht, und ob nicht ein zweites davon verschiedenes Integral existire, welches keine Glieder von schwellender Bewegung enthielte.

Um diesen Zweifel zu beseitigen, beachte man, dass

$$\mathfrak{F} - S$$

ebenfalls ein Integral derselben Bewegungsgleichungen ist, welches denselben Werthen von M/R entspricht, wie $\mathfrak{F}$, welches für $t = -\infty$ wie für $t = +\infty$ sich einem endlichen constanten Werthe nähert. Dieses letztere Integral hat aber einen anderen Anfangszustand. Nämlich vor der Einwirkung der Aenderungen von R besteht schon die durch die Summe S dargestellte schwellende Bewegung. Sie wird durch die äussere Einwirkung 102
vernichtet, und geht in eine abschwellende über, die den Gleichgewichtszustand erreicht. Im vorigen Paragraphen ist aber gezeigt worden, dass nur eine einzige solche Bewegung existiren kann, die unter Einwirkung gegebener äusserer Kräfte von einem gegebenen Zustande unendlich kleiner Bewegung zu einem Endzustand unendlich kleiner Bewegung führt. Also ist das Integral $\mathfrak{F} - S$ das einzige dieser Art, und es giebt kein anderes, welches bei den gegebenen Kräften aus anfänglichem in endliches Gleichgewicht führt.

Untersuchung des Falles, wo k negativ und $\mu = 0$. In diesem Falle giebt es keinen Werth von $\mathfrak{a}$ oder λ, für welchen nicht einer der beiden Werthe von $n_{\mathfrak{a}}$ oder ν reell positiv würde. Um daher eine dauernd endlich bleibende Bewegung zu erhalten, muss man die anfängliche Bewegung durch die schwellenden, die endliche durch die abschwellenden Glieder zusammensetzen.

Wir wollen mit $n_{\mathfrak{a}}$ und mit ν_0 die positiven Werthe, mit $\mathfrak{n}_{\mathfrak{a}}$ und ν_1 die negativen der Exponenten bezeichnen. Die Gleichungen (8b) und (9a) werden dabei:

$$\left.\begin{aligned} A^2 k n_{\mathfrak{a}}^2 + \frac{\pi^2 \mathfrak{a}^2}{\Re^2}\left\{\frac{\varkappa}{4\pi} n_{\mathfrak{a}} + 1\right\} &= 0, \\ A^2 k \nu^2 + \lambda^2 \left\{\frac{\varkappa}{4\pi}\nu + 1\right\} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Man setze:

1) für negative Werthe von t:

$$\frac{M}{R} = C.\nu_1.e^{\nu_0 t} + C.\nu_0, \tag{11a}$$

und für $\Re < \varrho < R$:

$$\varphi = \frac{M}{R} + \frac{\mathfrak{M}}{\varrho}, \tag{11b}$$

für $\varrho < \mathfrak{R}$:

$$\left.\begin{aligned}\varphi = C\frac{\mathfrak{R} . \sin(\lambda\varrho)}{\varrho . \sin(\lambda\mathfrak{R})} . \nu_1 . e^{\nu_0 t} + C . \nu_0 + \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} \\ + \frac{1}{\varrho}\Sigma\left\{B_\mathfrak{a} . e^{n_\mathfrak{a} t} . \sin\left(\frac{\pi\mathfrak{a}\varrho}{\mathfrak{R}}\right)\right\};\end{aligned}\right\} \quad (11c)$$

2) für positive Werthe von t:

$$\frac{M}{R} = C . \nu_1 + C . \nu_0 . e^{\nu_1 t}, \quad (11d)$$

und für $\mathfrak{R} < \varrho < \mathfrak{R}$:

$$\varphi = \frac{\mathfrak{M}}{\varrho} + \frac{M}{R}, \quad (11b)$$

dagegen für $\varrho < R$:

$$\left.\begin{aligned}\varphi = C . \nu_1 + C . \nu_0 . \frac{\mathfrak{R} . \sin(\lambda\varrho)}{\varrho . \sin(\lambda\mathfrak{R})} . e^{\nu_1 t} \\ + \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}} - \frac{1}{\varrho}\Sigma\left\{\mathfrak{B}_\mathfrak{a} . e^{\mathfrak{n}_\mathfrak{a} t} . \sin\left(\frac{\pi\mathfrak{a}\varrho}{\mathfrak{R}}\right)\right\}.\end{aligned}\right\} \quad (11e)$$

103 Die Continuität der Bewegung zur Zeit $t = 0$ ist hergestellt, wenn die Werthe von φ und $d\varphi/dt$ übereinstimmen, also:

$$\left.\begin{aligned}0 = C(\nu_0 - \nu_1)\left[1 - \frac{\mathfrak{R} . \sin(\lambda\varrho)}{\varrho . \sin(\lambda\mathfrak{R})}\right] + \frac{1}{\varrho}\Sigma\left\{(B_\mathfrak{a} + \mathfrak{B}_\mathfrak{a}) . \sin\left(\frac{\pi\mathfrak{a}\varrho}{\mathfrak{R}}\right)\right\} \\ \text{und:} \qquad n_\mathfrak{a} B_\mathfrak{a} + \mathfrak{n}_\mathfrak{a}\mathfrak{B}_\mathfrak{a} = 0.\end{aligned}\right\} \quad (11f)$$

Es sind dies Gleichungen von der Form wie (9e) und finden ebenso ihre Lösung.

So ist zunächst eine immer endlich bleibende Lösung für die eine in den Gleichungen (11a) und (11d) vorgeschriebene Bewegung der äusseren elektrischen Schicht gewonnen. Aus dieser kann man wieder andere Lösungen für andere äussere Kräfte durch Superposition zusammensetzen.

Es ist ebenso, wie in dem allgemeineren Falle, wo μ nicht gleich Null war, der Beweis zu führen, dass durch solche Superposition jede beliebige Art der Bewegung der äusseren Kugel, bei der die Geschwindigkeit sich nur nicht sprungweise ändert, darzustellen ist.

Die durch eine solche Lösung dargestellte Bewegung ist eine, die immer endlich bleibt, und zur Zeit $t = -\infty$ wie zur

Zeit $t = +\infty$ unendlich wenig vom Gleichgewichtszustande verschieden ist.

Da es für dieselben gegebenen Werthe von M/R keine zweite derselben Art geben kann, so folgt, dass im allgemeinen, wenn vor Beginn der Bewegung der Masse M Ruhe geherrscht hat, eine dauernd fortschreitende Störung des Gleichgewichtes in der Kugel erregt werden muss.

Ausnahmen hiervon können bei diesen und den vorigen Fällen, wo $k < 0 < \mu$, nur bei bestimmten Bewegungsweisen eintreten, wenn nämlich für jedes positive $n_\mathfrak{a}$:

$$\int \psi_\tau \,.\, e^{-n_\mathfrak{a} \tau} \, d\tau = 0\,, \tag{11g}$$

dies Integral zwischen den Grenzen genommen, zwischen welchen ψ_τ von Null unterschieden ist.

Für eine endliche Anzahl von Werthen von $\mathfrak{a}$ lässt sich diese Gleichung offenbar erfüllen, wenn man über entsprechend viele Constanten in dem Ausdrucke für ψ verfügen kann.

Da aber ψ_τ ganz willkürlich zwischen beliebigen Grenzen bestimmt werden kann, und nur der Bedingung unterworfen ist, dass

$$\int \psi_\tau \,.\, d\tau\,,$$

zwischen beliebigen Grenzen genommen, immer endlich bleibt, 104
so werden die Gleichungen (11g) im allgemeinen nicht erfüllt sein.

§ 6. Ueber den Einfluss der Constante k bei ausführbaren Versuchen.

Die Grössen U, V, W in den Bewegungsgleichungen (3b) hängen nach ihrer in (1d) gegebenen Definition von der Constante k ab. Um die Theile derselben, die davon abhängen, zu trennen von denjenigen, die von k unabhängig sind, führen wir die Bezeichnung ein:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{U} &= U + \frac{k}{2}\,\frac{d\Psi}{dx}\,, \\ \mathfrak{V} &= V + \frac{k}{2}\,\frac{d\Psi}{dy}\,, \\ \mathfrak{W} &= W + \frac{k}{2}\,\frac{d\Psi}{dz}\,, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

wo unter Ψ die in der Gleichung (2c) definirte Function zu verstehen ist, und nach (2d):

$$\Delta \Psi = 2 \frac{d\varphi}{dt}. \tag{2d}$$

Ψ selbst, wie seine ersten und zweiten Differentialcoëfficienten, nach den Coordinaten genommen, sind an den mit Elektricität belegten Flächen continuirlich.

Wir setzen ferner in diesem Paragraphen voraus, dass die Abhängigkeit der behandelten Functionen von der Zeit nur dadurch gegeben sei, dass sie alle den Factor e^{nt} enthalten. Wenn n complex oder imaginär ist, sind schliesslich in der Lösung nur die reellen Theile der betreffenden Functionen zu nehmen. Das System der Gleichung (I) bis (V) wird unter diesen Umständen:

Im Innern der Leiter:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\varkappa}{4\pi}\cdot\Delta\mathfrak{U} - A^2.n.\mathfrak{U} &= \left(1+\frac{\varkappa n}{4\pi}\right)\cdot\frac{d\varphi}{dx} - A^2\cdot\frac{kn}{2}\cdot\frac{d\Psi}{dx},\\
\frac{\varkappa}{4\pi}\cdot\Delta\mathfrak{V} - A^2.n.\mathfrak{V} &= \left(1+\frac{\varkappa n}{4\pi}\right)\cdot\frac{d\varphi}{dy} - A^2\cdot\frac{kn}{2}\cdot\frac{d\Psi}{dy},\\
\frac{\varkappa}{4\pi}\cdot\Delta\mathfrak{W} - A^2.n.\mathfrak{W} &= \left(1+\frac{\varkappa n}{4\pi}\right)\cdot\frac{d\varphi}{dz} - A^2\cdot\frac{kn}{2}\cdot\frac{d\Psi}{dz}.
\end{aligned}\right\} \tag{12a}$$

Ferner im äusseren Raume:

105
$$\left.\begin{aligned}
\Delta\mathfrak{U}_1 - n.\frac{d\varphi_1}{dx} &= -4\pi.u_1,\\
\Delta\mathfrak{V}_1 - n.\frac{d\varphi_1}{dy} &= -4\pi.v_1,\\
\Delta\mathfrak{W}_1 - n.\frac{d\varphi_1}{dz} &= -4\pi.w_1.
\end{aligned}\right\} \tag{12b}$$

Im ganzen Raume:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\mathfrak{U}}{dx} + \frac{d\mathfrak{V}}{dy} + \frac{d\mathfrak{W}}{dz} &= 0,\\
\frac{d\mathfrak{U}_1}{dx} + \frac{d\mathfrak{V}_1}{dy} + \frac{d\mathfrak{W}_1}{dz} &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{12c}$$

An den mit Elektricität belegten Flächen:

$$\mathfrak{U} - \mathfrak{U}_1 = \mathfrak{V} - \mathfrak{V}_1 = \mathfrak{W} - \mathfrak{W}_1 = \varphi - \varphi_1 = 0, \tag{12d}$$

$$\frac{d\mathfrak{U}}{dN} - \frac{d\mathfrak{U}_1}{dN} = \frac{d\mathfrak{V}}{dN} - \frac{d\mathfrak{V}_1}{dN} = \frac{d\mathfrak{W}}{dN} - \frac{d\mathfrak{W}_1}{dN} = 0. \tag{12e}$$

In unendlicher Entfernung:

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{V} = \mathfrak{W} = \varphi = \Psi = 0.$$

In diesem ganzen Systeme von Gleichungen kommt k nur noch als Factor der Function Ψ in den Gleichungen (12a) vor. Wir werden also zu untersuchen haben, wann diese k enthaltenden Glieder merklichen Einfluss auf die Lösung der Aufgabe erhalten können, wann nicht.

Mit Berücksichtigung der Gleichungen (2d) und (12c) folgt aus denen (12a):

$$0 = \left(\frac{n\varkappa}{4\pi} + 1\right) \Delta\varphi - A^2 k n^2 \varphi, \tag{12f}$$

und ein particuläres Integral dieser Gleichung ist:

$$\varphi = \frac{B}{\varrho} e^{l\varrho + nt}, \tag{12g}$$

wo $\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist, und:

$$l^2 = \frac{4\pi A^2 k n^2}{\varkappa n + 4\pi}. \tag{12g*}$$

Bei wechselnden Werthen von $\varkappa$ erreicht der Modulus von l seinen höchsten Werth, wenn $\varkappa = 0$. Dann wird:

$$l = n A \sqrt{k},$$

und also bei imaginärem n die Grösse $1/A\sqrt{k}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der durch die Gleichung (12g) dargestellten Wellen. Wenn $\varkappa$ nicht gleich Null ist, ist die Fortpflan-
zungsgeschwindigkeit kleiner und die Fortpflanzung mit Ab- 106
sorption der Wellen verbunden. Uebrigens ist $\varkappa n$ gegen 4π verschwindend klein im Kupfer, selbst wenn die Schwingungsperiode ein Milliontheil einer Secunde ist.

Wenn wir nun die letzten beiden Glieder in jeder der Gleichungen (12a) der Grösse nach vergleichen, so ist:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\int E \, . \, \frac{x-\xi}{r^3} \, . \, d\xi \, . \, d\eta \, . \, d\zeta, \tag{12h}$$

$$\frac{A^2 k n}{4\pi + \varkappa n} \, . \, 2\pi \frac{d\Psi}{dx} = \tfrac{1}{2} \int E \, . \, \frac{x-\xi}{r^3} \, . \, l^2 \, . \, r^2 \, . \, d\xi \, . \, d\eta \, . \, d\zeta. \tag{12i}$$

So oft nun $\frac{1}{2} l^2 r^2$ für diejenigen Werthe von r, welche zwischen den Punkten x, y, z des Körpers und den Orten ξ, η, ζ

der beweglichen elektrischen Massen vorkommen, verschwindend klein ist, wird im Allgemeinen auch der mit k multiplicirte Ausdruck verschwindend klein gegen die Differentialquotienten von φ sein, zu denen er summirt ist.

Es ist aber $l/2\pi$ die Wellenlänge der Oscillationen, deren Schwingungsdauer $n/2\pi$ ist, und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Oscillationen ist gleich der des Lichts, dividirt durch $\sqrt{k}$. Wenn also k wie in Herrn F. E. Neumann's Annahme gleich Eins ist, oder wenigstens nicht unverhältnissmässig viel grösser als Eins, so werden im Allgemeinen bei Versuchen an irdischen Leitern die Bewegungen der Elektricität nicht merklich anders ausfallen, als wenn $k = 0$ wäre, wenn nicht eben Dimensionen der Leiter benutzt und so kleine Zeittheile beobachtet werden können, dass sich die von der Lichtgeschwindigkeit herrührenden Unterschiede innerhalb dieser Dimensionen und Zeittheile geltend machen.

Diese Folgerung ist darauf gegründet, dass die in (12h) und (12i) ausgedrückten Grössen Summen sind von denselben Summanden, aber so, dass in der zweiten Summe jeder Summand mit einem verschwindend kleinen Factor multiplicirt ist, der bei imaginärem n einen immer negativen reellen und einen der Regel nach dagegen verschwindenden imaginären Theil hat. Diese Folgerung würde nicht ohne Weiteres zulässig sein, wenn φ die relativ kleine Differenz einer sehr grossen positiven und einer nahehin ebenso grossen negativen Quantität wäre, und dabei der mittlere Werth von r^2 für die eine dieser Quantitäten einen endlichen Unterschied von dem der anderen angehörigen Mittelwerthe hätte. Nun kann allerdings φ in der angegebenen Weise zusammengesetzt sein, aber dabei nur dann
107 überall endlich bleiben, wenn zwei unendlich grosse elektrische Quanta in unendlich kleiner Entfernung von einander als elektrische Doppelschicht von endlichem Momente gelagert sind, wie in den beiden Platten eines Condensators oder in den beiden Belegungen einer Leydener Flasche. In diesen Fällen ist aber offenbar die zweite Bedingung nicht erfüllt, nämlich die, dass der mittlere Werth von r^2 für die positive und negative elektrische Masse endlich verschieden sei.

In der Voraussetzung also, dass die Constante k keine sehr grosse Zahl ist, wird man die analytische Behandlung der Aufgaben über Elektricitätsbewegung vereinfachen dürfen, indem man $k = 0$ setzt, oder die Fortpflanzung der Longitudinalwellen unendlich gross annimmt, so oft die Dimensionen der gebrauchten Leiter verschwindend klein sind gegen die Moduln der (reellen oder complexen) Wellenlängen der zur Wahrnehmung kommenden elektrischen Oscillationen (deren Periode auch complex sein kann).

Die Vereinfachung der analytischen Operationen, welche eintritt, wenn wir $k = 0$ setzen, gründet sich darauf, dass die Gleichungen (II) und (IIa) nicht mehr nach t integrirt zu werden brauchen. Die Gleichung (12f) ergiebt alsdann für das Innere der Leiter entweder:

$$n = -\frac{4\pi}{\varkappa},$$

oder:

$$\Delta\varphi = 0.$$

Die letztere Alternative ergiebt, dass gar keine freie Elektricität im Innern der Leiter vorkommt. Die erstere giebt:

$$\varphi = f_{x,y,z} \cdot e^{-\frac{4\pi}{\varkappa}t},$$

unabhängig von aller Einwirkung äusserer Kräfte. Bei denjenigen elektrischen Bewegungen also, die im Innern eines Leiters nach vorausgegangenem elektrischen Gleichgewicht durch äussere Kräfte hervorgerufen werden können, wird freie Elektricität, bei der Annahme $k = 0$, nur immer an der Oberfläche der Leiter oder an den Grenzflächen verschiedener Leiter vorkommen können.

§ 7. Bewegung in einem unendlichen Cylinder.

Die einzige praktisch angewendete Form eines Leiters von hinreichend grossen Dimensionen, an der man hoffen könnte, Unterschiede, die der Lichtgeschwindigkeit entsprechen, zu entdecken, wäre die eines sehr langen Drahtes. Ich will deshalb 108
die Theorie der elektrischen Bewegung in einem solchen hier noch ausführen, basirt auf die Gleichungen (12a) bis (12f),

indem, wie dort, die Abhängigkeit von t auf einen Eactor e^{nt} beschränkt bleibe, und zugleich die Geschwindigkeiten u_1, v_1, w_1 im äusseren Raume gleich Null gesetzt werden:

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0. \tag{13}$$

Die Axe des Drahtes sei auch die Axe der x, der Draht cylindrisch mit kreisförmigem Querschnitt vom Radius R. Die Bewegung geschehe theils in Richtung der x, theils in den darauf senkrechten Richtungen der

$$\varrho = \sqrt{y^2 + z^2}. \tag{13a}$$

Wir können unter diesen Umständen setzen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{V} &= \frac{d^2\chi}{dx\,.\,d\varrho} \cdot \frac{y}{\varrho} = \frac{d^2\chi}{dx\,.\,dy}, \\ \mathfrak{W} &= \frac{d^2\chi}{dx\,.\,d\varrho} \cdot \frac{z}{\varrho} = \frac{d^2\chi}{dx\,.\,dz}. \end{aligned}\right\} \tag{13b}$$

Aus den Gleichungen (12a) fliessen die drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varkappa}{4\pi} \cdot \Delta \left\{\frac{d\mathfrak{V}}{dz} - \frac{d\mathfrak{W}}{dy}\right\} - A^2 . n . \left\{\frac{d\mathfrak{V}}{dz} - \frac{d\mathfrak{W}}{dy}\right\} &= 0, \\ \frac{\varkappa}{4\pi} \cdot \Delta \left\{\frac{d\mathfrak{W}}{dx} - \frac{d\mathfrak{U}}{dz}\right\} - A^2 . n . \left\{\frac{d\mathfrak{W}}{dx} - \frac{d\mathfrak{U}}{dz}\right\} &= 0, \\ \frac{\varkappa}{4\pi} \cdot \Delta \left\{\frac{d\mathfrak{U}}{dy} - \frac{d\mathfrak{V}}{dx}\right\} - A^2 . n . \left\{\frac{d\mathfrak{U}}{dx} - \frac{d\mathfrak{V}}{dx}\right\} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{13c}$$

Die erste von diesen ist durch die Annahmen in (13b) erfüllt. Die beiden anderen ergeben, dass die Differentialquotienten nach y und z genommen von folgendem Ausdrucke gleich Null sind:

$$\frac{\varkappa}{4\pi} \cdot \Delta \left\{\frac{d^2\chi}{dx^2} - \mathfrak{U}\right\} - A^2 n \left\{\frac{d^2\chi}{dx^2} - \mathfrak{U}\right\} = f_x, \tag{13c*}$$

und gleichzeitig giebt (12c):

$$\frac{d}{dx}\left\{\mathfrak{U} + \frac{d^2\chi}{dy^2} + \frac{d^2\chi}{dz^2}\right\} = 0,$$

oder:

$$\mathfrak{U} - \mathfrak{F}_{(\varrho)} = -\frac{d^2\chi}{dy^2} - \frac{d^2\chi}{dz^2} = -\frac{d^2\chi}{d\varrho^2} - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{d\chi}{d\varrho}.$$

Da eine Function von ϱ allein zu χ hinzugesetzt werden kann, ohne die Werthe von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ zu ändern, so können wir die

willkürliche Function $\mathfrak{F}_{(\varrho)}$ hier weglassen, ohne die Allgemeinheit der Integration zu beschränken, und haben:

$$\mathfrak{U} = \frac{d^2\chi}{dx^2} - \Delta\chi. \tag{13d}$$

Wir erhalten dann für die Function χ aus (13c*) folgende 109
Differentialgleichung:

$$\frac{\varkappa}{4\pi} \cdot \Delta\Delta\chi - A^2 n \Delta\chi = 0. \tag{13e}$$

Die dort stehende willkürliche Function $f(x)$ kann hier wiederum durch eine in χ einbegriffene Function von x ersetzt gedacht werden, da die Hinzufügung einer solchen zu χ die Werthe von $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ oder $\mathfrak{W}$ nicht verändert.

Setzt man nun diese Werthe in die Gleichungen (12a) ein, so findet man, dass die drei Differentialquotienten, nach x, y und z genommen, der folgenden Gleichung gleich Null sind:

$$\frac{\varkappa}{4\pi} \Delta\left(\frac{d\chi}{dx}\right) - A^2 . n . \frac{d\chi}{dx} = \left(1 + \frac{\varkappa n}{4\pi}\right)\varphi - A^2 . \frac{kn}{2} \Psi + \text{Const.} \tag{13f}$$

Folglich muss diese Gleichung (13f) erfüllt sein, und sie zusammen mit der Gleichung (13e) ersetzt die Gleichungen (12a). Führt man die Operation Δ an (13f) aus, so erhält man die Differentialgleichung für φ:

$$\left(1 + \frac{\varkappa n}{4\pi}\right)\Delta\varphi - A^2 . k . n^2 . \varphi = 0. \tag{13g}$$

Man kann auch im äusseren Raume die Functionen $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{W}_1$ auf die Form bringen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{U}_1 &= \frac{d^2\chi_1}{dx^2} - \Delta\chi_1 = -\frac{d^2\chi_1}{d\varrho^2} - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{d\chi_1}{d\varrho}, \\ \mathfrak{V}_1 &= \frac{d^2\chi_1}{dx . dy}, \\ \mathfrak{W}_1 &= \frac{d^2\chi_1}{dx . dz}, \end{aligned}\right\} \tag{13h}$$

welche die Gleichung (12c) erfüllen.

Die Gleichungen (12b) und (13) werden durch sie erfüllt, wenn man setzt:

$$\Delta\left(\frac{d\chi_1}{dx}\right) = n\varphi_1 = \tfrac{1}{2}\Delta\Psi_1 \tag{13i}$$

und:

$$\Delta\Delta\left(\frac{d\chi_1}{dx}\right) = n.\Delta\varphi_1 = 0. \tag{13k}$$

Daraus folgt, dass im äusseren Raume sich $d\chi_1/dx$ und $\frac{1}{2}\Psi_1$ nur um eine Potentialfunction unterscheiden können, da die Gleichung (13i) sich auch schreiben lässt:

$$\Delta\left\{\frac{d\chi_1}{dx} - \frac{1}{2}\Psi_1\right\} = 0. \tag{13l}$$

---

110 Wie wir oben schon angenommen haben, dass die Abhängigkeit der hier zu untersuchenden Functionen von t darauf beschränkt sei, dass sie den Factor e^{nt} enthalten, so fügen wir nun die weitere Beschränkung hinzu, dass ihre Abhängigkeit von x dadurch gegeben sei, dass sie den Factor e^{mx} enthalten, worin m einen imaginären Werth haben soll. Imaginär muss m sein, weil nur unter dieser Bedingung die in den Gleichungen (1a) oder (1b) gegebenen elektromotorischen Kräfte endlich sind.

Unter dieser Annahme werden die Bedingungsgleichungen unseres Problems folgende:

$$\frac{\varkappa}{4\pi}\cdot\Delta\Delta\chi - A^2.n.\Delta\chi = 0, \tag{14}$$

$$\Delta\Delta\chi_1 = \Delta\varphi_1 = 0, \tag{14a}$$

$$\frac{\varkappa m}{4\pi}\Delta\chi - A^2.n.m\chi = \left(1 + \frac{\varkappa n}{4\pi}\right)\varphi - \frac{1}{2}A^2.k.n.\Psi, \tag{14b}$$

$$2m.\Delta\chi_1 = \Delta\Psi_1 = 2n\varphi_1. \tag{14c}$$

Dazu kommen noch die Grenzbedingungen für die Oberfläche des Cylinders, (12d) und (12e), welche sich reduciren auf folgende:

$$m^2\chi - \Delta\chi = m^2\chi_1 - \Delta\chi_1, \tag{14d}$$

$$\frac{d\chi}{d\varrho} = \frac{d\chi_1}{d\varrho}, \tag{14e}$$

$$\Delta\left(\frac{d\chi}{d\varrho}\right) = \Delta\left(\frac{d\chi_1}{d\varrho}\right), \tag{14f}$$

$$\varphi = \varphi_1, \tag{14g}$$

$$\Psi = \Psi_1, \tag{14h}$$

$$\frac{d\,\Psi}{d\varrho} = \frac{d\,\Psi_1}{d\varrho}. \tag{14i}$$

Endlich für $\varrho = \infty$ müssen alle diese Functionen gleich Null werden.

Bezeichnen wir mit $J_{(p\varrho)}$ diejenige Bessel'sche Function, welche für $\varrho = 0$ endlich bleibt und die Differentialgleichung erfüllt:

$$\frac{d^2}{d\varrho^2} \cdot [J_{(p\varrho)}] + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{d}{d\varrho}[J_{(p\varrho)}] + p^2 J_{(p\varrho)} = 0, \tag{15}$$

so ist:

$$\Delta\,[e^{mx} \,.\, J_{(p\varrho)}] = (m^2 - p^2) \,.\, e^{mx} \,.\, J_{(p\varrho)},$$

und es wird also die Gleichung (13g) integrirt durch die Annahme:

$$\varphi = \mathfrak{A} \,.\, e^{nt+mx} \,.\, J_{(p\varrho)}, \tag{15a}$$

wenn: 111

$$\left(1 + \frac{\varkappa n}{4\pi}\right)(m^2 - p^2) = A^2 \,.\, k \,.\, n^2. \tag{15b}$$

Bezeichnen wir dagegen mit $\mathfrak{J}_{(p\varrho)}$ dasjenige Integral der Gleichung (15), welches für $\varrho = \infty$ gleich Null wird, so ist im äusseren Raume mit Berücksichtigung von (14a) und (14g) zu setzen:

$$\varphi_1 = \mathfrak{A} \,.\, e^{nt+mx} \,.\, \frac{J_{(pR)}}{\mathfrak{J}_{(mR)}} \cdot \mathfrak{J}_{(m\varrho)}. \tag{15c}$$

Die aus φ zu bildende Function Ψ ist dadurch bestimmt, dass im ganzen Raume:

$$\Delta\Psi = 2n\varphi \quad \text{und} \quad \Delta\Psi_1 = 2n\varphi_1, \tag{15d}$$

sowie durch die Bedingungen für die Oberfläche (14h) und (14i). Danach wird im Innern des Cylinders Ψ die Form haben:

$$\Psi = \left\{\frac{2n}{m^2 - p^2} \cdot \mathfrak{A} \,.\, J_{(p\varrho)} + \mathfrak{E} \,.\, J_{(m\varrho)}\right\} \cdot e^{nt+mx}, \tag{15e}$$

und im äusseren Raume:

$$\Psi_1 = \left\{-\frac{n\varrho}{m^2} \cdot \mathfrak{A} \cdot \frac{J_{(pR)}}{\mathfrak{J}_{(mR)}} \cdot \mathfrak{J}'_{(m\varrho)} + \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{J}_{(m\varrho)}\right\} \cdot e^{nt+mx}. \tag{15f}$$

Aus der Differentialgleichung (15) folgt leicht, wenn wir sie nach p differentiiren, p dann mit m vertauschen und zur Abkürzung setzen:

$$\mathfrak{J}'_{(m\varrho)} = \frac{d}{d\varrho}\cdot\mathfrak{J}_{(m\varrho)},$$

dass:

$$\frac{d^2}{d\varrho^2}\left[\frac{\varrho}{m}\cdot\mathfrak{J}'_{(m\varrho)}\right]+\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{d}{d\varrho}\left[\frac{\varrho}{m}\cdot\mathfrak{J}'_{(m\varrho)}\right]+m^2\cdot\left[\frac{\varrho}{m}\cdot\mathfrak{J}'_{(m\varrho)}\right]=-2m.\mathfrak{J}_{(m\varrho)}$$

und somit (15d) erfüllt sei. Die Coëfficienten $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ bestimmen sich durch die Gleichungen (14h) und (14i), welche ergeben:

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{2n}{m^2-p^2}\cdot J_{(pR)}+\frac{nR}{m^2}\cdot J_{(pR)}\cdot\frac{\mathfrak{J}'_{(mR)}}{\mathfrak{J}_{(mR)}}\right]\mathfrak{A}+\mathfrak{E}.J_{(mR)}-\mathfrak{F}.\mathfrak{J}_{(mR)}&=0,\\ \left[\frac{2n}{m^2-p^2}\cdot J'_{(pR)}-nR\cdot J_{(pR)}\right]\mathfrak{A}+\mathfrak{E}.J'_{(mR)}-\mathfrak{F}.\mathfrak{J}'_{(mR)}&=0.\end{aligned}\right\}\quad(15g)$$

Wir haben nun noch die Function χ zu bilden. Zunächst muss die Function $\Delta\chi$ die Differentialgleichung (14) erfüllen und dabei für $\varrho = 0$ endlich bleiben. Daraus folgt unter den vorausgeschickten Annahmen:

$$\Delta\chi = \mathfrak{B}.e^{nt+mx}.J_{(q\varrho)} \tag{16}$$

112 und:

$$\frac{\varkappa}{4\pi}(m^2-q^2) = A^2.n. \tag{16a}$$

Daraus folgt dann weiter, dass χ von der Form sein muss:

$$\chi = \left[\frac{1}{m^2-q^2}\cdot\mathfrak{B}.J_{(q\varrho)}+\mathfrak{G}.J_{(m\varrho)}\right]\cdot e^{nt+mx}, \tag{16b}$$

wo $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{G}$ zwei constante Coëfficienten sind. Der letztere bestimmt sich aus der Gleichung (14b), die sich bei Einsetzung der Werthe (16b), (15e) und (15a) reducirt auf:

$$\mathfrak{G} = \frac{k}{2m}\cdot\mathfrak{E}. \tag{16c}$$

Im äusseren Raume muss die Function χ_1 nach (14c) von der Form sein:

$$\chi_1 = \frac{1}{2m}\Psi_1+\mathfrak{H}.e^{nt+mx}.\mathfrak{J}_{(m\varrho)}. \tag{16d}$$

Die Coëfficienten $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ bestimmen sich durch die Grenzbedingungen (14d), (14e) und (14f), nämlich:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{q^2}{m^2-q^2}\cdot\mathfrak{B}\,.\,J_{(qR)}+m^2\,.\,\mathfrak{G}\,.\,J_{(mR)}\\
&=\frac{np^2}{m(m^2-p^2)}\cdot\mathfrak{A}\,.\,J_{(pR)}+\frac{m}{2}\cdot\mathfrak{E}\,.\,J_{(mR)}+m^2\,.\,\mathfrak{H}\,.\,\mathfrak{J}_{(mR)},\\
&\frac{1}{m^2-q^2}\cdot\mathfrak{B}\,.\,J'_{(qR)}+\mathfrak{G}\,.\,J'_{(mR)}\\
&=\frac{n}{m(m^2-p^2)}\cdot\mathfrak{A}\,.\,J'_{(pR)}+\frac{1}{2m}\cdot\mathfrak{E}\,.\,J'_{(mR)}+\mathfrak{H}\,.\,\mathfrak{J}'_{(mR)},\\
&\mathfrak{B}\,.\,J'_{(qR)}=\frac{n}{m}\cdot\mathfrak{A}\,.\,J_{(pR)}\cdot\frac{\mathfrak{J}'_{(mR)}}{\mathfrak{J}_{(mR)}}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(16e)$$

Die zwei Gleichungen (15g), die eine (16c) und die drei (16e) bilden ein System von sechs homogenen linearen Gleichungen mit den sechs Unbekannten:

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{E},\ \mathfrak{F},\ \mathfrak{G},\ \mathfrak{H}.$$

Folglich muss die Determinante derselben gleich Null sein Dies giebt schliesslich eine Gleichung, welche zur Bestimmung von n dient. Zur Abkürzung setzen wir:

$$P=\frac{J'_{(pR)}}{J_{(pR)}},\qquad Q=\frac{J'_{(qR)}}{J_{(qR)}}\quad\text{und}\quad M=\frac{\mathfrak{J}'_{(mR)}}{\mathfrak{J}_{(mR)}}.\quad(16f)$$

Dann ist die Eliminationsgleichung folgende:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{q^2}{m^2-q^2}\cdot\frac{M}{Q}\,[M-Q]-k\cdot\frac{m^2}{m^2-p^2}\,[M-P]\\
&\quad+\frac{1-k}{2}\cdot R\,[M^2+m^2]=0.
\end{aligned}\right\}\quad(16g)$$

Die unbekannte Grösse n ist hier in den q, p, Q und P ent- 113
halten. Es ist nun $2\pi/im$ gleich der Wellenlänge der betrachteten elektrischen Wellen nach der Länge des Drahtes gemessen; wir nehmen an, dass diese sehr gross gegen die Dicke des Drahtes sei, und betrachten deshalb mR als eine Grösse, die gegen die Einheit verschwindet.

Ferner ist $2\pi/\sqrt{m^2-p^2}$ nach (15b) die Wellenlänge der longitudinalen elektrischen Wellen in einem ausgedehnten leitenden Medium, deren Schwingungsdauer $2\pi/n$ ist; wir können

deshalb auch $(m^2 - p^2) R^2$ und $p^2 R^2$ wie $m^2 R^2$ als verschwindend klein gegen die Einheit betrachten. Dagegen ist:

$$m^2 - q^2 = \frac{4\pi n \,.\, A^2}{\varkappa},$$

und für Kupfer wird dies:

$$m^2 - q^2 = 4\pi n \cdot \frac{1}{227000} \, \frac{\text{Scdn.}}{\text{Quadratmillim.}}.$$

Wenn also R nicht unverhältnissmässig viel grösser als ein Millimeter ist, und n nicht viele Tausende beträgt, so wird auch $(m^2 - q^2) R^2$ und $q^2 R^2$ als eine gegen die Einheit kleine Grösse betrachtet werden können.

Da nun:

$$J_{(pR)} = 1 - \frac{p^2 \,.\, R^2}{2\,.\,2} + \frac{p^4 \,.\, R^4}{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4} - \text{etc.}$$

ist, so kann für sehr kleine Werthe von pR und qR gesetzt werden:

$$P = -\tfrac{1}{2} p^2 R,$$

$$\frac{q^2}{Q} = -\frac{2}{R} + q^2 \frac{R}{4}.$$

Wenn wir diese Werthe in (16g) einsetzen, erhalten wir die für kleine Werthe von pR und qR zunächst noch ohne Einschränkung der Werthe von mR gültige Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} 0 = -m^2\left[M + \frac{m^2 R}{2}\right] + \frac{\varkappa n}{4\pi}\left[-\frac{2}{R} M^2 \left(1 - \frac{m^2 R^2}{4}\right)\right. \\ \left. - 2 M m^2 - \frac{m^4 R}{2}\right] + A^2 n^2 \left[M + \frac{R}{4} M^2 + \frac{m^2 R}{2} - \tfrac{1}{2} k R M^2\right]. \end{aligned}\right\} \quad (16\text{h})$$

Es ist nun nach Kirchhoff[1] zu setzen:

$$\mathfrak{J}_{(mR)} = J_{(mR)} \left[\Psi_0 - \log\left(\frac{imR}{2}\right)\right] + \left\{-\frac{m^2 R^2}{2\,.\,2}(1) + \frac{m^4 R^4}{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4}\left(1 + \tfrac{1}{2}\right) - \frac{m^6 R^6 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)}{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4\,.\,6\,.\,6} + \text{etc.}\right\},$$

114 worin:

$$\Psi_0 = -0{,}5772157.$$

---

1) Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. XLVIII, Heft 4.

Daraus geht hervor, dass, wenn mR sehr klein ist, auch RM sehr klein ist, dagegen M/m sehr gross. Mit Berücksichtigung hiervon können wir die Gleichung (16h) auf folgenden einfacheren Ausdruck bringen:

$$0 = -m^2 - \frac{\varkappa n}{2\pi R} \cdot M + A^2 . n^2 . \{1 - \tfrac{1}{2} k . RM\} . \qquad (16\text{i})$$

Wenn k nicht so gross ist, dass kRM endlich wird, verschwindet das letzte Glied mit k ganz aus dieser Gleichung. Der Rest der Gleichung stimmt überein mit der Gleichung, welche Herr Kirchhoff aus dem Weber'schen Gesetze abgeleitet hatte, wenigstens in Bezug auf die Glieder, welche allein Einfluss haben, wenn R unendlich klein wird. Nur in den Gliedern, welche zunächst zu berücksichtigen sind, wenn $\log R$ nicht mehr als unendlich gross betrachtet werden kann, zeigt sich ein Unterschied, indem statt unserer Function:

$$M = \frac{1}{R\left\{-\log\left(\frac{im}{2}\right) + \Psi_0 - \log R\right\}}$$

in Kirchhoff's Gleichung steht:

$$\frac{1}{R\{\log l - \log R\}},$$

wo l die Länge des Drahtes bezeichnet, und $\log l$ statt der in meiner Formel vorkommenden Grösse steht:

$$-\log\left(\frac{im}{2}\right) + \Psi_0 = -\log(\pi) + \Psi_0 + \log(\lambda).$$

Im letzteren Ausdrucke bezeichnet λ die Wellenlänge der betreffenden Oscillationen.

Zu bemerken ist noch, dass durch die Annahme, kMR sei eine sehr kleine Grösse, das Vorkommen labiler Gleichgewichtsstörungen für negative Werthe von k von vornherein ausgeschlossen worden ist.

§ 8. Einfluss diëlektrischer und magnetischer Polarisation der Media.

Nachdem wir uns bisher mit der Frage beschäftigt haben, welchen Einfluss die aus den bisherigen Versuchen nicht bestimmbare Constante k bei den elektrischen Bewegungen haben

könne, bleibt es noch übrig, den Einfluss zu erörtern, den die
115 zwischen den durchströmten Leitern liegenden und sie umgebenden Isolatoren haben können. Wenn in ihnen Veränderungen vorgehen, so können diese auf die Ausbreitung der inducirenden Wirkungen Einfluss haben. Dass die meisten, vielleicht alle Naturkörper magnetisch (beziehlich diamagnetisch) polarisirbar sind, ist bekannt; für eine Reihe von Isolatoren ist auch nachgewiesen, dass in ihnen eine ähnliche Scheidung der Elektricitäten, diëlektrische Polarisation, stattfinden kann unter Einfluss elektrischer Kräfte, wie in magnetischen Körpern Scheidung der Magnetismen unter Einwirkung magnetischer Kräfte.

Es ist bekannt, dass man, wenigstens bei mässigeren Graden der Magnetisirung, das magnetische Moment, welches an irgend einer Stelle inducirt ist, der Stärke der an der betreffenden Stelle wirkenden magnetisirenden Kraft, diese multiplicirt mit einer von der Art des Stoffes abhängenden Constanten, gleich setzen kann. Die magnetisirende Kraft ist dabei diejenige, welche durch die äusseren Einflüsse in Verbindung mit dem in dem magnetisirten Körper selbst und an seiner Oberfläche entwickelten freien Magnetismus hervorgebracht wird. Genau dieselben Gesetze wenden wir auf die Diëlektrica an, wobei wir zunächst von den Vorgängen, die den elektrischen Rückstand der Leydener Flaschen hervorbringen, und die von der Anwesenheit schwach leitender Theile herzurühren scheinen, absehen.

Es seien $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Componenten der durch Vertheilung erzeugten elektrischen Momente parallel den Axen der x, y, z genommen, X, Y, Z die Componenten der gegebenen äusseren Kräfte, φ die Potentialfunction der durch deren Wirkung vertheilten Elektricität, so setzen wir dem entsprechend:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{x} &= \varepsilon\left(X - \frac{d\varphi}{dx}\right),\\ \mathfrak{y} &= \varepsilon\left(Y - \frac{d\varphi}{dy}\right),\\ \mathfrak{z} &= \varepsilon\left(Z - \frac{d\varphi}{dz}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Die Dichtigkeit freier Elektricität im Innern eines der Vertheilung unterworfenen Körpers, in zweierlei Weise ausgedrückt, ist gleich:

$$-\frac{d\mathfrak{x}}{dx}-\frac{d\mathfrak{y}}{dy}-\frac{d\mathfrak{z}}{dz}=-\frac{1}{4\pi}\cdot\Delta\varphi. \qquad (17\text{a})$$

An einer Oberfläche, wo $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und φ einen Sprung machen, ist mit Beibehaltung der bisher für die Oberflächen Ω gebrauchten Bezeichnungen:

$$(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_1)\cos a+(\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1)\cos b+(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1)\cos c=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{d\varphi}{dN}-\frac{d\varphi_1}{dN}\right]. \qquad (17\text{b})$$

In Verbindung mit den Festsetzungen, welche den Werth 116
von φ im Unendlichen bestimmen, und das Vorhandensein äusserer elektrischer Massen betreffen, genügen diese Gleichungen zur Bestimmung von φ, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$.

Sind die Kräfte X, Y und Z von der Form:

$$X=-\frac{d\psi}{dx},$$

$$Y=-\frac{d\psi}{dy},$$

$$Z=-\frac{d\psi}{dz},$$

also gleich den Anziehungskräften einer mit der Dichtigkeit:

$$E=-\frac{1}{4\pi}\cdot\Delta\psi$$

verbreiteten elektrischen Masse, so ergeben die Gleichungen (17) und (17a) nach Elimination von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left\{(1+4\pi\varepsilon)\frac{d}{dx}(\varphi+\psi)\right\}+\frac{d}{dy}\left\{(1+4\pi\varepsilon)\frac{d}{dy}(\varphi+\psi)\right\}\\+\frac{d}{dz}\left\{(1+4\pi\varepsilon)\frac{d}{dz}(\varphi+\psi)\right\}=-4\pi E,\end{aligned}\right\}(17\text{c})$$

und an den Grenzflächen, wo zwei Körper von verschiedenen Werthen von ε zusammenstossen, wenn E an der Fläche keine unendliche Dichtigkeit hat:

$$(1+4\pi\varepsilon)\frac{d}{dN}(\varphi+\psi)=(1+4\pi\varepsilon_1)\frac{d}{dN}(\varphi_1+\psi). \qquad (17\text{d})$$

Ist ε constant in dem Theile S des Raumes, wo E von Null verschieden ist, so ist:

$$-\frac{1}{4\pi}\Delta(\psi+\varphi)=\frac{1}{1+4\pi\varepsilon}\cdot E.$$

Das heisst: die gesammte Potentialfunction $(\psi+\varphi)$ wird in dem Raume, in welchem E liegt, sich so verhalten, als wenn in einem nicht diëlektrischen Raume nur $E/(1+4\pi\varepsilon)$ läge. Durch die erfolgte Vertheilung wird dorthin die Quantität $-4\pi\varepsilon E/(1+4\pi\varepsilon)$ geschoben, die einen entsprechenden Theil von E neutralisirt.

Für die Verschiebungen von E im Raume S, so weit ε constant ist, bildet diese neutralisirende Elektricität kein Hinderniss, weil sie überall mitfolgen kann. Die Anziehungskräfte also, welche von anderweitig vorhandenen elektrischen Massen auf E ausgeübt werden, müssen ebenso gross sein, als wenn die E zum Theil neutralisirende Elektricität gar nicht vorhanden wäre.

117 Die Potentialfunction einer punktförmigen Masse E_1 ist also:

$$\frac{E_1}{(1+4\pi\varepsilon)r}$$

und die Abstossung, welche sie auf die Masse E ausübt:

$$\frac{E\cdot E_1}{(1+4\pi\varepsilon)r^2}.$$

Die Grösse der Massen E und E_1, elektrostatisch gemessen, erscheint also im Verhältniss $\sqrt{1+4\pi\varepsilon}:1$ verkleinert durch den Einfluss des Diëlektricum, in dem sie liegen.

Wenn wir nun unter c eine beliebige constante Zahl verstehen, und jede Masse E auf das c-fache vergrössert denken, jede Grösse $(1+4\pi\varepsilon)$ aber auf das c^2-fache, so bleibt die Anziehung der beiden Massen E unter so veränderten Umständen unverändert, die Potentialfunction einer jeden wird verringert im Verhältniss $1/c$, und die Gleichung (17c), welche die Vertheilung bestimmt, bleibt vollständig ungeändert.

Wir können also durch alle elektrostatischen Mes-

sungen immer nur das Verhältniss der Werthe von $(1 + 4\pi\varepsilon)$ zwischen verschiedenen Körpern, oder zwischen diesen und dem vom Lichtäther gefüllten, übrigens leeren Raume ermitteln, aber nicht den absoluten Werth der genannten Grösse. Dasselbe gilt für die Coëfficienten der magnetischen Induction. Dass Poisson und andere Bearbeiter der Theorie des Magnetismus den magnetischen Coëfficienten, welcher der Grösse $(1 + 4\pi\varepsilon)$ entspricht, im Luftraume gleich Eins gesetzt haben, ist willkürlich. Es ist bekannt, dass eine Reihe von Physikern durch die diamagnetischen Erscheinungen veranlasst wurden, den betreffenden Coëfficienten für den nur mit Lichtäther gefüllten Raum grösser als Eins zu setzen, um ε in den diamagnetischen Körpern nicht negativ setzen zu müssen.

Die Bestimmung der elektrostatischen Einheit der Elektricität, wenn sie im Innern eines dïelektrischen Isolators vorgenommen wird, muss diese Einheit im Verhältniss $\sqrt{1 + 4\pi\varepsilon} : 1$ zu gross ergeben, und ebenso auch die elektrostatische Einheit der Stromstärke in demselben Verhältnisse zu gross. Die Constante A^2 ist der elektrodynamischen Anziehung zweier elektrostatischen Stromeinheiten proportional. Ist also das Medium, in dem wir uns befinden, und diese Versuche angestellt haben, dïelektrisch, so ist der wahre Werth der betreffenden Constante, wie er für einen absolut einflusslosen Raum gelten würde, $A^2/(1 + 4\pi\varepsilon_0)$, wo ε_0 die dïelektrische Polarisationsconstante der Luft, beziehlich des den Weltraum füllenden Mediums ist.

Wir müssen ferner die dïelektrische Polarisation auch bei der 118
Bestimmung der Bewegung der Elektricität beachten.

Wenn in dem Volumenelement dS die Menge E positiver Elektricität sich um $\frac{1}{2}s$ in Richtung der positiven x, und die Menge negativer um $\frac{1}{2}s$ nach Richtung der negativen x bewegt, so wird dadurch in demselben das elektrische Moment:

$$\mathfrak{x} = E . s$$

hergestellt, und gleichzeitig ist dieser Vorgang entsprechend einer Strömung in dem Element:

$$u_0 . dt = E . s.$$

Der Act der Polarisation bildet also eine Art elektrischer Bewegung, bei welcher:

$$u_0 = \frac{d\mathfrak{x}}{dt},$$

$$v_0 = \frac{d\mathfrak{y}}{dt},$$

$$w_0 + \frac{d\mathfrak{z}}{dt}.$$

Zu dieser kann sich noch hinzugesellen diejenige Bewegung, welche dem Ohm'schen Gesetze entsprechend in leitenden Körpern geschieht, deren Componenten mit u_2, v_2 und w_2 bezeichnet werden mögen.

Da nun nach den in Gleichung (17) gemachten Feststellungen, die die Elektricität in Richtung der Coordinatenaxen forttreibenden Kräfte gleich sind:

$$\frac{1}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{X}, \quad \frac{1}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{Y}, \quad \frac{1}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{Z},$$

so erhalten wir die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa u_2 &= \frac{1}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{X}, \\ \varkappa v_2 &= \frac{1}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{Y}, \\ \varkappa w_2 &= \frac{1}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{Z}, \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

und die Gesammtgeschwindigkeiten der elektrischen Strömung werden:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{d\mathfrak{x}}{dt} + \frac{1}{\varepsilon\,.\,\varkappa}\cdot\mathfrak{X}, \\ v &= \frac{d\mathfrak{y}}{dt} + \frac{1}{\varepsilon\,.\,\varkappa}\cdot\mathfrak{Y}, \\ w &- \frac{d\mathfrak{z}}{dt} + \frac{1}{\varepsilon\,.\,\varkappa}\cdot\mathfrak{Z}. \end{aligned}\right\} \qquad (18a)$$

119 In Bezug auf diese Grössen u bleiben dann auch die Gleichungen (2) und (2a) bestehen:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d\Delta\varphi}{dt}, \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l}(u - u_1) . \cos a + (v - v_1) . \cos b + (w - w_1) . \cos c \\ \quad = \frac{1}{4\pi} \frac{d^2}{dt . dN} (\varphi - \varphi_1),\end{array}\right\} \quad (2a)$$

und die Berechnungen der elektrodynamischen Kräfte U, V, W, welche in den Gleichungen (1a) bis (3a) in § 2 gegeben sind.

Nachdem so die elektrostatischen und elektrodynamischen Kräfte in einem dielektrischen Medium bestimmt worden sind, haben wir noch festzustellen, wie die Induction zweier Stromleiter in einem magnetisch polarisirbaren Medium verändert wird. Ich bezeichne die magnetischen Momente mit λ, μ, ν und die magnetische Potentialfunction mit χ, die Polarisationsconstante mit ϑ, die ausserdem vorhandenen magnetisirenden Kräfte mit $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, so ist, wie in Gleichung (17), zu setzen:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda = \vartheta \left[\mathfrak{L} - \frac{d\chi}{dx}\right], \\ \mu = \vartheta \left[\mathfrak{M} - \frac{d\chi}{dy}\right], \\ \nu = \vartheta \left[\mathfrak{N} - \frac{d\chi}{dz}\right],\end{array}\right\} \quad (19)$$

und:

$$\frac{d\lambda}{dx} + \frac{d\mu}{dy} + \frac{d\nu}{dz} = \frac{1}{4\pi} . \Delta\chi, \quad (19a)$$

oder an Flächen, welche freien Magnetismus enthalten:

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda - \lambda_1) . \cos a + (\mu - \mu_1) . \cos b + (\nu - \nu_1) . \cos c \\ \quad = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{d\chi}{dN} - \frac{d\chi_1}{dN}\right].\end{array}\right\} \quad (19a^*)$$

Die magnetisirenden Kräfte $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ am Orte x, y, z, herrührend von den Stromcomponenten u, v, w am Orte ξ, η, ζ, sind die folgenden:

120 Herrührend von der Stromcomponente	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{N}$
u	0	$-A.u.\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{r}\right)$	$A.u.\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{r}\right)$
v	$A.v.\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{r}\right)$	0	$-.A.v\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right)$
w	$-A.w.\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{r}\right)$	$A.w.\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right)$	0.

Also, wenn man sie für die sämmtlichen vorhandenen Strömungen berechnet:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L} &= A\left[\frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy}\right], \\ \mathfrak{M} &= A\left[\frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz}\right], \\ \mathfrak{N} &= A\left[\frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (19\text{b})$$

Somit sind, wenn u, v, w bekannt sind, die Grössen λ, μ, ν durch die Gleichungen (19), (19a), (19b) gegeben.

Die inducirende Wirkung der Grössen λ, μ, ν im Element $dx.dy.dz$ dagegen auf die Stromelemente u, v, w in ξ, η, ζ ist proportional der Zunahme des Potentials:

Für Stromcomponente	Inductionskraft
u	$-A\cdot\frac{d}{dt}\left[\nu\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{r}\right) - \mu\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dx.dy.dz$
v	$-A\cdot\frac{d}{dt}\left[\lambda\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{r}\right) - \nu\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dx.dy.dz$
w	$-A\cdot\frac{d}{dt}\left[\mu\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right) - \lambda\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dx.dy.dz.$

Also wenn wir setzen: 121

$$\left.\begin{aligned} L &= \iiint \frac{\lambda}{r} \cdot d\xi \,.\, d\eta \,.\, d\zeta, \\ M &= \iiint \frac{\mu}{r} \cdot d\xi \,.\, d\eta \,.\, d\zeta, \\ N &= \iiint \frac{\nu}{r} \cdot d\xi \,.\, d\eta \,.\, d\zeta, \end{aligned}\right\} \tag{19c}$$

so sind die Componenten der elektromotorischen Kraft, die von der Magnetisirung des Medium herrührt:

$$\left.\begin{aligned} &+ A \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz}\right], \\ &+ A \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{dL}{dz} - \frac{dN}{dx}\right], \\ &+ A \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy}\right], \end{aligned}\right\} \tag{19a}$$

und aus den Gleichungen (17) folgen endlich folgende Bewegungsgleichungen der Elektricität, in denen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die durch andere, z. B. hydroëlektrische und thermoëlektrische Processe bedingten äusseren Kräfte bedeuten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \mathfrak{x} &= -\frac{d\varphi}{dx} - A^2 \cdot \frac{dU}{dt} + A \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz}\right] + \mathfrak{X}, \\ \frac{1}{\varepsilon} \cdot \mathfrak{y} &= -\frac{d\varphi}{dy} - A^2 \cdot \frac{dV}{dt} + A \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{dL}{dz} - \frac{dN}{dx}\right] + \mathfrak{Y}, \\ \frac{1}{\varepsilon} \cdot \mathfrak{z} &= -\frac{d\varphi}{dz} - A^2 \cdot \frac{dW}{dt} + A \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy}\right] + \mathfrak{Z}, \end{aligned}\right\} \tag{19e}$$

wozu noch aus (19) und (19b) kommen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda}{\vartheta} &= A\left[\frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy}\right] - \frac{d\chi}{dx}, \\ \frac{\mu}{\vartheta} &= A\left[\frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz}\right] - \frac{d\chi}{dy}, \\ \frac{\nu}{\vartheta} &= A\left[\frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx}\right] - \frac{d\chi}{dz}, \end{aligned}\right\} \tag{19f}$$

endlich, wenn wir mit E die freie Elektricität bezeichnen:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}. \tag{19g}$$

Kennt man von den veränderlichen Grössen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, λ, μ, ν, E durch den ganzen Raum, so ist aus den drei ersten u, v, w mittels der Gleichungen (18a) zu finden, der freie Magnetismus durch (19a), und es sind alsdann φ, χ, U, V, W, L, M, N durch Quadraturen zu berechnen, so dass die sieben vorstehen-
122 den Gleichungen (19e), (19g) und (19f) zur Bestimmung der vorgenannten sieben Unbekannten als Functionen der Zeit dienen können.

Um aus diesen Gleichungen die Integrale zu entfernen, und sie in reine Differentialgleichungen zu verwandeln, erinnere ich an folgende Sätze:

Wenn man drei Functionen ξ, η, ζ von x, y, z hat, und für alle Orte innerhalb eines gewissen einfach zusammenhängenden Raumes S die drei Gleichungen erfüllt sein sollen:

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0, \tag{20}$$

so folgt daraus, dass innerhalb des Raumes S sei:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy} &= 0, \\ \frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz} &= 0, \\ \frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx} &= 0, \\ \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{20a}$$

Es lässt sich nun zeigen, dass das System der Gleichungen (20a) das System der Gleichungen (20) vollständig ersetzt, wenn die Bedingungen hinzugefügt werden:

1) dass ξ, η, ζ im ganzen Raume S endlich und stetig seien,

2) dass an der Oberfläche von S sei:

$$\xi . \cos a + \eta . \cos b + \zeta . \cos c = 0, \tag{20b}$$

wo a, b, c die Winkel sind, welche die Normale N der Oberfläche von S mit den Coordinatenaxen macht.

Aus den ersten drei Gleichungen des Systems (20a) folgt nämlich direct, dass es eine Function Ψ von x, y, z geben müsse, von der Beschaffenheit, dass:

$$\xi = \frac{d\Psi}{dx}, \quad \eta = \frac{d\Psi}{dy}, \quad \zeta = \frac{d\Psi}{dz}.$$

Dann ergiebt die letzte der Gleichungen (20a):

$$\Delta \Psi = 0,$$

und die Gleichung (20b), dass an der ganzen Oberfläche des Raumes S:

$$\frac{d\Psi}{dN} = 0.$$

Da der Raum S der Voraussetzung nach einfach zusammenhängend, und die Grössen ξ, η, ζ überall endlich und stetig sein sollen, so genügen diese Bedingungen nach bekannten Gesetzen über die Potentialfunctionen, um zu zeigen, dass im ganzen Raume S: 123

$$\Psi = \text{Const.},$$
$$\xi = \eta = \zeta = 0. \tag{20}$$

Wenden wir diese Sätze auf das System der Gleichungen (19e), und dann auch auf das der Gleichungen (19f) an, betrachten wir dabei den unendlichen Raum als den Raum S, und berücksichtigen wir, dass aus (19c), (19a) und (19a*) folgt:

$$\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = -\chi,$$

so erhalten wir folgende Systeme von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dy}\left(\frac{\mathfrak{z}}{\varepsilon}\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{\mathfrak{y}}{\varepsilon}\right) &= \frac{1+4\pi\vartheta}{\vartheta} \cdot A \cdot \frac{d\lambda}{dt} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dy} - \frac{d\mathfrak{Y}}{dz}, \\
\frac{d}{dz}\left(\frac{\mathfrak{x}}{\varepsilon}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\mathfrak{z}}{\varepsilon}\right) &= \frac{1+4\pi\vartheta}{\vartheta} \cdot A \cdot \frac{d\mu}{dt} + \frac{d\mathfrak{X}}{dz} - \frac{d\mathfrak{Z}}{dx}, \\
\frac{d}{dx}\left(\frac{\mathfrak{y}}{\varepsilon}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{\mathfrak{x}}{\varepsilon}\right) &= \frac{1+4\pi\vartheta}{\vartheta} \cdot A \cdot \frac{d\nu}{dt} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dx} - \frac{d\mathfrak{X}}{dy},
\end{aligned}\right\} \tag{20c}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(\frac{\mathfrak{x}}{\varepsilon}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{\mathfrak{y}}{\varepsilon}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{\mathfrak{z}}{\varepsilon}\right) \\
&= -\Delta\varphi + A^2 \cdot k \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz},
\end{aligned}\right\} \tag{20d}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dy}\left(\frac{\nu}{\vartheta}\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{\mu}{\vartheta}\right) &= A\cdot\left[\frac{d^2\varphi}{dx\,.\,dt} - 4\pi\cdot\frac{d\mathfrak{x}}{dt} - \frac{4\pi}{\varkappa\varepsilon}\cdot\mathfrak{x}\right],\\
\frac{d}{dz}\left(\frac{\lambda}{\vartheta}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\nu}{\vartheta}\right) &= A\cdot\left[\frac{d^2\varphi}{dy\,.\,dt} - 4\pi\cdot\frac{d\mathfrak{y}}{dt} - \frac{4\pi}{\varkappa\varepsilon}\cdot\mathfrak{y}\right],\\
\frac{d}{dx}\left(\frac{\mu}{\vartheta}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{\lambda}{\vartheta}\right) &= A\cdot\left[\frac{d^2\varphi}{dz\,.\,dt} - 4\pi\cdot\frac{d\mathfrak{z}}{dt} - \frac{4\pi}{\varkappa\varepsilon}\cdot\mathfrak{z}\right],
\end{aligned}\right\}\quad(20\text{e})$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda}{\vartheta}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{\mu}{\vartheta}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{\nu}{\vartheta}\right) = -A\chi. \qquad (20\text{f})$$

Dazu kommen noch die Bedingungen für die unendlich entfernte Grenzfläche des Raumes:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = \mathfrak{z} = \lambda = \mu = \nu = \varphi = \chi = 0.$$

Ferner die Bedingung, dass die in (19e) und (19f) gleich Null gesetzten Grössen überall stetig und endlich seien. Da nun dies für die Grössen U, V, W, L, M, N und ihre Differential-
124 quotienten schon nach der für sie vorgeschriebenen Bildungsweise durch Integration der Fall ist, so oft $u, v, w, \lambda, \mu, \nu$ überall endlich sind, so reduciren sich die Bedingungen der Stetigkeit darauf, dass die sechs Grössen:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathfrak{x}}{\varepsilon} + \frac{d\varphi}{dx} - \mathfrak{X}, &\quad &\frac{\lambda}{\vartheta} + \frac{d\chi}{dx},\\
&\frac{\mathfrak{y}}{\varepsilon} + \frac{d\varphi}{dy} - \mathfrak{Y}, &\quad &\frac{\mu}{\vartheta} + \frac{d\chi}{dy},\\
&\frac{\mathfrak{z}}{\varepsilon} + \frac{d\varphi}{dz} - \mathfrak{Z}, &\quad &\frac{\nu}{\vartheta} + \frac{d\chi}{dz}
\end{aligned}$$

überall stetig seien, namentlich auch an solchen Flächen, wo ε, ϑ und $\varkappa$ unstetig sind.

Da χ an solchen Flächen stetig ist, so ist:

$$\frac{d}{dx}(\chi - \chi_1) = \cos a\,\frac{d}{dN}(\chi - \chi_1) \text{ u. s. w.}$$

Wir haben ferner nach der Gleichung (19a*):

$$\left.\begin{aligned}
(\lambda - \lambda_1)\cdot\cos a + (\mu - \mu_1)\cdot\cos b + (\nu - \nu_1)\cdot\cos c\\
= \frac{1}{4\pi}\,\frac{d}{dN}(\chi - \chi_1)
\end{aligned}\right\}\quad(20\text{g})$$

und nach den Stetigkeitsbedingungen somit:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\lambda}{\vartheta}-\frac{\lambda_1}{\vartheta_1}&=-\frac{1}{4\pi}\cdot\cos a\cdot\frac{d}{dN}(\chi-\chi_1),\\
\frac{\mu}{\vartheta}-\frac{\mu_1}{\vartheta_1}&=-\frac{1}{4\pi}\cdot\cos b\cdot\frac{d}{dN}(\chi-\chi_1),\\
\frac{\nu}{\vartheta}-\frac{\nu_1}{\vartheta_1}&=-\frac{1}{4\pi}\cdot\cos c\cdot\frac{d}{dN}(\chi-\chi_1).
\end{aligned}\right\}\quad(20\text{h})$$

Aus den Gleichungen (20g) und (20h) kann $\chi-\chi_1$ unmittelbar eliminirt werden. Dann kommt χ nur noch in der Gleichung (20f) vor. Es können also aus den Gleichungen (20c), (20d), (20e) und den Stetigkeitsbedingungen die anderen unbekannten Grössen bestimmt werden, ohne auf χ Rücksicht zu nehmen.

Sind die Kräfte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ an der betreffenden Fläche stetig, oder ist nur ihre senkrecht zur Fläche gerichtete Resultante $\mathfrak{P}$ unstetig, so erhalten wir für die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ein ähnliches System von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{x}}{\varepsilon}-\frac{\mathfrak{x}_1}{\varepsilon_1}&=-\frac{1}{4\pi}\cdot\cos a\left[\mathfrak{P}-\mathfrak{P}_1+\frac{d}{dN}(\varphi-\varphi_1)\right],\\
\frac{\mathfrak{y}}{\varepsilon}-\frac{\mathfrak{y}_1}{\varepsilon_1}&=-\frac{1}{4\pi}\cdot\cos b\left[\mathfrak{P}-\mathfrak{P}_1+\frac{d}{dN}(\varphi-\varphi_1)\right],\\
\frac{\mathfrak{z}}{\varepsilon}-\frac{\mathfrak{z}_1}{\varepsilon_1}&=-\frac{1}{4\pi}\cdot\cos c\left[\mathfrak{P}-\mathfrak{P}_1+\frac{d}{dN}(\varphi-\varphi_1)\right].
\end{aligned}\right\}\quad(20\text{i})$$

Dass die Gleichungen (20c) bis (20i) mit Ausschluss von (20f) 125
die Lösung eindeutig bestimmen, wenn k nicht negativ ist, ergiebt sich aus der Gleichung der lebendigen Kraft, die wir deshalb hier zunächst aufstellen wollen.

Für den Fall, dass keine äusseren Kräfte wirken, also:

$$\mathfrak{X}=\mathfrak{Y}=\mathfrak{Z}=0,$$

erhält man die Gleichung der lebendigen Kraft, indem man die Gleichungen (20c) der Reihe nach mit λ/ϑ, μ/ϑ, ν/ϑ multiplicirt und addirt, dann ebenso die Gleichungen (20e) der Reihe nach mit $\mathfrak{x}/\varepsilon$, $\mathfrak{y}/\varepsilon$, $\mathfrak{z}/\varepsilon$ multiplicirt und addirt, die letztere Summe von der ersteren abzieht. Die Glieder der linken Seite lassen sich dann integriren, und ihr Integral wird wegen der Stetigkeitsbedingungen (20h) und (20i) gleich Null. Die Glie-

der der rechten Seite, welche φ enthalten, können durch eine partielle Integration mit Rücksicht auf (20d) umgeformt werden, und man erhält endlich:

$$\left.\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\iiint\Big\{\frac{1+4\pi\vartheta}{\vartheta^2}\cdot[\lambda^2+\mu^2+\nu^2]+\frac{4\pi}{\varepsilon}[\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2] \\ &+\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]+A^2\cdot k\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\Big\}\cdot dx\cdot dy\cdot dz \\ &\qquad=-\iiint\frac{4\pi}{\varkappa\,.\,\varepsilon^2}[\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2]\cdot dx\cdot dy\cdot dz \\ &\qquad=-\iiint\varkappa\,[u_2^2+v_2^2+w_2^2]\cdot dx\cdot dy\cdot dz. \end{aligned}\right\}\qquad(20\text{k})$$

Aus dieser Gleichung sind entsprechende Folgerungen, wie aus der früheren (5a) zu ziehen. Bezeichnen wir das Integral, dessen nach der Zeit genommener Differentialquotient die linke Seite der Gleichung (20h) bildet, mit Φ, so ist Φ nothwendig immer positiv, wenn k positiv ist. Sein Werth muss aber während des Ablaufs der Bewegung nothwendig immer kleiner werden. Ist derselbe Null, so muss er Null bleiben.

Daraus folgt, dass, wenn ausser den Kräften $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ die Anfangswerthe von:

$$\mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{z},\ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \varphi,\ \frac{d\varphi}{dt}$$

durch den ganzen Raum gegeben sind, die Gleichungen (20e) bis (20i) die Bewegung eindeutig bestimmen.

Ist $k=0$, so fällt $d\varphi/dt$ aus diesen Bestimmungsstücken weg.

Um die Art der durch diese Gleichungen angezeigten Bewegungszustände anschaulicher zu machen, wollen wir sie auf einen Körper S anwenden, in dessen Innerem ε und ϑ con-
127 stant sind und $\varkappa=\infty$ ist; ferner $\mathfrak{X}=\mathfrak{Y}=\mathfrak{Z}=0$. Wir erhalten dann:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{z}}{dy}-\frac{d\mathfrak{y}}{dz}&=A\cdot\varepsilon\cdot\frac{1+4\pi\vartheta}{\vartheta}\cdot\frac{d\lambda}{dt}, \\ \frac{d\mathfrak{x}}{dz}-\frac{d\mathfrak{z}}{dx}&=A\cdot\varepsilon\cdot\frac{1+4\pi\vartheta}{\vartheta}\cdot\frac{d\mu}{dt}, \\ \frac{d\mathfrak{y}}{dx}-\frac{d\mathfrak{x}}{dy}&=A\cdot\varepsilon\cdot\frac{1+4\pi\vartheta}{\vartheta}\cdot\frac{d\nu}{dt}. \end{aligned}\right\}\qquad(21)$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{d\mathfrak{x}}{dx}+\frac{d\mathfrak{y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{z}}{dz}\right]=-\Delta\varphi+A^2\cdot k\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{21a}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\nu}{dy}-\frac{d\mu}{dz}&=A\cdot\vartheta\cdot\left[\frac{d^2\varphi}{dx\,.\,dt}-4\pi\cdot\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right],\\
\frac{d\lambda}{dz}-\frac{d\nu}{dx}&=A\cdot\vartheta\cdot\left[\frac{d^2\varphi}{dy\,.\,dt}-4\pi\cdot\frac{d\mathfrak{y}}{dt}\right],\\
\frac{d\mu}{dx}-\frac{d\lambda}{dy}&=A\cdot\vartheta\cdot\left[\frac{d^2\varphi}{dz\,.\,dt}-4\pi\cdot\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\right],
\end{aligned}\right\} \tag{21b}$$

Wenn wir aus (21) neue Gleichungen bilden, nach der Weise wie (20a) aus (20) gebildet ist, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\mathfrak{x}&=4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)A^2\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\\
&+\left[1-\frac{(1+4\pi\vartheta)(1+4\pi\varepsilon)}{k}\right]\frac{d}{dx}\left[\frac{d\mathfrak{x}}{dx}+\frac{d\mathfrak{y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{z}}{dz}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{21c}$$

Die entsprechenden Gleichungen für $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ erhält man, indem man in (21c) $\mathfrak{x}$ und x beziehlich mit $\mathfrak{y}$ und y, oder mit $\mathfrak{z}$ und z vertauscht.

In ähnlicher Weise erhält man für die magnetischen Momente:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\lambda&=4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)A^2\cdot\frac{d^2\lambda}{dt^2},\\
\Delta\mu&=4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)A^2\cdot\frac{d^2\mu}{dt^2},\\
\Delta\nu&=4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)A^2\cdot\frac{d^2\nu}{dt^2},
\end{aligned}\right\} \tag{21d}$$

$$\frac{d\lambda}{dx}+\frac{d\mu}{dy}+\frac{d\nu}{dz}=0.$$

In den Gleichungen (21c) sind die elektrischen Verschiebungen in einem diëlektrischen Isolator durch ganz dieselben Gleichungen gegeben, wie die Verschiebungen der wägbaren Theilchen in einem festen elastischen Körper, in wel- 127
chem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit beträgt:

für die Transversalwellen:

$$\frac{1}{A\sqrt{4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)}},$$

für die Longitudinalwellen:

$$\frac{1}{A}\sqrt{\frac{1+4\pi\varepsilon}{4\pi\varepsilon.k}}.$$

Die Gleichungen (21 d) dagegen für die magnetischen Verschiebungen entsprechen denen im Inneren eines incompressiblen elastischen Körpers, in welchem die Geschwindigkeit der Transversalwellen dieselbe ist, wie die angegebene der elektrischen Verschiebungen, die Geschwindigkeit der longitudinalen Schwingungen dagegen unendlich gross. Es ergeben diese Gleichungen, wie schon Hr. Maxwell für den von ihm behandelten Grenzfall ($k = 0$, ε und ϑ unendlich gross) gezeigt hat, dass bei den Transversalwellen die elektrische Oscillation in der einen Polarisationsebene, die magnetische in der darauf senkrechten geschieht.

Um zu ermitteln, was unter Annahme eines diëlektrischen Raumes der gemessene Werth der Constante A bedeute, müssen wir noch den Fall der gut leitenden Körper untersuchen, wenn $\varkappa$ so klein ist, dass die durch die Polarisation entstehende Geschwindigkeit $d\mathfrak{x}/dt$ gegen die von der Leitung abhängende $\mathfrak{x}/\varkappa\varepsilon$ verschwindet. Unter dieser Annahme ergeben die Gleichungen (20 c) bis (20 e) bei eben solcher Behandlung, wie für den Isolator:

$$\varkappa \Delta u = (1 + 4\pi\vartheta)\, 4\pi A^2 \frac{du}{dt} - \frac{d}{dx}\left\{\Delta\varphi + (1 + 4\pi\vartheta - k) A^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}\right\}$$

u. s. w.

Die beiden anderen erhält man, indem man u und x mit v und y, oder mit w und z vertauscht.

Vergleicht man diese mit denen, welche durch die Operation Δ aus (3 b) gebildet werden:

$$\varkappa \Delta u = 4\pi A^2 \frac{du}{dt} - \frac{d}{dx}\left\{\Delta\varphi + (1 - k) A^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}\right\}$$

u. s. w.,

so sieht man, dass nur die Constanten verschieden sind. Statt A^2 der letzteren steht in der ersten $A^2(1 + 4\pi\vartheta)$, und statt k der letzteren steht:

$$\frac{k}{1 + 4\pi\vartheta}$$

in der ersteren. Ist also das Medium magnetisirbar, so erscheint der Werth der Constante k darin verkleinert in dem angegebenen Verhältniss.

Andererseits erscheint die Constante A^2, wenn in einem 123
magnetisirbaren Medium experimentirt wird, vergrössert durch ihre Multiplication mit dem Factor $(1 + 4\pi\vartheta)$. Da wir nun durch alle statischen Versuche über magnetische Vertheilung nur immer das Verhältniss der Werthe von $(1 + 4\pi\vartheta)$ für verschiedene Stoffe zu einander, oder zu dem nur mit Lichtäther gefüllten sogenannten Vacuum ermitteln können, so finden wir durch Versuche im Luftraum oder Vacuum immer nur das Product der Constante A^2 mit dem Factor $(1 + 4\pi\vartheta_0)$, wenn wir mit ϑ_0 den unbekannten Werth dieses Coëfficienten für den Luftraum bezeichnen.

Ferner ist schon oben nachgewiesen worden, dass die Quantitäten Elektricität, welche strömen, nach elektrostatischen Einheiten bestimmt im Verhältniss $\sqrt{1 + 4\pi\varepsilon_0} : 1$ verkleinert erscheinen, und ebenso alle nach elektrostatischer Einheit gemessenen Stromeinheiten. Dagegen erscheint der Widerstand $\varkappa$ im Verhältniss $1 : (1 + 4\pi\varepsilon_0)$ vergrössert und ebenso die Constante A^2. Ist also $\mathfrak{A}$ der im Luftraume gefundene, der Lichtgeschwindigkeit nahe gleiche Werth von $1/A$, so ist der wahre Werth:

$$\frac{1}{A} = \mathfrak{A}\sqrt{1 + 4\pi\varepsilon_0}\,.\sqrt{1 + 4\pi\vartheta_0},$$

und der Werth der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in einem isolirenden Medium wird:

$$\text{longitudinal:} \quad \mathfrak{A}\sqrt{\frac{(1 + 4\pi\varepsilon)(1 + 4\pi\varepsilon_0)(1 + 4\pi\vartheta_0)}{4\pi\varepsilon k}},$$

$$\text{transversal:} \quad \mathfrak{A}\sqrt{\frac{(1 + 4\pi\varepsilon_0)(1 + 4\pi\vartheta_0)}{4\pi\varepsilon(1 + 4\pi\vartheta)}}.$$

In der Luft selbst werden diese Werthe:

$$\text{longitudinal:} \quad \mathfrak{A}(1 + 4\pi\varepsilon_0)\sqrt{\frac{1 + 4\pi\vartheta_0}{4\pi\varepsilon_0 k}},$$

$$\text{transversal:} \quad \mathfrak{A}\sqrt{\frac{1 + 4\pi\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0}}.$$

Für die elektrodynamische Induction erweist es sich also nicht als gleichgültig, wie es bei den elektrostatischen Phänomenen der Fall war, ob der Luftraum ein Dielektricum ist oder nicht, sondern es hängt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der indu-

cirenden Wirkung von der absoluten Grösse von ε_0 ab, und ε_0
würde durch experimentelle Bestimmung dieser Fortpflanzungs-
geschwindigkeit der elektrischen Transversalwellen im Luft-
raume bestimmt werden können. Diese Geschwindigkeit müsste
129 der vorliegenden Theorie nach grösser sein, als die aus Herrn
W. Weber's Versuchen bestimmte Geschwindigkeit $\mathfrak{A}$, und
dieser nur gleich werden können, wenn die diëlektrische Polari-
sationsconstante der Luft ε_0 unendlich gross gegen $1/4\pi$ wäre.
Es geht daraus hervor, dass die bisher vorliegenden Erfah-
rungen auch ohne wesentliche Aenderungen in den Grund-
zügen der acceptirten Theorie der Elektrodynamik eine Aus-
breitung der elektrischen Fernwirkungen mit endlichen Ge-
schwindigkeiten als möglich erscheinen lassen; und zwar würden
sich die elektromagnetischen Wirkungen dabei mit einer der
Lichtgeschwindigkeit gleichen oder grösseren Geschwindigkeit
ausbreiten, während die Ausbreitung der elektrostatischen von
der unbekannten Constante k abhängig bliebe.

Heidelberg, 1870.

XXXIII.

Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrodynamischen Wirkungen.

Aus: Monatsberichte der Berliner Akademie vom 25. Mai 1871. S. 292—298.

Die Frage, wie die elektrodynamischen Fernwirkungen zu 292
Stande kommen, ob nach Hrn. W. Weber durch unmittelbar in die Ferne wirkende Kräfte der bewegten elektrischen Theilchen selbst, die aber von den Geschwindigkeiten und Beschleunigungen dieser Theilchen in Richtung ihrer Verbindungslinie abhängen, oder nach Hrn. C. Neumann (Sohn) durch Kräfte, die sich mit endlicher Geschwindigkeit im Raume verbreiten, oder ob sie nach Faraday und Hrn. Maxwell erst mittelbar durch eine Veränderung des den Raum füllenden Mediums bedingt werden, hat in neuester Zeit viele Forscher beschäftigt. Sie ist in der That eine Frage von principieller Wichtigkeit für die Grundlagen der Naturwissenschaft. Nach den beiden zuletzt bezeichneten Ansichten würden die elektrodynamischen 293
Fernwirkungen elektrischer Ströme nicht augenblicklich zu Stande kommen, sondern der Antrieb zu ihnen würde sich mit endlicher Geschwindigkeit durch den Raum verbreiten. Allerdings ist in Hrn. Neumann's und Hrn. Maxwell's Theorien diese Geschwindigkeit nach den Ergebnissen der elektrodynamischen Maassbestimmungen nahe gleich der Lichtgeschwindigkeit gesetzt worden. Indessen zeigte die von mir kürzlich[1]) veröffentlichte Discussion der elektrodynamischen Theorien.

---

1) In vorstehendem Aufsatz.

dass je nach den Annahmen, die man über die magnetische und diëlektrische Polarisationsfähigkeit der Luft macht, auch andere Werthe dieser Fortpflanzungsgeschwindigkeit sich mit den übrigen Thatsachen vereinigen lassen.

Unterdessen ist nun von Hrn. P. Blaserna[1]) eine grosse Reihe von Versuchen veröffentlicht worden, aus denen derselbe schliesst, dass die Fortpflanzung wenigstens der inducirenden Wirkungen elektrischer Ströme in der Luft mit einer sehr mässigen Geschwindigkeit vor sich ginge. Nach den Versuchen mit Oeffnungsinductionsschlägen, die Hr. Blaserna als die zuverlässigeren betrachtet, würde diese Geschwindigkeit in der Luft nur 550 m, im Gummilack sogar nur 330 m betragen, also im letzteren der Geschwindigkeit des Schalles in der Luft ungefähr gleich sein. Aus den Versuchen mit Schliessungsinduction hatte der Genannte sogar noch viel kleinere Geschwindigkeiten gefolgert; indessen hat er selbst anerkannt, dass in diesem Falle die Rückwirkung der inducirten Spirale auf die inducirende die Deutung des Ergebnisses seiner Versuche zweifelhaft mache.

Zu bemerken ist nun, dass bei diesen Versuchen nur sehr kleine Distanzen der inducirenden und inducirten Spirale angewendet worden sind, zwischen einem und drei Centimeter wechselnd; beide Spiralen waren übrigens flach gewunden. Die der Fortpflanzung durch den Zwischenraum von zwei Centimeter entsprechende Zeit betrug in den Versuchen mit Oeffnungsinduction nur $\frac{1}{22000}$ Secunde. Abgesehen von den Unregelmässigkeiten, die die immer sprungweise unterbrochene Be-
294 rührung eines schleifenden Contactes zwischen festen Metallen bei feinen zeitmessenden Versuchen herbeiführt, schien mir zweifelhaft, ob so kleine Zeitunterschiede nicht von der verschiedenen Dauer des Funkens an der Unterbrechungsstelle des inducirenden Stromes bedingt sein könnten. Ich habe mich in den unten zu beschreibenden eigenen Versuchen überzeugt, dass selbst unter viel ungünstigeren Verhältnissen, als sie in Hrn. Blaserna's Versuchen gegeben waren, der Unterbrechungsfunken die Dauer von $\frac{1}{46000}$ Secunde erreichen kann; die Herren

1) Giornale di Scienze Naturali ed Economiche. Vol. VI. 1870. Palermo.

Lucas und Cazin fanden kürzlich $\frac{1}{30000}$ für grössere elektrische Batterien mit 2,292 mm Schlagweite, $\frac{1}{15000}$ bei 5 mm Schlagweite.[1]) Während Hr. Blaserna mehrere Bunsen'sche Elemente zur Erzeugung des Stromes verwendete, habe ich nur ein Daniel'sches angewendet, und während seine Spiralen eng zusammengedrängte Drahtwindungen enthielten, hatte die meinige eine sehr grosse Peripherie und wenige Windungen, war also zur Erzeugung eines starken Extracurrents viel weniger geeignet. Dennoch erreichte die Dauer des Funkens die angegebene Grösse. Beachtet man nun, dass die Intensität des Funkens durch Annäherung einer zweiten Spirale, in der ein Inductionsstrom zu Stande kommt, wie bekannt, erheblich vermindert wird, weil der inducirte Strom hemmend auf den inducirenden wirkt, und dass Hrn. Blaserna's Spiralen einander immer verhältnissmässig sehr nahe standen: so tritt der Zweifel ein, ob nicht die längere Dauer des Funkens eine scheinbare Verzögerung der Wirkung bei grösserem Abstande der Spiralen hervorgebracht hat.

Da ich seit längerer Zeit mit Versuchen über den Verlauf sehr kurz dauernder elektrischer Ströme beschäftigt war, und Apparate zu diesem Zwecke hatte anfertigen lassen, so schien es mir vor allen Dingen nöthig zu prüfen, ob die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrodynamischen Wirkungen wirklich einen so niedrigen Werth habe, wie ihn Hr. Blaserna erschlossen hat. Meine bisher ausgeführten Versuche beziehen sich auf die Fortpflanzung der Wirkung durch Luft allein. Der sehr merkwürdige Einfluss, den die elektrischen Isolatoren in den Versuchen des italienischen Forschers gezeigt haben, erfordert noch weiteres Studium. Dass auch in Isolatoren
sehr kurz dauernde elektrische Bewegungen vorkommen, welche 295
unter Umständen wohl inducirend auf die Nachbarschaft wirken können, ähnlich der Bewegung des Magnetismus im Eisen, erscheint bei dem Einflusse, den solche Medien als Diëlektrica haben, sehr wahrscheinlich. Vorläufig habe ich diese Seite der Frage nicht verfolgt.

---

1) Hr. J. Bernstein in einer eng gewickelten Spirale von feinem Draht $\frac{1}{20000}$. (Pogg. Annalen CXLII. S. 65.)

Der von mir gebrauchte Unterbrechungsapparat für die Stromleitungen bestand aus einem schweren und festen eisernen Pendel, dessen Träger in die Mauer eingelassen war, und welches immer aus gleicher Höhe fallen gelassen wurde. Am unteren Ende trug es zwei mit Achatplatten belegte Hervorragungen, welche in dem Augenblicke, wo das Pendel durch die Gleichgewichtslage ging, gegen die stählernen Enden zweier leichten Hebelchen schlugen, durch deren Bewegung zwei Stromleitungen unterbrochen wurden. Das eine dieser Hebelchen ruhte auf einer festen Unterlage, das andere auf einem Schlitten, der durch eine Mikrometerschraube verschoben werden konnte, so dass der Anschlag an dieses verschiebbare Hebelchen um beliebige kleine Zeiträume bald früher, bald später erfolgte, als an das andere. Der Zeitunterschied wurde berechnet aus der mikrometrisch gemessenen Verschiebung der Anschlagspunkte und aus der Geschwindigkeit des fallenden Pendels; letztere aus seiner Schwingungsdauer und dem Schwingungsbogen. Ein Theilstrich am Kopfe der Mikrometerschraube entsprach $\frac{1}{231170}$ Secunde. Genauere Ablesungen zu machen, wäre bei der bisherigen Einrichtung wegen der ungleichmässigen Dauer des Funkens ohne Nutzen gewesen.

Da es mir darauf ankam, möglichst grosse Entfernungen der Spiralen zu gebrauchen, so habe ich diesen die Form von Ringen von etwa 80 cm Durchmesser gegeben. Die inducirende Spirale hatte nur $12\frac{1}{4}$ Windungen eines Kupferdrahtes von 1 mm Dicke, mit einer $\frac{1}{2}$ mm dicken Schicht von Guttapercha überzogen. Die inducirte Spirale dagegen hatte 560 Windungen eines mit Seide besponnenen Kupferdrahtes von $\frac{1}{2}$ mm Durchmesser. Diese Spirale konnte bis auf 170 cm von der inducirenden entfernt werden, ohne dass die inducirende Wirkung aufhörte deutlich zu sein. Aber auch die nächste Entfernung, in welche beide Rollen gebracht wurden, betrug immer noch 34 cm, um die Rückwirkung des inducirten auf den inducirenden Strom unwahrnehmbar klein zu machen, was auch, so weit es aus den zeitmessenden Versuchen beurtheilt werden kann, gelungen war.

296 Die Anordnung bei den Versuchen war folgende: Der inducirende Stromkreis enthielt ein Daniell'sches Element.

die kleinere Spirale und die zuerst angeschlagene Unterbrechungsstelle. Durch deren Anschlag wurde er aufgehoben, und seine Unterbrechung wirkte inducirend auf den nun allein übrig bleibenden zweiten Stromkreis.

Dieser war nicht vollständig geschlossen, sondern seine Enden führten zu einem Condensator nach Kohlrausch mit zwei vergoldeten Metallscheiben, die bis auf $\frac{3}{8}$ mm einander genähert waren. Dieser Kreis bestand aus der grösseren Drahtspirale, deren eines Ende unmittelbar mit der zur Erde abgeleiteten festen Platte des Condensators verbunden war. Das zweite Ende stand durch das zweite Unterbrechungshebelchen mit der isolirten beweglichen Platte des Condensators in Verbindung. Die durch Induction in Bewegung gesetzte Elektricität strömte also in den Condensator ein bis zu dem Moment, wo die zweite Unterbrechungsstelle aufgeschlagen wurde. Von da ab war die bewegliche Condensatorplatte isolirt und behielt die empfangene Ladung.

Deren Grösse und Art wurde dann an einem nach Sir W. Thomson's Princip construirten Elektrometer, nach Entfernung der beiden Condensatorplatten voneinander, gemessen.

Der Vorgang, der hierbei der Beobachtung unterworfen wurde, ist also die Reihe der nach Unterbrechung des primären Stromes zurückbleibenden elektrischen Oscillationen in der inducirten und mit dem Condensator verbundenen Spirale. Da diese Oscillationen von der einen zur anderen Condensatorplatte in einer übrigens ununterbrochenen Leitung ohne Funkenstrecke vor sich gehen, so verlaufen sie viel regelmässiger und sind viel zahlreicher, als die in den Schliessungsbögen von Leydener Batterien beobachteten. Die Länge meines Mikrometers erlaubte mir bei 34 cm Entfernung zwischen den Spiralen bis zu 35 positiven und ebenso vielen negativen Phasen abzulesen. Die Dauer einer ganzen Oscillation (positiv und negativ zusammen) betrug $\frac{1}{2811}$ Secunde, die Gesammtdauer der 35 beobachteten Oscillationen also $\frac{1}{80}$ Secunde; und sie waren da, wo ich die Beobachtungen abbrechen musste, noch keineswegs so schwach, dass sich nicht bei grösserem Spielraume des Mikrometers noch eine lange Reihe derselben hätte beobachten lassen.

Versuche, bei denen ich den Abstand der Condensator-
207 platten, und somit die elektrische Capacität des Condensators veränderte, ergaben, dass die Oscillationsdauer nur sehr wenig durch die Capacität des Condensators beeinflusst war. Ich habe schon in einer früheren Mittheilung [1]) darauf hingewiesen, dass auch eine eng gewundene Spirale selbst als Condensator wirkt, indem die Windungen des einen Endes positiv, die des anderen negativ geladen werden, und nur durch die sehr dünnen Schichten der isolirenden Seide von ihren weniger stark positiv oder negativ geladenen Nachbarschichten getrennt sind; daher häuft sich an beiden Seiten der isolirenden Schicht eine elektrische Belegung an. Da die Verringerung der Capacität des Condensators so wenig Einfluss auf die Schwingungsdauer hatte, folgt, dass die condensatorische Capacität der Spirale die des Condensators sehr beträchtlich übertroffen haben muss.

Um die etwaige Verzögerung der Fernwirkung zu entdecken, war es nöthig einen mit sehr grosser Schärfe zu bestimmenden ausgezeichneten Punkt im Verlaufe der elektrischen Oscillationen zu entdecken. Der erste Moment des Anfanges war hierzu ungeeignet, da, wie es scheint, der Strom mit der Ansteigungsgeschwindigkeit Null beginnt, und diese nur allmälig wächst; daher die Stromstärke im Anfang höchstens dem Quadrate der Zeit proportional zunimmt. Der Grund hiervon ist darin zu suchen, dass auch der primäre Strom während der Funkendauer nur allmälig verschwindet, und daher die inducirte elektromotorische Kraft im secundären Kreise keineswegs plötzlich vollständig entwickelt da ist, sondern selbst erst continuirlich anwächst. Die Funkendauer ist aber in unserem Falle etwa dem zehnten Theile einer ganzen Oscillationsperiode gleich, also keineswegs unbeträchtlich. [2]) Ihre

1) Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg, 30. April 1869 (oben Nr. XXX). In den früheren Beobachtungen hatte ich mit Hülfe des stromprüfenden Froschschenkels bis zu 45 Oscillationen constatirt, deren Gesammtdauer $\frac{1}{50}$ Secunde betrug.

2) Die relativ langsame Abnahme der Intensität des primären Stromes während des Funkens ist auch offenbar der Grund, warum, wie ich früher gefunden, in einer inducirten Spirale mit mehr als 7000 elektrischen Oscillationen auf die Secunde die letzteren so schwach ausfallen. Für die kurze Schwingungsdauer ist dann die Unterbrechung nicht jäh genug.

mittlere Länge bestimmt sich, wenn man die Zeit zwischen dem Anschlag des Pendels, welcher die primäre Leitung unter- 298
bricht, und dem ersten Nullpunkt des Stromes vergleicht mit der Zeit zwischen den folgenden Nullpunkten. Die erstere Grösse ist länger, weil sie ausser einer halben Oscillationsdauer auch noch die Funkendauer umfasst, und deren Betrag kann durch eine solche Vergleichung annähernd gefunden werden.

Dagegen sind die folgenden Nullpunkte des Stromes sehr scharf zu bestimmen, selbst bei der entfernteren Stellung der secundären Spirale. Da die Funkendauer selbst bei so schwachen elektromotorischen Kräften und so windungsarmen Spiralen, wie ich im primären Kreise angewendet habe, niemals constant ist, wovon der Grund wohl in der Fortschleuderung von Platintheilchen durch den Funken zu suchen ist: so sind die Ausschläge in dem dem Nullpunkte entsprechenden Theilstriche selbst bei guter Einrichtung des Apparates bald positiv, bald negativ, dagegen an den vorhergehenden und nachfolgenden Theilstrichen, entweder ausschliesslich oder doch überwiegend in einer bestimmten Richtung.

Bei der beschriebenen Anordnung, auf die ich nach langem Herumtasten gekommen war, zeigte sich nun, dass die grössere Entfernung der beiden Spiralen von 136 cm die Lage der Nullpunkte des inducirten Stromes nicht um einen Theilstrich des Mikrometers, das heisst, nicht um $\frac{1}{231170}$ einer Secunde veränderte. Pflanzen sich also die inducirenden Wirkungen wirklich mit einer angebbaren Geschwindigkeit fort, so muss diese grösser sein als 314400 m, oder etwa 42,4 geograph. Meilen in der Secunde.

Zu einer weiteren Verfeinerung dieser Messungen habe ich Vorbereitungen getroffen; wie weit dieselbe zu treiben sein wird, wird, wie mir scheint, hauptsächlich davon abhängen, wie weit der Funken an der Unterbrechungsstelle zu reduciren sein wird, wenn man dem primären Kreise sehr geringen Widerstand und sehr geringe elektromotorische Kraft giebt, und die ihn bildenden Drahtwindungen möglichst weit von einander entfernt.

XXXIV.

Ueber die Theorie der Elektrodynamik.

Aus: Monatsberichte der Berliner Akademie vom 18. April 1872.
S. 247—256. (Vorläufige Anzeige des folgenden Aufsatzes.)

247 Die Theorie der elektrodynamischen Wirkungen hat ausser ihrem unmittelbaren Interesse für das Verständniss dieses wichtigen und reichen Zweiges der Physik ein noch bedeutenderes und allgemeineres für die Grundprincipien der Mechanik überhaupt. Die übrigen bekannten Wirkungen in die Ferne lassen sich leicht und vollständig auf anziehende und abstossende Kräfte von Massenpunkten zurückführen, wobei die Intensität dieser Kräfte nur von den gegenseitigen Entfernungen der betreffenden Punkte, nicht von ihrer Bewegung abhängt. Auch die bis jetzt bekannten Wirkungen zwischen den Molekeln lassen sich entweder ganz auf solche Kräfte zurückführen, oder sind doch wenigstens in ihrer ganzen Erscheinungsweise den Wirkungen, welche die Schwere hervorbringt, so ähnlich, dass wir keine Schwierigkeit finden, sie uns als Wirkungen von Kräften ähnlichen Charakters vorzustellen. Allein die elektrodynamischen machen eine Ausnahme; sie bilden eine Classe von Fernwirkungen, die nur durch einen Bewegungszustand des wirkenden Agens, der Elektricität, hervorgebracht werden. einen Bewegungszustand, der sich als solcher durch eine ganze Reihe von Erscheinungen, durch Wärmeentwickelung in den Stromleitern, durch chemische Zersetzung in den flüssigen Leitern u. s. w. zu erkennen giebt. Die factischen Gesetze der Erscheinungsweise dieser Kräfte sind der Hauptsache nach gut bekannt und von Hrn. F. E. Neumann (dem Vater)

auf einen verhältnissmässig einfachen Ausdruck zurückgeführt worden, welcher aber nicht die Wirkung von Massenpunkt auf Massenpunkt, sondern von einem linearen Stromelement auf das andere giebt. Ich selbst habe den Neumann'schen Potentialausdruck in einem im 72. Bande des Journals für reine und angewandte Mathematik veröffentlichten Aufsatze eine allgemeinere Form gegeben, in welcher er auch die aus den Theorien von W. Weber und Maxwell hervorgegangenen abweichenden Potentialausdrücke für je zwei Stromelemente umfasst. Für geschlossene Ströme geben alle diese Ausdrücke die gleichen Resultate; dagegen für ungeschlossene, deren Wirkungen praktisch freilich noch wenig untersucht sind, ergeben sie Unterschiede. Der Plan meiner Arbeit war, hauptsächlich diejenigen Unterschiede aufzusuchen, welche etwa bei ausführ- 248
baren Versuchen entdeckt werden könnten. Dabei ist zu bemerken, dass die verschiedenen, von mir gebildeten Potentialausdrücke sich von einander nur durch eine Constante (in meiner Arbeit mit k bezeichnet) unterscheiden. Neumann's Ausdruck erhält man, wenn man $k = +1$ setzt, Maxwell's wenn $k = 0$, W. Weber's $k = -1$. Die Untersuchung ergab, dass die Ausdrücke mit negativem k zu unmöglichen Folgerungen führten, nämlich zu einem labilen Gleichgewicht der Elektricität in Leitern, welches, wenn einmal gestört, zu unendlich grossen Stromintensitäten und unendlich grossen Ladungen führen konnte. Die Ausdrücke mit positivem k dagegen, oder mit $k = 0$, ergaben stabiles Gleichgewicht, und auch für ungeschlossene Ströme nur solche Unterschiede, wie sie mit unseren bisherigen experimentellen Hülfsmitteln kaum werden entdeckt werden können, sodass also, was in der mathematischen Fassung des Gesetzes noch zweifelhaft ist, nämlich der Werth der Constante k, für die experimentelle Anwendung zunächst noch als einflusslos erscheint.

Diese Ausdrücke für das Potential je zweier Stromelemente sind nun aber offenbar keine elementaren Ausdrücke der letzten wirkenden Kräfte; sie führen nämlich für jedes Stromelement, wenn man sich dieses als festen Körper denkt, auf mindestens zwei Kräfte, oder auf eine Kraft und ein Kräftepaar; und die Grösse, zum Theil auch die Richtung dieser Kräfte, hängt ab

nicht blos von der Lage der Elemente, sondern auch von der Geschwindigkeit der elektrischen Ströme. Die Inductionserscheinungen sind nur indirect durch Vermittelung des Gesetzes von der Erhaltung der Energie aus dem elektrodynamischen Potentiale abgeleitet.

Unter den weiter eindringenden Hypothesen, welche die elementaren Kräfte zu ermitteln suchen, die den elektrodynamischen Erscheinungen zu Grunde liegen, sind namentlich zwei zu erwähnen. Hr. Cl. Maxwell hat die Annahme von Fernkräften fallen lassen und nimmt an, dass die sämmtlichen magnetischen, elektrostatischen und elektrodynamischen Wirkungen durch Fortpflanzung molecularer Bewegungen und Kräfte in einem den Raum ausfüllenden elastischen Medium in die Ferne übertragen werden. Da die Theorie für dieses Medium schliesslich die Fähigkeit, Oscillationen auszuführen, ergiebt, die denen des Lichtes vollkommen ähnlich sind, und auch die Fortpflan-
240 zungsgeschwindigkeit des Lichtes haben, so würde dieses Medium mit dem Lichtäther zu identificiren sein. Für die Einwirkung benachbarter Volumenelemente dieses Mediums auf einander nimmt er allerdings Gesetze an, die von denen der uns bekannten elastischen Körper wesentlich abweichen. Aber er hat gezeigt, dass diese Art gegenseitiger Einwirkung, wie er sie den Volumenelementen des Aethers zuschreibt, in der That durch eine mechanische Combination fest elastischer Körper wirklich hergestellt werden könnte. Es würde dazu ein System von Zellen mit elastischen Wänden und kugeligen Hohlräumen angenommen werden müssen, in denen elastische Kugeln rotiren können, die durch die Centrifugalkraft abgeplattet werden. Zwischen ihnen müssten in den Wänden der Zellen selbst, wie Frictionsrollen, andere Kugeln von unveränderlichem Volumen liegen. Diese würden frei rotiren können, ihr Schwerpunkt aber in isolirenden Medien sich nur durch elastisches Nachgeben der Zellenwand verschieben, in leitenden Medien dagegen bei jeder Verschiebung einen einer Reibung in einer zähen Flüssigkeit ähnlichen Widerstand erleiden müssen. Die Uebertragung der Bewegung zwischen diesen Kugeln würde nur durch die Adhäsion ihrer Oberflächen aneinander geschehen. Verschiebung der zuletzt genannten Kugeln giebt diëlek-

trische Polarisation des Mediums, Fortströmen derselben einen elektrischen Strom; Rotation der elastischen Kugeln entspricht der Magnetisirung des Mediums, die Rotationsaxe ist die Richtung der magnetischen Kraft.

Wenn nun auch die Vorstellung eines solchen molecularen Baues des raumfüllenden Aethers unserer Einbildungskraft als zu künstlich widerstreben mag, so scheint mir doch die Hypothese von Maxwell deshalb sehr wichtig zu sein, weil sie den Beweis führt, dass in den elektrodynamischen Erscheinungen nichts liegt, was uns zwänge sie auf eine ganz abweichende Art von Naturkräften zurückzuführen, auf Kräfte, die nicht blos von der Lage der betreffenden Massen, sondern auch von ihrer Bewegung abhängen. In der That lässt sich aus der Annahme derjenigen gegenseitigen Reactionen der Volumenelemente des Aethers gegen einander, welche Hr. Maxwell angenommen hat, eine vollständige und mathematisch sehr elegante Theorie der sämmtlichen elektrischen, magnetischen, elektrodynamischen und Inductionserscheinungen entwickeln, und dieselbe Theorie giebt auch noch von den Erscheinungen des Lichtes Rechenschaft.

Die Theorie von Hrn. Weber dagegen leitet die Erklärung 25
der elektrodynamischen Wirkungen aus Fernkräften eigenthümlicher Art ab, welche zwischen den elektrischen Massenpunkten wirken, und gleichzeitig von den Entfernungen, den relativen Bewegungen und den relativen Beschleunigungen je zweier Punkte gegen einander abhängen sollen. Diese Theorie giebt verhältnissmässig einfache Erklärungen der elektrodynamischen Anziehungen und der Inductionswirkungen in linearen Leitern, und ihre analytischen Folgerungen stimmten für alle an linearen geschlossenen Strömen zu beobachtenden Erscheinungen vollständig mit den Folgerungen des von Hrn. F. E. Neumann aus den Erscheinungen abgeleiteten Potentialgesetzes. Die Theorie von Weber, welche älter als die erwähnte von Cl. Maxwell ist, wurde deshalb auch, namentlich von den deutschen Physikern, in sehr günstiger Weise aufgenommen. Sie hatte und behält übrigens entschieden das Verdienst eines jeden scharfsinnigen und originellen Gedankens, welcher neue Bahnen in der Wissenschaft zu betreten strebt, wenn die alten Pfade

in unentwirrbares Dickicht zu führen scheinen. Ich brauche hier wohl nicht hervorzuheben, dass der Werth eines solchen Versuches neue Wege zu eröffnen, wenn er dem Stande der Wissenschaft zu der Zeit genügte, wo er aufgestellt wurde, nicht geschmälert wird, wenn sich nach 25jährigen weiteren Fortschritten der Wissenschaft die Unmöglichkeit herausstellen sollte ihn durchzuführen. Auch dann ist ein solcher Versuch nicht fruchtlos gewesen. Eine Recognoscirung unbekannten Terrains, was neben der bisher eingehaltenen Strasse liegt, wenn sie sorgfältig und scharfsinnig durchgeführt ist, behält ihren Werth, auch wenn sie nur lehren sollte, dass ausser der grossen Strasse kein Weg existirt.

Es war durch die *Weber*'sche Hypothese eine für die Principien der Naturwissenschaft höchst bedeutende Frage zum ersten Male zur Prüfung an thatsächlichen Problemen gelangt, nämlich die, ob elementare, nicht weiter zerlegbare Kräfte angenommen werden müssen, die nicht blos von der Lage, sondern auch von der Bewegung der wirkenden Punkte abhängig sind. Ich selbst hatte schon in meiner Schrift: „Ueber die Erhaltung der Kraft“ hervorgehoben, dass Kräfte, die nur von der Entfernung und den Geschwindigkeiten, d. h. also von den Coordinaten der Punkte und von deren ersten Differentialquotienten abhängen, das allgemeine Naturgesetz von der Er-
251 haltung der Energie, welches sich auch in den elektrodynamischen Erscheinungen durchaus bestätigt, nothwendig verletzen müssen. Dagegen diesen noch complicirteren Fall, welchen das *Weber*'sche Gesetz aufstellt, wo die Kräfte von den Coordinaten und von den ersten und zweiten Differentialquotienten derselben nach der Zeit abhängen, hatte ich damals nicht berücksichtigt, und dieser Fall ist mit einer etwas erweiterten Form des Gesetzes von der Erhaltung der Energie allerdings vereinbar. Nennen wir *lebendige Kraft* oder *actuelle Energie*, wie es immer bisher geschehen ist, die Summe der bewegten trägen Massen, jede multiplicirt mit dem halben Quadrate ihrer Geschwindigkeit, so ist in der gewöhnlichen Form des Gesetzes die Grösse, welche ich *Quantität der Spannkräfte*, die englischen Physiker *potentielle Energie* genannt haben, eine Function der Coordinaten der be-

Digitized by Google

wegten Punkte allein, und das Gesetz von der Erhaltung der Energie sagt aus, dass die Summe der actuellen und potentiellen Energie bei jeder von aussen her nicht beeinflussten Bewegung eines Massensystems constant bleibe.

Findet aber unter Einwirkung äusserer Kräfte ein in sich selbst zurücklaufender Cirkelprocess statt, an dessen Ende sämmtliche Punkte des Massensystems genau dieselbe Lage, und das Ganze dieselbe lebendige Kraft wie im Anfang hat, so muss die Summe der dabei von aussen empfangenen und nach aussen abgegebenen Arbeit gleich Null sein, so dass durch keine Wiederholung des Cirkelprocesses dauernd Arbeit gewonnen oder vernichtet werden kann. Wäre ersteres der Fall, so wäre dadurch ein ewig fortlaufender Gewinn von Arbeit ohne fortschreitende Veränderung des betreffenden Massensystems möglich, und ein Perpetuum mobile construirbar.

Die *Weber*'sche Erweiterung des Gesetzes von der Energie macht nun auch den Werth der *potentiellen Energie* zu einer Function nicht blos der Lage, sondern auch der Geschwindigkeiten der Massenpunkte. Auch unter dieser Annahme wird durch keinen Kreisprocess, der die sämmtlichen Massen des Systems nicht blos in die anfänglichen Lagen, sondern auch alle einzeln in die anfänglichen Geschwindigkeiten zurückführt, mehr Arbeit nach aussen abzugeben als von aussen aufzunehmen sein, weil eben jene Grössen der actuellen und potentiellen Energie, welche das Maass der Arbeit bilden, zu Ende jedes solchen Kreisprocesses dieselben sind, wie zu Anfang.

Unter diesen Umständen werden aber die Werthe der 252
Kräfte nothwendig zweite Differentialquotienten der Coordinaten enthalten müssen, weil die Summe der den einzelnen Punkten und einzelnen Coordinataxen entsprechenden Kraftcomponenten, jede multiplicirt mit der entsprechenden Geschwindigkeitscomponente, dem Differentialquotienten der potentiellen Energie nach der Zeit genommen gleich sein muss, und letzterer unter der gemachten Voraussetzung nothwendig auch die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten nach der Zeit enthält.

In Bezug auf die vollkommenen Kreisprocesse hat Hr.

W. Weber[1]) den Beweis geführt, dass seine Annahme über den Werth der elektrischen Kräfte keine Erzeugung von Arbeit ohne entsprechenden Verbrauch arbeitsfähiger Kräfte zulasse.

Andererseits hatten mich Anwendungen, die ich von den aus Weber's Annahme von Kirchhoff hergeleiteten Differentialgleichungen zu machen suchte, zu der Entdeckung geführt, dass diese einem labilen Gleichgewichtszustande der Elektricität in Leitern entsprächen, und dass danach Strömungen sich entwickeln könnten, die zu unendlichen Stromstärken und unendlichen elektrischen Dichtigkeiten führten.

Entgegnungen von Hrn. W. Weber und Hrn. C. Neumann haben mich zu einer Wiederaufnahme und Verallgemeinerung dieser Untersuchungen geführt, von denen ich der Akademie hier kurz die Resultate vorlegen will.[2])

Wenn man eine Anzahl von beliebig vielen Massenpunkten hat, deren träge Masse mit μ_n bezeichnet werden mag, welche alle oder zum Theil auch Quanta von Elektricität enthalten, die, nach elektrostatischem Maass gemessen, mit e_n bezeichnet werden mögen, wenn ferner r_{nm} die Entfernung der Punkte n und m ist, und q_n die resultirende Geschwindigkeit des Punktes
253 n, ϑ_{nm} der Winkel, den sie mit der über n hinaus verlängerten Richtung der Linie r_{nm} macht, so ist der Werth:

1) des elektrostatischen Potentials:

$$P = \tfrac{1}{2} \Sigma\Sigma \left[\frac{e_n \cdot e_m}{r_{nm}} \right],$$

2) des elektrodynamischen Potentials:

$$Q = \frac{1}{cc} \Sigma\Sigma \left[\frac{e_n \cdot e_m}{r_{nm}} \cdot q_n \cdot q_m \cdot \cos(\vartheta_{nm}) \cdot \cos(\vartheta_{mn}) \right].$$

Wir setzen ferner die Grösse:

$$p_n = \frac{1}{cc} \Sigma \left[\frac{e_m}{r_{nm}} \cos^2(\vartheta_{mn}) \right]$$

1) Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie im X. Bande der Abh. d. math.-phys. Classe der Königl. Sächsischen Ges. der Wissenschaften 1871. — Den Werth des Potentials hat derselbe Autor schon in Poggendorff's Annalen 1848 Bd. 73 S. 229 gegeben.

2) Die ausführliche Veröffentlichung der betreffenden Untersuchung wird im Journal f. reine u. angew. Mathematik geschehen. (S. unten Nr. XXXV.)

und bezeichnen die potentielle Energie der übrigen Kräfte, welche auf die trägen Massen wirken, mit V. Dann wird die Gleichung, welche in Hrn. Weber's Sinne die Erhaltung der Kraft ausdrückt:

$$\frac{1}{2}\Sigma\left[(\mu_n - p_n e_n)q_n^2\right] + P + V - Q = \text{Const.}$$

Die hier vorkommende Summe, welche die Stelle der lebendigen Kraft vertritt, und die wir mit L bezeichnen wollen, unterscheidet sich von der gewöhnlichen Form dieses Ausdruckes dadurch, dass die nothwendig positiven Quadrate der q_n nicht allein mit den nothwendig positiven trägen Massen μ_n multiplicirt sind, sondern dass statt dieser letzteren die Differenzen $(\mu_n - e_n p_n)$ als Coëfficienten der Quadrate eintreten. Diese Differenzen können aber auch negativ werden, da μ_n jedenfalls reducirt werden kann bis auf die auch von den Herren Weber und C. Neumann doch immer als ausserordentlich klein angesehene träge Masse des elektrischen Quantums e_n, die Grösse p_n aber eine nach Art der Potentialfunctionen gebildete Function ist, die von beliebig grossen elektrischen Massen herrühren kann. Wenn nun $e_n p_n > \mu_n$, so besässe der Punkt e_n gleichsam negative Masse. Beschleunigung seiner Bewegung würde einer Verminderung der lebendigen Kraft entsprechen. Bestände die lebendige Kraft L aus einer Anzahl positiver und negativer Glieder dieser Art, so würde sie einen unveränderten endlichen Werth erhalten können, während ihre negativen, wie ihre positiven Glieder in das 254
Unendliche wachsen.

Am einfachsten stellen sich diese Verhältnisse dar, wenn man nur eine der Massen μ sich bewegt denkt und die übrigen auf einer die Masse μ umgebenden Kugelfläche gleichmässig ausgebreitet und festhaftend (etwa an der Fläche eines Isolators). Dann werden p und P Constanten, die von der Lage des Punktes μ in der Kugel unabhängig sind, ferner ist $Q=0$ und die Gleichung reducirtt sich auf:

$$\frac{1}{2}(\mu - ep)q^2 + V = \text{Const.}$$

Ist nun das Quantum der Elektricität auf der Kugel gross genug, dass $ep > \mu$, so müssen q^2 und V gleichzeitig wachsen

und abnehmen. Bewegt sich μ in einer Richtung, welche der von V repräsentirten Kraft entgegengesetzt ist, so wächst V, und die Geschwindigkeit q muss zunehmen. Bewegt sich μ dagegen in Richtung der Kraft, so nimmt im Gegentheil die Geschwindigkeit ab. Bewegt sich μ auf vorgeschriebener Bahn gegen eine Kraft, die ihm immer widersteht, zum Beispiel gegen eine Reibung, so muss seine Geschwindigkeit fortdauernd und in das Unendliche zunehmen, womit auch Wärmeerzeugung in das Unendliche verbunden wäre. Stösst die Masse auf ihrem Wege immer von neuem gegen eine ihr in den Weg gelegte grössere träge elastische Masse, so wird sie diese fortstossen und selbst bei jedem Stosse an Geschwindigkeit zunehmen, um den nächsten Stoss noch kräftiger zu vollführen. Dadurch wäre offenbar ein Perpetuum mobile gegeben.

Ich bemerke hierbei, dass, wenn man die linearen Dimensionen der elektrischen Kugelschicht auf das n-fache wachsen lässt, aber die Dichtigkeit unverändert erhält, die Grösse p auf das n-fache steigt, sodass wir sie trotz immer steigender Entfernung der wirkenden Masse beliebig gross werden lassen können. Es handelt sich hierbei also keineswegs um Wirkungen in molecularen Distanzen, sondern um Fernwirkungen der Weber'schen Kräfte.

Der von mir früher nachgewiesene Fall, in welchem die Masse μ unendliche Geschwindigkeit erhält, beruhte darauf, dass dies immer geschehen muss, so oft sie unter Wirkung einer beschleunigenden Kraft irgendwo hinkommt, wo der die
255 Masse vertretende Coëfficient $(\mu - pe) = 0$ wird, weil die Masse Null durch eine endliche Kraft eine unendliche Beschleunigung erhält. Uebrigens ist in meiner gegenwärtigen Arbeit nachgewiesen, dass dies weder nothwendig nur in molecularen Distanzen geschieht, noch unendliche Anfangsgeschwindigkeit erfordert, wenn nur die elektrischen Massen hinreichend gross gewählt werden, und auf dem ganzen Wege der beiden Massen eine äussere Kraft einwirkt, die sie gegen einander treibt, und welche stark genug ist ihre elektrostatische Abstossung zu überwinden.

Dadurch werden die Einwände beseitigt, welche Hr. W.

Weber gegen die Ableitung einer der in meiner früheren Arbeit aus seiner Theorie gezogenen physikalisch unmöglichen Consequenzen erhoben hatte.

Hr. C. Neumann hat in seinen neuesten elektrodynamischen Untersuchungen seine Zustimmung zu den Weber'schen Einwänden ausgesprochen, und seinerseits die von mir nachgewiesenen Unzulänglichkeiten der Theorie zu beseitigen gesucht, indem er eine Aenderung des Weber'schen Ausdruckes für sehr kleine Distanzen eingeführt hat. Dass eine solche die besprochenen physikalischen Unmöglichkeiten nicht beseitigen kann, ist aus dem eben Gesagten leicht ersichtlich.

Auch für die elektrischen Ströme kann die Einführung irgend welcher molecularen Vorgänge, Bewegungen oder Kräfte das labile Gleichgewicht nicht beseitigen, weil bei n-facher Vergrösserung der Dimensionen und ungeänderten elektrischen Dichtigkeiten das Arbeitsäquivalent der Molecularprocesse nur wie n^3, das der Potentiale aber wie n^4 oder n^5 wächst, je nachdem sie von Flächen oder Räumen herrühren, sodass letztere, wenn sie eine Arbeitsgrösse repräsentiren, welche kleiner ist, als die dem Gleichgewichte der Elektricität entsprechende, bei genügender Vergrösserung immer das Uebergewicht erhalten. Wenn sich überall gleich grosse Quanta positiver und negativer Elektricität in entgegengesetzten Richtungen bewegen, heben sich die Grössen p_n weg, aber das elektrodynamische Potential $(-Q)$ kann kleiner als Null werden. Dass aber eine solche Vertheilung der elektrischen Dichtigkeiten und Ströme vorkommen kann, zeigt ganz unabhängig von den Differentialgleichungen, die den Ablauf dieser Ströme reguliren, schon meine frühere Arbeit.

Sobald eine Stromvertheilung gegeben ist, welche eine 256
Arbeitsgrösse repräsentirt, die kleiner als die des elektrischen Gleichgewichts ist, so kann eine solche Strömung nur durch Aufwendung äusserer Arbeit zur Ruhe gebracht werden, und muss andererseits durch Entziehung von Arbeit, wie sie durch die Wärmeentwickelung im durchströmten Leiter stattfindet, in das Unendliche gesteigert werden.

Es wird auf diese Weise an einem Beispiele klar, von welcher Wichtigkeit es ist, dass der analytische Ausdruck der

lebendigen Kraft nur positive Glieder enthalte, und dass diese Bedingung durch die Fernwirkungen des Weber'schen Gesetzes nicht erfüllt ist, zeigt sich hier als der letzte Grund der physikalisch unmöglichen Consequenzen, zu welchen es führt. Diese können jedenfalls nicht ohne sehr eingreifende neue Hilfshypothesen, die nicht nur die Wirkungen in molecularen Abständen, sondern auch die in die Ferne verändern müssten, beseitigt werden.

Schliesslich habe ich in der vorgelegten Arbeit noch die Bedenken aufzuklären gesucht, welche Hr. J. Bertrand gegen die Bildung der Differentialgleichungen der Bewegung der Elektricität geäussert hatte.[1])

---

1) Comptes rendus de l'Acad. des Sciences. T. 73 p. 968.

XXXV.

Ueber die Theorie der Elektrodynamik.

Zweite Abhandlung. Kritisches.

Aus: Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. 75. S. 35—66; 1873.

Gegen meinen Aufsatz: „Ueber die Bewegungsgleichungen 35
der Elektricität für ruhende leitende Körper“ sind von den HHrn. W. Weber, J. Bertrand und C. Neumann Einwände verschiedener Art erhoben worden, die theils gegen die von Hrn. Kirchhoff und mir bei der Bildung jener Bewegungsgleichungen angewendeten Grundlagen gerichtet sind, theils die physikalisch unzulässigen Folgerungen, welche ich als Consequenzen der Weber'schen Hypothese nachgewiesen hatte, durch neue Hilfshypothesen zu beseitigen suchen. Bei der grossen Wichtigkeit, welche der genannte Gegenstand nicht blos für das besondere Kapitel, sondern auch für die allgemeinen Grundprincipien der theoretischen Physik und Mechanik überhaupt hat, erlaube ich mir noch einmal darauf zurück zu kommen.

Die Weber'sche Hypothese über die elektrischen Kräfte ist der erste, bis zu einem gewissen Grade erfolgreiche Versuch gewesen, die Erklärung einer Classe von Erscheinungen, die noch nicht auf Elementarkräfte hatten zurückgeführt werden können, auf die Annahme von Kräften zu gründen, welche nicht blos von der Lage der wirkenden Massenpunkte, sondern auch von ihrer Bewegungsart abhängen sollten. Zwar hat man schon längst die Theorie der Reibung so dargestellt, als

wäre diese hervorgebracht durch Kräfte, die von den relativen Geschwindigkeiten der reibenden Körper abhängen. Indessen war es klar, dass diese Reibungskräfte keine elementaren Kräfte sein konnten, sondern nur das mechanische Resultat eines ziemlich complicirten Processes, der sich noch durch andere Wirkungen, wie durch Entwickelung von Wärme, Elektricität u. s. w., zu erkennen gab, kurz zusammenfassend ausdrücken sollten.

Schon in meiner Schrift: „Ueber die Erhaltung der Kraft" hatte ich nachgewiesen, dass elementare Kräfte zweier Massenpunkte, die ausser von der Entfernung auch von den Geschwindigkeiten abhängig wären, das Gesetz von der Erhaltung der Energie würden verletzen müssen. Hr. Weber hatte nun die von ihm angenommene Kraft zweier elektrischer Massen-
36 punkte abhängig gemacht nicht blos von den Geschwindigkeiten, sondern auch von den Beschleunigungen, und unter diesen Umständen besteht allerdings die Möglichkeit für ein beliebiges System von materiellen Punkten, welche sich unter Einwirkung theils von Weber'schen Kräften, theils von gewöhnlichen, dem Gesetze von der Erhaltung der Energie genügenden Kräften bewegen, eine Integration der Bewegungsgleichungen auszuführen, die derjenigen entspricht, durch welche man für die Wirkungen der gewöhnlichen mechanischen Kräfte die Gleichung von der Erhaltung der Energie herstellt. Diese Integralgleichung enthält auch in diesem Falle eine homogene Function zweiten Grades der Geschwindigkeiten, und setzt sie einer Function der Coordinaten gleich. Aus ihr ist, wie die Herren W. Weber und C. Neumann (junior) hervorgehoben haben, zu schliessen, dass durch keinen Cirkelprocess, der irgend ein Massensystem aus irgend einem Anfangszustande schliesslich in denselben Zustand, und zwar nicht blos in Beziehung auf die relative Lage, sondern auch auf die relativen Geschwindigkeitscomponenten aller einzelnen Punkte des Systems, zurückführt, mehr Arbeit erzeugt und nach aussen hin abgegeben werden könne, als andererseits dabei von aussen eingenommen und zerstört wird. — Die Summe der positiv und negativ abgegebenen Arbeit des Systems muss immer Null sein. Es kann also auch unter Mitwirkung der Weber'schen Kräfte durch Wiederholung eines solchen in sich immer wieder zurück-

laufenden Cirkelprocesses kein Perpetuum mobile hergestellt werden.

Man hat sich bei den Untersuchungen darüber, ob das Gesetz der Erhaltung der Energie für gewisse Naturprocesse gültig sei oder nicht, meist damit begnügt zu untersuchen, ob, wenn ich das analytische Resultat praktisch ausdrücken darf, ein immer wiederholter Cirkelprocess in das Unendliche Arbeit erzeugen oder zerstören könne.

In diesem Sinne nun verletzt die Weber'sche Annahme das Gesetz von der Erhaltung der Energie nicht; aber sie thut es in anderem Sinne, und es zeigt sich hierbei, dass die eben angegebene Prüfung nicht genügt.

Wenn nämlich das Arbeitsäquivalent eines bewegten Massensystems jemals kleiner werden kann, als das desselben Massensystems im Zustande der Ruhe, und zwar desto kleiner, je grösser seine Geschwindigkeiten sind: so wird Arbeit aufgewendet werden müssen, um das betreffende System in den Ruhezustand zurückzuführen; und umgekehrt jeder Vorgang, der ihm noch weitere Arbeitskraft entzieht, wird seine Geschwindigkeiten nothwendig steigern, und also auch die weitere Ge-
legenheit gewähren, das Quantum der abgegebenen Arbeits- 37
äquivalente immer weiter bis in das Unendliche zu steigern. Diese Möglichkeit ist nun in der That beim Weber'schen Gesetze gegeben. In meiner früheren Untersuchung war es der Leitungswiderstand der elektrischen Leiter, der der elektrischen Bewegung Arbeitsquanta, nämlich die durch die Strömung erzeugte Wärme, entzog, und sie nach dem Weber'schen Gesetze dadurch bei gewissen Arten der Bewegung, zum Beispiel bei Radialströmen in einer Kugel, in das Unendliche steigern konnte.

Bei allen anderen bekannten physikalischen Kräften gestaltet sich das Gesetz der Energie so, dass in seinem Ausdrucke nur die lebendige Kraft der bewegten Massen von den Geschwindigkeiten abhängt; diese ist aber eine nothwendig positive Grösse, weil sie eine Summe von Quadraten der mit ausschliesslich positiven Coëfficienten behafteten Geschwindigkeiten ist; sie bildet also ein mit Steigerung der Bewegung wachsendes, immer positives Arbeitsäquivalent. Das Arbeits-

äquivalent der bewegten Masse ist also nothwendig immer grösser, als das der in derselben Lage ruhenden Masse.

Mischen sich aber die Weber'schen Kräfte ein, so ist nach der Bezeichnung der Herren Weber und C. Neumann das gesammte Arbeitsäquivalent des Massensystems gleich:

1) der lebendigen Kraft der bewegten trägen Massen

2) plus der potentiellen Energie der elektrostatischen und anderweitigen mechanischen Kräfte

3) minus dem elektrodynamischen Potential.

Dieses letzte hängt auch von den Geschwindigkeiten ab, und sobald sein Werth positiv und grösser ist als der von Nr. 1), so treten die oben angegebenen Consequenzen ein. Unter welchen Bedingungen und in welchen Fällen dies nun vorkommen kann, wird unten erörtert werden.

Geschieht die Bewegung eines solchen Massensystems unter räumlichen Verhältnissen, welche die Glieder 1) und 3) sich gerade aufheben machen, so wird jede endliche Kraft, die im Sinne der vorhandenen Bewegung vorwärts treibt, diese in das Unendliche steigern müssen, weil durch endliche Zunahme der Bewegung dann das Arbeitsäquivalent nicht mehr vermehrt wird, während die Kraft doch Arbeit leistet. Unter diese Kategorie fällt einer der Einwände, die ich in meiner früheren Arbeit aufgestellt hatte.

Ich habe hiermit den Grund der physikalisch unmöglichen Folgerungen, welche Hrn. W. Weber's Annahme liefert, in möglichst genereller Form auszusprechen gesucht, und werde
38 die Gleichung, welche bei Annahme der Weber'schen Kräfte dem Gesetze von der Erhaltung der Energie entspricht, in einer Form geben, wo das Verhältniss noch klarer als in der oben gebrauchten Eintheilung der Energie heraustritt.

Die speciellen Streitpunkte sind also folgende:

A. Ich hatte aus den Differentialgleichungen der elektrischen Strömungen, wie sie von Hrn. Kirchhoff aus dem Weber'schen Gesetze hergeleitet und von Hrn. Lorberg verallgemeinert waren, gefolgert, dass die Weber'sche Annahme labiles Gleichgewicht der Elektricität in leitenden Körpern gebe. Von dieser Folgerung war mitbetroffen die frühere elektrodynamische Theorie von Hrn. C. Neumann,

wonach die Ausbreitung des elektrischen Potentials in die Ferne Zeit brauchen sollte.

B. Ich hatte an dem einfachsten Falle der Bewegung zweier elektrischer Massenpunkte in Richtung ihrer Verbindungslinie gezeigt, dass diese mit endlicher Geschwindigkeit anfangend in endlicher Entfernung unendliche Geschwindigkeit erreichen können.

Auf B. hat Hr. W. Weber im letzten Hefte seiner elektrodynamischen Maassbestimmungen [1]) selbst geantwortet, ohne A. zu berühren. Derselbe ist der Meinung, dass durch Annahme eines gewissen Verhältnisses zwischen den dabei in Betracht kommenden Constanten die Entfernung, in der jener unendliche Werth der Geschwindigkeit zu Stande komme, immer in das Bereich der Molecularkräfte der betreffenden Massen gebracht und dadurch verhindert werden könne, dass jener von mir als unmöglich bezeichnete Erfolg eintrete. Ich werde in § 10 dieses Aufsatzes zeigen, dass die von ihm gemachte Annahme über die Constanten dazu nicht ausreicht, wenigstens nicht, so lange wir beliebige Vermehrung der elektrischen Quanta uns vorbehalten.

Ein zweiter Einwand von Hrn. Weber beruht darauf, dass in dem von mir gewählten Beispiele die Theilchen im Anfange ihrer Bewegung eine Geschwindigkeit haben müssten, grösser als der sehr hohe Werth der von ihm gebrauchten Constante c, dass diese praktisch jedenfalls nicht herzustellen sei, und vielleicht auch der Natur der Sache nach unmöglich sein könnte. Dagegen führe ich in § 9 den Beweis, dass, wenn eine endliche Kraft die Annäherung der elektrischen Quanta zu einander dauernd unterstützt, die unendliche Geschwindigkeit auch bei beliebig kleiner Anfangsgeschwindigkeit zu Stande kommen kann.

Hr. C. Neumann hat in seiner neuesten Abhandlung 39
über Elektrodynamik [2]) sich dahin ausgesprochen, dass, wie ihm

1) Abhandlungen der math. physik. Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Bd. X. 1871.

2) Elektrodynamische Untersuchungen. Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften vom 20. October 1871.

scheine, mein Einwand B. von Hrn. Weber in endgültiger Weise widerlegt sei. Er selbst hat, ohne auf seine frühere elektrodynamische Theorie zurückzukommen, eine neue Modification des Weber'schen Gesetzes aufgestellt, indem er eine unbestimmte Function der Entfernung eingeführt hat, die in endlichen Distanzen mit der Weber'schen zusammenfallen, in molecularen Distanzen aber davon abweichen soll. Ich darf wohl annehmen, dass dies in der Meinung geschehen ist, durch die Einführung irgend welcher Molecularkräfte könnten die von mir gemachten Einwände, namentlich B. beseitigt werden. Ich habe deshalb in § 12 die allgemeine Form des Gesetzes von der Erhaltung der Energie benutzt, um zu zeigen, dass die unzulässigen Folgerungen überhaupt gar nicht von den Wirkungen in molecularen Distanzen abhängen, sondern im Gegentheil von den Fernwirkungen.

Gegen meinen Einwand A. hat Hr. C. Neumann nur im allgemeinen geltend gemacht, die Kirchhoff'schen Differentialgleichungen seien noch auf andere, nicht genau präcisirte Hypothesen gegründet, ohne aber die ihm hypothetisch erscheinenden Punkte näher zu bezeichnen. Was ich aus diesen gefolgert hätte, gelte nicht gegen das Weber'sche Gesetz. Uebrigens hat er selbst aus seiner eigenen neuen Annahme keine Differentialgleichungen der elektrischen Bewegung hergeleitet, sondern erklärt nur auf S. 472 seines Aufsatzes, dass das zur Aufstellung dieser Gleichungen nöthige „Potentialgesetz" bisher für andere als geschlossene lineare Strömungen noch nicht eruirt worden sei. Demgemäss ist denn Hr. C. Neumann auch den Beweis schuldig geblieben, dass seine neue Modification des Weber'schen Gesetzes zu stabilem Gleichgewicht der ruhenden Elektricität in Leitern führe.

Die Urtheile von Hrn. C. Neumann hat auch Hr. Zöllner[1] wiederholt, ohne irgend etwas Neues hinzuzufügen, was bei einer wissenschaftlichen Discussion zu berücksichtigen wäre.

Ich habe deshalb in § 13 die Hypothesen der angeschuldigten Kirchhoff'schen Gleichungen zusammengestellt, welche in der That keine anderen sind, als die Hr. W. Weber selbst

1) Ueber die Natur der Cometen u. s. w. Leipzig bei Engelmann. 1872.

seiner ersten Ableitung des Inductionsgesetzes zu Grunde gelegt hatte, und habe dann den Beweis hinzugefügt, dass be- 40
liebige Annahmen über die Molecularvorgänge und Molecularkräfte bei elektrischer Strömung die Möglichkeit nicht beseitigen, dass das Arbeitsäquivalent der elektrischen Strömung kleiner als das des Ruhezustandes werde, aus welchem Verhältnisse dann die übrigen vorher aufgeführten physikalisch unmöglichen Folgen fliessen.

Endlich habe ich in § 14 noch die von Hrn. J. Bertrand ausgesprochenen Bedenken gegen den Gebrauch der Potentialausdrücke in der Theorie der Induction und wegen der Anwendung des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte auf die inducirten elektromotorischen Kräfte zu beseitigen gesucht.

Die Nummern der Paragraphen setzen die meiner früheren Abhandlung fort.

§ 9. Bewegung zweier elektrischer Massenpunkte in Richtung ihrer Verbindungslinie.

Ich beginne mit diesem einfachsten Falle, an dem sich die wesentlichen Züge dessen, was später in allgemeinerer Form nachgewiesen werden soll, schon aufweisen lassen. Derselbe ist bereits in der Einleitung meiner früheren Arbeit und dann von Hrn. Weber besprochen worden. Ich nehme wie früher an: das elektrische Quantum e' liege fest, das gleichartige Quantum e sei mit der trägen Masse μ verbunden und in der Entfernung r von jenem befindlich; es bewege sich in Richtung der Verbindungslinie r. Ich ändere die früheren Annahmen nur insofern, als ich noch eine zweite Kraft gewöhnlicher Art R hinzufüge, die auf die träge Masse μ einwirkt, ebenfalls in Richtung der Verbindungslinie, und welche positiv genommen wird, wenn sie r zu vergrössern strebt. Die Bewegungsgleichung ist alsdann nach Weber:

$$\mu \frac{d^2 r}{d t^2} = \frac{e e'}{r^2} \left\{ 1 - \frac{1}{cc} \cdot \left(\frac{d r}{d t} \right)^2 + \frac{2 r}{cc} \cdot \frac{d^2 r}{d t^2} \right\} + R. \tag{1}$$

Setzen wir mit Weber:

$$\frac{2 e e'}{c c \mu} = \varrho,$$

so können wir diese Gleichung schreiben:

$$\mu\left(1-\frac{\varrho}{r}\right)\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{ee'}{r^2}\left\{1-\frac{1}{cc}\cdot\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}+R. \qquad (1a)$$

In dieser Form hat sie die Form einer gewöhnlichen Be-
41 wegungsgleichung, wo rechts die auch von der Geschwindigkeit abhängige Kraft steht, und der Ausdruck links sich nur dadurch von den gewöhnlichen Gleichungen dieser Art unterscheidet, dass der Coëfficient der Beschleunigung nicht einfach die Masse ist, sondern eine Differenz, welche positiv bleibt, so lange $r > \varrho$, aber gleich Null wird, wenn $r = \varrho$, und negativ, wenn $r < \varrho$. Wir wollen ϱ im Folgenden die *kritische Entfernung* nennen.

Die *Weber*'sche Voraussetzung, dass die letztgenannten Fälle nicht eintreten könnten, werden wir nachher discutiren. Wenn sie aber doch eintreten sollten, so wird die Beschleunigung unendlich gross werden müssen, so oft $r = \varrho$, und sie wird in ihrem Zeichen dem Werthe der Kraft entgegengesetzt werden müssen, wenn $r < \varrho$ ist. Es wird alsdann *eine jede Kraft, welche die Masse μ in Richtung der wachsenden r vorwärts zu treiben strebt, bewirken, dass sie im Gegentheil rückwärts beschleunigt wird und umgekehrt*, und ich bitte wohl zu bemerken, dass dies keineswegs nur eine Eigenthümlichkeit der elektrischen Abstossungskraft ee'/rr sein würde, der man einige sonderbare Eigenthümlichkeiten vielleicht nachsehen würde, und die also in diesem Falle, wenigstens bei mässigen Werthen der Geschwindigkeit dr/dt, die Masse m, statt abzustossen, im Gegentheil heranziehen würde; sondern dasselbe würde auch gelten für die Einwirkung *jeder beliebigen anderen mechanischen Kraft*. Die Masse m wird sich verhalten, als hätte sie *negative Trägheit*.

Noch einfacher treten diese Verhältnisse heraus, wenn wir die Gleichung (1) mit dr/dt multipliciren, um die Gleichung für die Constanz der Energie zu bilden. Wir erhalten dann:

$$\tfrac{1}{2}\mu\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d^2r}{dt}\,dt=-\frac{d}{dt}\left[\frac{ee'}{r}\left\{1-\frac{1}{cc}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\}\right]dt+R\cdot\frac{dr}{dt}dt. \qquad (2)$$

Das letzte Glied ist die Arbeit, welche die Kraft R in der Zeit dt leistet. Setzen wir:

$$\int_0^t R \cdot \frac{dr}{dt} dt = \mathfrak{R},$$

so ergiebt die Integration:

$$\tfrac{1}{2}\mu\left(1 - \frac{\varrho}{r}\right)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{ee'}{r} = \text{Const.} + \mathfrak{R}.$$

Die Grösse $\mathfrak{R}$ braucht in dieser Gleichung nicht nothwendig eine von der Art der Bewegung unabhängige Function der Coordinaten zu sein. Legen wir den Anfangspunkt der Zeit 42
t auf einen Augenblick, wo $dr/dt = 0$ ist, setzen auch $\mathfrak{R}$ für denselben gleich Null, und $r = \mathfrak{r}$, so ist:

$$\tfrac{1}{2}\mu\left(1 - \frac{\varrho}{r}\right)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = ee'\left(\frac{1}{\mathfrak{r}} - \frac{1}{r}\right) + \mathfrak{R}. \tag{2a}$$

Wenn nun $\mathfrak{r} > \varrho$ ist, das heisst das Theilchen μ sich im Anfang jenseits der kritischen Distanz befindet, ferner R einen solchen negativen Werth hat, dass

$$R + \frac{ee'}{r^2} < 0$$

ist, so wird die rechte Seite von Gleichung (2a) für negative Werthe von dr/dt positiv sein, und e sich dem e' nähern, die Geschwindigkeit wachsen, zuletzt unendlich werden, sobald $r = \varrho$ geworden ist.

Es braucht hierbei also die Kraft R nur eine endliche Grösse zu haben, und durch eine endliche Strecke hin zu arbeiten, also einen endlichen Betrag an Arbeit $\mathfrak{R}$ zu leisten, um der Masse μ unendliche Geschwindigkeit mitzutheilen. Es geht hieraus zunächst hervor, dass es keineswegs nöthig ist, der Masse μ eine übermässig grosse Geschwindigkeit im Anfange mitzutheilen. In meiner früheren Arbeit war dies nur dadurch bedingt, dass ich keine Kraft R hinzugenommen hatte, und also die ganze Arbeit, welche nöthig ist die Masse μ gegen die elektrische Abstossungskraft bis ϱ heranzutreiben, ihr von Anfang an in Gestalt einer grossen Geschwindigkeit mitgegeben sein musste.

Da die hier gemachte kleine Abänderung des vorliegenden Beispieles die Nothwendigkeit einer grossen Anfangsgeschwindigkeit beseitigt, wird es unnöthig sein, die principiellen Bedenken zu erörtern, welche Hrn. Weber's Widerspruch gegen die Zulässigkeit einer so grossen Anfangsgeschwindigkeit (grösser als $\sqrt{2}$ mal der Lichtgeschwindigkeit) hervorrufen könnte.

§ 10. Ist die kritische Entfernung ϱ immer eine moleculare Entfernung?

Der zweite Einwand von Hrn. W. Weber gegen die Anwendbarkeit der von mir aus dem eben besprochenen Beispiel gegen seine Theorie gezogenen Schlüsse ist auf die Annahme gestützt, dass die Entfernung ϱ eine ausserordentlich kleine, nur moleculare Entfernung sei, sodass was innerhalb derselben geschieht überhaupt unserer Wahrnehmung gar nicht zugänglich sei, oder durch das gleichzeitige Eingreifen anderer
43 molecularer Kräfte gehemmt werde, wie ja z. B. auch das Unendlichwerden der Geschwindigkeit zweier gravitirender Massenpunkte, wie es für die Entfernung $r = 0$ eintreten müsste, dadurch vermieden wird, dass die molecularen Kräfte, welche der Volumverminderung beider Massen widerstehen, in das Spiel kommen, ehe die Entfernung Null erreicht wird.

Der Werth der Entfernung ϱ ist:

$$\varrho = \frac{2ee'}{cc\mu}.$$

Ist das elektrische Theilchen e nur mit seiner eigenen Masse behaftet, so wird e/μ irgend einen bestimmten Werth β haben. Enthält μ auch noch ponderable Masse, so wird $e/\mu < \beta$ sein.

Ueber den Werth von β wissen wir bisher gar nichts; es steht also der von Weber gemachten Annahme, dass $2e/cc\mu = \beta/cc = b$ eine ausserordentlich kleine Grösse sei, wenigstens nichts entgegen. Nur geht diese Annahme aus den bisher bekannten Thatsachen keineswegs hervor, sondern sie ist eben eine neue Annahme, welche Hr. Weber erst gemacht hat, um meinen Einwänden zu entgehen. Von der Masse μ, wenn diese keinen ponderablen Bestandtheil enthält, weiss man nur, dass sie so

klein ist, dass sie sich bisher allen Messungen entzogen hat, während c allerdings sehr gross ist, aber doch gemessen werden konnte. Eben deshalb aber ist der Werth von $\mu c c$ aus erfahrungsmässigen Daten nicht zu bestimmen, und es mag jede Hypothese über ihn als erlaubt angesehen werden.

Aber wenn auch b eine äusserst kleine Grösse ist, so ist ϱ doch nicht allein von b abhängig, sondern es ist $\varrho = b e'$, und e' kann noch jede beliebige Grösse haben, folglich auch ϱ. Dabei ist wohl zu beachten, dass wenn wir uns e' als eine kugelförmige Masse von bestimmter Dichtigkeit denken wollten, sei es als elektrisches Fluidum, sei es als einen mit Elektricität einer Art durchdrungenen oder bedeckten Isolator, bei wachsendem e' der Durchmesser dieser Kugel wie $\sqrt[3]{e'}$ oder wie $\sqrt[2]{e'}$ wachsen würde, je nachdem e' im Innern oder an der Oberfläche angesammelt ist, ϱ aber wie e' selbst, also viel schneller, und dass wir also durch entsprechende Vergrösserung von e' der Grösse ϱ jede beliebige endliche Grösse, und ihrem Endpunkt jeden beliebigen Abstand von der Oberfläche der elektrischen Masse e' geben können.

Daher ist auch weiter schon hier klar, dass, wenn wir e'
immer grösser und grösser werden lassen, schliesslich die 44
kritische Entfernung ϱ zum Durchmesser der Masse e' jedes beliebig grosse Verhältniss erreichen kann, sodass zuletzt auch dieser Durchmesser wieder gegen ϱ verschwindend klein wird, und dann das einfache Weber'sche Gesetz wieder angewendet werden kann, wie es für zwei Massenpunkte gilt. Für die dazwischen liegenden Fälle, wo die linearen Dimensionen von e' endlich gegen ϱ sind, würden dagegen Integralausdrücke zu bilden sein, von denen wir einige der einfachsten Formen im nächsten Paragraphen bilden werden.

Hr. Weber selbst hat einen etwas anderen Ausdruck für ϱ gewonnen, weil er beide elektrische Massen als beweglich betrachtet; sind deren träge Massen μ und μ', so ist der Werth:

$$\varrho = \frac{e e'}{c c} \cdot \frac{\mu + \mu'}{\mu \mu'} .$$

Lässt man e' und μ' sehr gross werden, so führt dieser Ausdruck auf dieselben Schlüsse, die ich eben gezogen habe.

Wenn man also nicht willkürliche, und durch den ursprünglichen Sinn des Weber'schen Gesetzes in keiner Weise gebotene Beschränkungen für die Grösse der elektrischen Quanta e und e' festsetzen will, so folgt aus den angestellten Betrachtungen, dass, selbst wenn man Hrn. Weber's Annahme über den Werth der Constanten $e/\mu cc$ acceptirt, die kritische Entfernung ϱ keineswegs immer eine moleculare Entfernung sein wird, sondern jede beliebige endliche Grösse erreichen kann. Es kann also das Zustandekommen unendlicher Geschwindigkeit der bewegten Masse μ, oder dieses Zustandes, den ich kurz als negative Trägheit bezeichnet habe, innerhalb der Entfernung ϱ auch durch Molecularkräfte keineswegs verhindert werden.

Wenn nun $\varrho = be'$ eine endliche Grösse ist, so wird die elektrische Abstossungskraft, welche von der Kraft R des § 9 überwunden werden müsste, im Maximo sein:

$$\frac{ee'}{\varrho^2} = \frac{c^2\mu}{2\varrho} = \frac{c^2\mu}{2be'}.$$

Je grösser e' und somit ϱ wird, desto kleiner wird die Kraft, die zur Annäherung bis zur Grenze ϱ nöthig wird, sodass schliesslich jede der Masse μ proportionale Kraft, wie die Schwere $g\mu$, bei hinreichender Vergrösserung von e' dazu ausreichen würde.

Nun ist die Constante c gemessen und sehr gross gefunden
45 worden, die Constante b von unbekannter Grösse und, nach Hrn. Weber's Annahme, vielleicht sehr klein. Dann würde es allerdings für unsere praktischen Hülfsmittel wahrscheinlich unmöglich werden, soviel Elektricität e' zu sammeln, dass die Schwere oder eine zur Schwere in endlichem Verhältnisse stehende Kraft, die allein auf die Masse μ wirkte, für die Ausführung des Versuches zureichte. Wenn wir aber das Weber'sche Gesetz als ein wirklich elementares anerkennen sollen, als ein solches, welches den letzten Grund der betreffenden Erscheinungen vollständig ausspricht, und nicht nur als einen angenähert richtigen Ausdruck der Thatsachen für gewisse engere Grenzen, so müssen wir verlangen, dass es, auch auf Objecte von den denkbar grössten Dimensionen angewendet, Folgerungen gebe, die physikalisch möglich sind.

Uebrigens bemerke ich noch, dass die in diesem Falle verlangte Kraft wieder nur dann so gross ausfallen müsste, wenn dieselbe ihren Angriffspunkt nur in der Masse μ haben sollte. Drängt man dagegen die Masse μ vorwärts durch eine andere Masse M, welche beliebig gross sein, und der Angriffspunkt beliebig grosser, der Abstossung von μ überlegener Kräfte sein kann, so würde allerdings die Masse $M + \mu$ nicht in derselben Entfernung ϱ wie μ selbst unendliche Geschwindigkeit erhalten. Sowie aber die Grenze von ϱ überschritten wäre, würde μ von der elektrischen Abstossungskraft jetzt anziehend, und zwar im ersten Moment unendlich stark beschleunigt, sich von M trennen, und sich fortan, wie Hr. Weber schon gezeigt hat, im Innern der Kugel vom Radius ϱ bewegen in demjenigen Zustande, den ich vorher als negative Trägheit bezeichnet habe, und dessen Attribute wir im Folgenden näher kennen lernen werden.

§11. Die Gleichung der lebendigen Kraft für die Weber'schen Kräfte.

Das Beispiel des vorigen Paragraphen wies uns auf die Wirkung im Raume ausgedehnter elektrischer Massen hin, deren Resultate nur durch Integrationen zu bestimmen sind. Um diese zu vollziehen, wollen wir die Gleichung der lebendigen Kraft bilden. Diese ist zwar für zwei elektrische Massenpunkte schon von Hrn. Weber, für eine beliebige Anzahl solcher von Hrn. C. Neumann gebildet worden. Indessen werden die Consequenzen dieser Gleichung anschaulicher, wenn wir die einzelnen Theile etwas anders zusammengruppiren. Deshalb wiederhole ich hier ihre Ableitung mit einigen Aenderungen.

Es seien gegeben Massenpunkte in beliebiger Anzahl, 46
einzeln bezeichnet durch die verschiedenen Werthe ihres Index n. Es bezeichne e_n das nach elektrostatischen Einheiten gemessene elektrische Quantum des $n$ten Punktes, welches bei nicht elektrischen Massenpunkten auch gleich Null gesetzt werden kann, und μ_n sei die träge Masse, x_n, y_n, z_n die Coordinaten desselben Punktes. Die Componenten nicht elektrischer

Kräfte, die denselben angreifen, seien X_n, Y_n und Z_n. Dann ist nach Weber's Gesetz:

$$\left.\begin{aligned}\mu_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} = X_n + e_n \Sigma \Bigg[\frac{e_m (x_n - x_m)}{r^3_{n,m}} \Bigg\{1 - \frac{1}{cc}\left(\frac{d r_{n,m}}{dt}\right)^2 \\ + \frac{2 r_{n,m}}{cc} \cdot \frac{d^2 r_{n,m}}{dt^2}\Bigg\}\Bigg].\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Entsprechende Gleichungen ergeben sich für die beiden anderen Coordinaten jedes der Punkte n; im Ganzen also $3n$ Gleichungen. Man multiplicire die Gleichung (3) mit dx_n/dt, die übrigen Gleichungen mit den entsprechenden Differentialquotienten, und addire alle, so erhält man die Gleichung der lebendigen Kraft.

Um diese einfach zusammenzufassen, brauchen wir noch folgende Bezeichnungen:

q_n die resultirende Geschwindigkeit des Punktes n, also:

$$q_n^2 = \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_n}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_n}{dt}\right)^2, \quad (3a)$$

$\vartheta_{m,n}$ der Winkel zwischen der Richtung q_n und der über n hinaus verlängerten Richtung von $r_{n,m}$, also:

$$\frac{d r_{n,m}}{dt} = q_n \cos \vartheta_{m,n} + q_m \cos \vartheta_{n,m}, \quad (3b)$$

P das elektrostatische Potential:

$$P = \tfrac{1}{2} \Sigma\Sigma \left[\frac{e_n e_m}{r_{n,m}}\right], \quad (3c)$$

$$n \gtreqless m,$$

Q das elektrodynamische Potential:

$$Q = \frac{1}{cc} \Sigma\Sigma \left[\frac{e_n e_m}{r_{n,m}} q_n \cdot q_m \cdot \cos \vartheta_{n,m} \cdot \cos \vartheta_{m,n}\right], \quad (3d)$$

$$n \gtreqless m,$$

V die von den nicht elektrischen Kräften geleistete Arbeit:

$$\frac{dV}{dt} = \Sigma \left\{X_n \frac{dx_n}{dt} + Y_n \frac{dy_n}{dt} + Z_n \frac{dz_n}{dt}\right\}, \quad (3e)$$

p_n eine den Potentialfunctionen ähnlich gebildete Function für 47
den Punkt n:

$$p_n = \Sigma \left[\frac{e_m}{r_{n,m}} \cos^2 \vartheta_{m,n} \right], \tag{3f}$$

L endlich die lebendige Kraft, aber so berechnet, dass unter ihr alle mit Quadraten der Geschwindigkeiten multiplicirten Glieder zusammengefasst sind:

$$L = \tfrac{1}{2} \Sigma \left[\left(u_n - \frac{1}{cc} e_n p_n \right) q_n^2 \right]. \tag{3g}$$

Braucht man diese Bezeichnungen, so ist die Gleichung der lebendigen Kraft:

$$L + P - V - Q = \text{Const.} \tag{3h}$$

Sind die Coordinaten und die Geschwindigkeiten zur Zeit t_1 alle von gleichem Werthe, wie zur Zeit t_0, so haben L, P, Q auch wieder die gleichen Werthe, und es muss also:

$$V_1 - V_0 = 0$$

sein. Das heisst, während eines Cirkelprocesses, der zu den Anfangswerthen der Coordinaten und Geschwindigkeiten zurückführt, wird nicht mehr Arbeit nach aussen abgegeben, als von aussen empfangen. Dies ist die verallgemeinerte Form, in der die Herren Weber und C. Neumann das Gesetz von der Erhaltung der Energie gefasst haben.

Das elektrodynamische Potential hat hier dieselbe Form, wie in der ursprünglichen Form des Weber'schen Inductionsgesetzes. Die Glieder mit den Quadraten der Geschwindigkeiten sind dagegen, abweichend von den Herren Weber und Neumann, zur lebendigen Kraft hinübergezogen.

Andererseits zeigt die Gleichung (3g), dass die Coëfficienten der Geschwindigkeitsquadrate q_n^2 nicht nothwendig immer positiv zu bleiben brauchen, wie dies der Fall ist, wenn sie nur träge Massen vertreten, sondern auch negativ werden können. Somit lässt das Weber'sche Gesetz die Möglichkeit offen, dass sich gleichzeitig die positiv und die negativ genommenen q^2 in das Unendliche steigern, ohne dass die Potentiale der linken Seite der Gleichung (3h) unendlich zu werden brauchen, d. h. ohne dass die Massenpunkte sich einander auf unendlich kleine Distanzen nähern. In der gewöhnlichen Fas-

sung des Gesetzes von der Constanz der Energie sind alle q^2 mit nothwendig positiven Factoren multiplicirt, kein q^2 kann unendlich werden, ohne dass einerseits die lebendige Kraft unendlich wird, und andererseits die potentielle Energie um ein unendliches Quantum verkleinert wird. Nach dem Weber'schen Gesetz könnte bei einem endlichen Werthe der gesammten
18 Energie die lebendige Kraft der ponderablen Theile in das Unendliche steigen, freilich müsste gleichzeitig auch die Geschwindigkeit der elektrischen Bewegungen ebenfalls in das Unendliche gesteigert werden.

Weiter ist hier zu bemerken, dass in der Differenz:

$$\mu_n - \frac{1}{cc} e_n p_n = \mathfrak{m}_n,$$

welche die Stelle der Masse einnimmt, nicht mehr ein einzelnes elektrisches Theilchen der Masse μ_n gegenübergestellt ist, sondern in der Function p_n, welche nach Art einer Potentialfunction zusammengesetzt ist, eine beliebig grosse Menge anderer elektrischer Massen e_m, die jedenfalls so gross gemacht werden kann, dass sie grösser wird als $\mu_n cc / e_n$, wobei die Massen e_m durchaus nicht nahe an der Masse e_n zu liegen brauchen.

Die Grösse p kann betrachtet werden als die Potentialfunction der vorhandenen übrigen freien Elektricität, wobei nur deren elektrostatische Quanta mit dem immer positiven Factor $\cos^2(\vartheta_{m,n})$ multiplicirt sind. Denken wir nun alle freie Elektricität gleichnamig und den grösseren Theil derselben an einer Fläche abgelagert, dann ohne Veränderung ihrer Dichtigkeit die linearen Dimensionen des Körpersystems auf das n-fache vergrössert, so wird p auf das n-fache wachsen. Ist die Elektricität, von der p abhängt, aber continuirlich im Raume verbreitet, so wächst in solchem Falle p_n auf das n^2-fache. In beiden Fällen können wir durch eine solche Veränderung jedenfalls zu Werthen von p unter gleichzeitiger Vergrösserung der Entfernungen zwischen den Massen e_m und e_n kommen, bei denen der die Masse vertretende Factor:

$$\mu_n - \frac{1}{cc} e_n p_n = \mathfrak{m}_n$$

negativ wird, und wo es möglich wird, die Massen μ_n mit stets zunehmender Geschwindigkeit beliebig grosse Arbeit leisten zu lassen. Praktisch hätten wir dann das Perpetuum mobile, wenn auch theoretisch die erweiterte Form des Gesetzes von der Erhaltung der Energie, wie es in Gleichung (2) ausgesprochen ist, gewahrt bliebe.

§ 12. Die Folgen des Weber'schen Gesetzes im Falle fester gleichmässiger elektrischer Belegung einer Kugel.

Die eben angedeuteten Folgen treten am einfachsten und übersichtlichsten auf, wenn wir annehmen, dass nur ein einzelner Massenpunkt, den wir ohne Index lassen, μ mit dem 49
elektrischen Quantum e beweglich sei, alle übrige Elektricität aber festgeheftet sei an der Oberfläche einer Kugel, an der sie eine gleichmässige Belegungsschicht bilde. Praktisch könnte der Fall vorkommen, wenn die Kugel aus isolirendem Material bestände. Wir wollen beide Fälle untersuchen, sowohl den, wo das μ sich innerhalb der Kugel bewegt, und diese hohl ist, als auch, wenn μ ausserhalb der Kugel liegt.

Diese Kugelfläche habe den Radius R, das Quantum Elektricität auf der Flächeneinheit ihrer Oberfläche sei ε. Ferner seien ξ, η, ζ die Coordinaten des Punktes μ zur Zeit t, und x, y, z die des Flächenelements $d\omega$ auf der Oberfläche der Kugel vom Radius R; die Entfernung zwischen μ und $d\omega$ sei r.

Zur Berechnung von p setzen wir voraus, die x-Axe sei so gelegt, dass sie der eben der Geschwindigkeit q zukommenden Richtung parallel sei. Dann ist nach Gleichung (3f):

$$p = \int \frac{\varepsilon\,(x-\xi)^2}{r^3}\,d\omega,$$

wo die Integration über die ganze Kugelfläche auszudehnen ist.

Nun ist aber:

$$\frac{d^2 r}{d\xi^2} = \frac{1}{r} - \frac{(x-\xi)^2}{r^3},$$

also:

$$p = \int \frac{\varepsilon}{r}\,d\omega - \frac{d^2}{d\xi^2}\int \varepsilon r\,d\omega,$$

was wir zur Abkürzung schreiben wollen:

$$p = s - \frac{d^2\sigma}{d\xi^2}.$$

Der erste Theil s ist bekanntlich ausserhalb der Kugel, wenn ϱ den Abstand des Punktes μ von deren Mittelpunkt bezeichnet:

$$s_a = \frac{4\pi R^2 \varepsilon}{\varrho},$$

innerhalb der Kugel:

$$s_i = 4\pi R \varepsilon.$$

Die Grösse σ ist durch Integration leicht zu finden. Wenn η der Winkel zwischen dem nach $d\omega$ geführten Radius der Kugel und der positiven x-Axe ist, so ist:

$$\sigma = \int_0^\pi \sqrt{R^2 + \varrho^2 - 2\varrho R \cos\eta} \, . \, 2\pi \sin\eta \, . \, R^2 \, d\eta.$$

50 Das unbestimmte Integral hiervon ist:

$$\frac{2\pi R}{3\varrho} [R^2 + \varrho^2 - 2\varrho R \cos\eta]^{\frac{3}{2}}.$$

Zwischen den Grenzen $\eta = 0$ und $\eta = \pi$ genommen, giebt dies für den inneren Raum:

$$\sigma_i = \frac{2\pi R}{3\varrho} [(R + \varrho)^3 - (R - \varrho)^3] = \frac{4\pi R}{3} [3R^2 + \varrho^2],$$

für den äusseren Raum der Kugel:

$$\sigma_a = \frac{2\pi R \varepsilon}{3\varrho} [(R + \varrho)^3 - (\varrho - R)^3] = \frac{4\pi R^2 \varepsilon}{3\varrho} [3\varrho^2 + R^2].$$

Daraus ergiebt sich für den inneren Raum:

$$p_i = 4\pi\varepsilon R - \frac{8\pi\varepsilon R}{3} = \frac{4\pi\varepsilon}{3} R \tag{4}$$

und für den äusseren Raum:

$$p_a = \frac{4\pi\varepsilon R^2}{\varrho} - 4\pi\varepsilon R^2 \left[\frac{1}{\varrho} - \frac{(x-\xi)^2}{\varrho^3}\right] - \frac{4\pi R^4 \varepsilon}{3} \left[-\frac{1}{\varrho^3} + \frac{3(x-\xi)^2}{\varrho^5}\right],$$

oder wenn wir den Winkel zwischen dem Radius-Vector r und der Richtung von q mit η bezeichnen,

$$p_a = \frac{4\pi\varepsilon R^2}{\varrho} \cos^2\eta \, . \left[1 - \frac{R^2}{\varrho^2}\right] + \frac{4\pi\varepsilon R^4}{3\varrho^3}. \tag{4a}$$

Im Inneren einer solchen Kugel hat also p_i einen von dem Ort und der Bewegungsrichtung von μ unabhängigen constanten Werth, und wenn:

$$\frac{4\pi\varepsilon}{3} R > \frac{\mu}{e} cc$$

ist, so ist für jede Bewegung von μ innerhalb der Hohlkugel das Aequivalent der Masse $\mathfrak{m}$ negativ.

Was die übrigen Grössen in der Gleichung (3h) betrifft, so wird innerhalb der Kugel:

$$P = e \,.\, 4\pi\varepsilon R^2,$$
$$Q = 0, \quad \text{weil} \quad q_n = 0;$$

also wenn wir die constante Grösse P mit in die Integrationsconstante C einbegreifen, wird Gleichung (3h):

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{m} q^2 + V + C = 0. \tag{3i}$$

Dabei ist es auch offenbar gleichgültig, ob die Masse μ in einen Punkt concentrirt ist, wie bisher angenommen wurde, oder ob sie über ein körperliches Volumen von beliebiger Grösse 51
ausgebreitet ist, wenn nur ihre Theile relativ gegeneinander unbeweglich sind. Die Grössen p, P, Q haben eben für alle Theile von μ denselben Werth, wo diese auch liegen mögen. Sind nun die Massen e_n gross genug, dass die in diesem Falle constante Grösse $\mathfrak{m}$ negativ wird, so haben wir durch das ganze Innere der Kugel gleichmässig diese verkehrte Art der Mechanik, dass bei vorwärts treibender Kraft der Punkt μ rückwärts beschleunigt wird, und umgekehrt; ferner die potentielle Energie der treibenden Kraft und die Geschwindigkeit q gleichzeitig wachsen, während in allen Fällen der gewöhnlichen Mechanik die eine immer abnehmen muss, während die andere wächst.

Aus der Gleichung (3i) folgt zunächst, dass, wenn $\mathfrak{m}$ negativ ist und q nicht gleich Null ist, eine solche Bewegung nie aufhören kann, ohne dass von aussen her mittels der Kraft, deren Potential V ist, Arbeit geleistet werde. *Das Arbeitsäquivalent einer solchen bewegten Masse ist negativ, ist kleiner, als es im Zustande der Ruhe sein würde, und die Ruhe kann also ohne Arbeitsleistung von aussen nicht wieder hergestellt werden.*

Lassen wir nun das Theilchen μ auf irgend einem vorgeschriebenen Wege, dessen Länge wir mit s bezeichnen, sich innerhalb der Kugel bewegen, so ist:

$$q = \frac{ds}{dt}.$$

Differentiiren wir unter diesen Annahmen, wo p constant ist, die Gleichung (3h) nach t, so erhalten wir mit Weglassung des Factors ds/dt:

$$\mathfrak{m}\frac{d^2 s}{dt^2} = S, \tag{4b}$$

wenn wir mit S die Componente der treibenden Kraft in Richtung des Weges s bezeichnen. Ist nun $\mathfrak{m}$ negativ, so wird die Kraft S immer in verkehrtem Sinne einwirken; wenn sie der Bewegung entgegenwirkt, wird sie diese immer beschleunigen, und wenn dasselbe fortdauernd oder immer wiederholt geschieht, sie schliesslich in das Unendliche steigern.

Um die Folgen davon zunächst an einem einfachsten Beispiele solcher Art zu veranschaulichen, dass dabei Constanz des mechanischen Theiles der Arbeit stattfindet, setzen wir voraus, dass man ruhende elastische Kugeln von der Masse M auf die vorgeschriebene Bahn der Masse μ bringe. Der Erfolg jedes Stosses lässt sich in gewöhnlicher Weise berechnen. Das
52 Princip von der Erhaltung des Schwerpunktes, welches, wie man leicht einsieht, für das Massenäquivalent $\mathfrak{m}$ hier gerade ebenso gelten würde, wie für eine wirkliche Masse, giebt, wenn q_0 die Geschwindigkeit von μ vor dem Stosse, q_1 und Q die von μ und M nach dem Stosse bezeichnen:

$$\mathfrak{m} q_0 = \mathfrak{m} q_1 + MQ.$$

Das Princip von der Erhaltung der Kraft giebt:

$$\mathfrak{m} q_0^2 = \mathfrak{m} q_1^2 + MQ^2.$$

Ist $M + \mathfrak{m}$ negativ, so erfolgt der Stoss in gewöhnlicher Weise. die beiden Massen trennen sich wieder, M eilt vorwärts mit der Geschwindigkeit $2\mathfrak{m} q_0/(M + \mathfrak{m})$, und μ bleibt zurück mit der vergrösserten Geschwindigkeit $(\mathfrak{m} - M) q_0/(\mathfrak{m} + M)$, wobei zu bemerken ist, dass wegen der gemachten Annahme Zähler und Nenner beider Brüche negativ sind. Somit können wir durch

das bewegte elektrische Theilchen beliebig oft ponderable Massen fortstossen lassen und ihnen Geschwindigkeit ertheilen, während gleichzeitig die Geschwindigkeit der elektrischen Masse μ immer mehr zunimmt.

Wäre $M > (-\mathfrak{m})$, so würden die beiden stossenden Massen nicht voneinander prallen, sondern sich immer fester und fester aneinander drängen mit wachsender Geschwindigkeit beider.

Ein anderer entsprechender Fall, wo die Kraft S aber keine Kräftefunction hat, wäre der, wo das Theilchen μ sich auf seinem vorgeschriebenen Wege s gegen einen Reibungswiderstand bewegte. Es würde mit wachsender Geschwindigkeit laufen müssen, und dabei immer steigende Wärmemengen bis in das Unendliche entwickeln. Dieser Fall würde auch mit dem eines elektrischen Stromes in dem Wege s zusammenfallen, letzteren als linearen Leiter gedacht, wenn wir mit Hrn. C. Neumann annehmen, dass bei jedem elektrischen Strome sich nur eine Art der Elektricität bewegt.

Bei der anderen Annahme über die elektrischen Ströme, wie sie den meisten Berechnungen der Herren Weber und Kirchhoff zu Grunde liegt, wonach sich immer gleiche Quanta entgegengesetzter Elektricität in entgegengesetzter Richtung mit gleicher Geschwindigkeit bewegen, fällt dagegen die besprochene Veränderung der trägen Masse fort, weil sie für die positiven und negativen bewegten Partikel entgegengesetztes Zeichen erhält. Diese Fälle werden wir im nächsten Paragraphen behandeln.

Es ist klar, dass die beiden hier gegebenen Beispiele das 53
Perpetuum mobile realisiren würden.

Es bleibt noch übrig zu erörtern, wie sich ein bewegtes Theilchen im äusseren Raume verhält. Hier ist das Massenäquivalent $\mathfrak{m}$ nicht für jede Art von Bewegung negativ, sondern wie die Gleichung (4a) zeigt, hängt p_a vom Werthe des Winkels η zwischen den Richtungen von r und q ab. Fallen beide zusammen, so ist:

$$p_a = \frac{4\pi\varepsilon R^2}{\varrho}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{R^2}{\varrho^2}\right),$$

was für den Fall, dass R/r unendlich klein wird, in den für einen einzelnen Massenpunkt geltenden Werth e_n/ϱ übergeht. Ist η dagegen ein rechter Winkel, so wird:

$$p = \frac{4\pi\varepsilon R^4}{3\varrho^3}.$$

Dicht an der Kugelfläche, wo $R = \varrho$, sind beide Werthe gleich, und gleich dem Werthe im Inneren der Kugel, sodass also der Unterschied der Richtungen sich erst in einiger Entfernung von der Kugel geltend macht.

Aus den vorstehenden Untersuchungen ergiebt sich, dass die physikalisch unzulässigen Folgerungen des Weber-schen Gesetzes durchaus nicht an moleculare Distanzen gebunden sind, sondern durch die Wechselwirkung elektrischer Theilchen über beliebig grosse Entfernungen hin zu Stande kommen können. Diese Folgerungen sind also nicht zu beseitigen durch die von Hrn. W. Weber selbst gemachte Annahme, dass $ee'/cc\mu$ eine sehr kleine Grösse sei; denn diese zerfällt schon an und für sich in zwei getrennte Annahmen, nämlich dass $e/cc\mu$, und dass e' sehr klein sei. Die letztere aber kann nicht allgemein gemacht werden, da gar kein allgemein geltender Grund ersichtlich ist, durch den die Grösse von e' beschränkt werden könnte; und wir haben gesehen, dass selbst, wenn man der angehäuften Elektricität ein gewisses Maximum der Dichtigkeit zuschreiben wollte, und also grössere Quanta e' über grössere Volumina oder Flächen ausgedehnt vorkommen müssten, dies an den Folgerungen nichts Wesentliches verändert.

Ebensowenig können jene unzulässigen Folgerungen beseitigt werden durch die Annahme von Hrn. C. Neumann,
54 dass in molecularen Distanzen zu der Weber'schen Kraft eine andere hinzukomme, die in grösseren Entfernungen gegen jene verschwinde. Derselbe hat den Theil der Weber'schen Kraft zwischen zwei elektrischen Massenpunkten, welcher mit dem Factor $1/cc$ behaftet ist, gesetzt gleich:

$$2ee' \cdot \frac{d\Psi}{dr} \cdot \frac{d^2\Psi}{dt^2}:$$

Dieser Ausdruck wird gleich der Weber'schen Kraft, wenn man setzt:

$$\psi = \frac{2\sqrt{r}}{c}.$$

Hr. C. Neumann nimmt an, dass in Wahrheit dieser Werth nur für grössere Entfernungen genau gelte, für sehr kleine aber davon in einer nicht näher definirten Weise abweiche.

Eine solche Aenderung im Werthe von ψ würde an der ganzen, von mir im vorigen Paragraphen gegebenen Deduction gar nichts ändern, weil dort alle relativ zu einander bewegten elektrischen Theilchen, für welche $d^2\psi / dt^2$ nicht gleich Null ist, in beliebig grossen Entfernungen voneinander liegen können.

§ 13. Folgerungen für die elektrischen Ströme.

Im vorigen Paragraphen wurde vorausgesetzt, dass nur eine Art von Elektricität in Bewegung sei; es wären die dort gezogenen Schlüsse, wie schon bemerkt, direct anwendbar auf elektrische Ströme in Leitern, wenn bei diesen, wie es Hr. C. Neumann in seiner letzten Arbeit angenommen hat, sich nur eine Elektricität bewegte, oder wenigstens eine mit grösserer Menge oder Geschwindigkeit als die andere. Wäre dies der Fall, so würde ein elektrischer Strom innerhalb einer mit hinreichender Menge festliegender gleichartiger Elektricität bekleideten Kugelhülle ein Arbeitsäquivalent haben, welches kleiner als in der Ruhe wäre, mit allen unzulässigen Consequenzen eines solchen.

Wenn dagegen angenommen wird, dass bei jeder elektrischen Strömung in einem Leiter gleiche Quanta Elektricität sich mit gleichen und entgegengesetzten Geschwindigkeiten bewegen, so werden die Schlüsse des vorigen Paragraphen unanwendbar, weil die träge Masse beider elektrischen Fluida durch äussere ruhende Elektricität in entgegengesetzter Weise verändert werden würde. In diesem Falle bleibt nur das elektro- 55
dynamische Potential, welches oben mit Q bezeichnet ist, übrig, um die Arbeit der Strömung negativ zu machen; und dies

sind gerade die Fälle, welche ich in meiner früheren Arbeit als möglich nachgewiesen habe. Für die Bewegung der Elektricität sind dabei Differentialgleichungen benutzt, die mit den von Hrn. Kirchhoff aus der Weber'schen Hypothese hergeleiteten zusammenfallen. Meinen Nachweis, dass diese Differentialgleichungen labiles Gleichgewicht der Elektricität in Leitern ergeben, glaubt Hr. C. Neumann durch folgende Erklärung zu beseitigen:

„Diese Differentialgleichungen aber beruhen nur theilweise auf jenem Grundgesetze, zum anderen Theil aber auf mancherlei anderen sehr hypothetischen (und bisher nicht einmal bestimmt formulirten) Voraussetzungen, sodass also jenes Grundgesetz durch ein gegen diese Differentialgleichungen geäussertes Bedenken nicht im Mindesten tangirt werden kann." Uebrigens hat, wie oben bemerkt, Hr. C. Neumann es nicht auf sich genommen, richtigere Differentialgleichungen an Stelle der von ihm angezweifelten zu setzen.

Ich erlaube mir deshalb hier zunächst die aus Hrn. Kirchhoff's Arbeit[1]) leicht heraus zu lesenden Voraussetzungen hier zusammenzustellen.

1) Derselbe benutzt den von Hrn. W. Weber selbst gegebenen Werth für die elektrodynamisch inducirten elektromotorischen Kräfte, welchen dieser unter der Voraussetzung abgeleitet hat, dass in jedem elektrischen Strome gleich grosse Quanta positiver und negativer Elektricität mit gleichen Geschwindigkeiten in entgegengesetzten Richtungen fliessen. Aus dieser Voraussetzung können die von Hrn. Kirchhoff gebrauchten Ausdrücke in der Form, wie er sie braucht, nach bekannten Methoden, ohne Schwierigkeit hergeleitet werden. Diese Annahme fällt übrigens mit der anderen zusammen, dass an jeder Stelle eines Leiters die absolute Menge beider elektrischer Fluida zusammen genommen stets constant ist. Dieselbe Annahme bedingt auch weiter, dass alle Anziehungskräfte, welche gleichzeitig auf die positive und negative Elektricität des Leiters ausgeübt werden, diesen

1) Pogg. Annalen Bd. 102. S. 529—533.

selbst zu bewegen streben müssen, da die beiden Elektricitäten nicht gleichzeitig ihren Ort verlassen können.[1])

2) Es wird vorausgesetzt, dass die elektrischen Fluida in dem Leiter continuirlich verbreitet sind, und ihre Geschwindigkeiten continuirliche Functionen der Coordinaten sind. Diese Voraussetzung liegt der Ausführbarkeit der über den Raum erstreckten Integrationen zu Grunde. 56

---

1) Bei diesem Punkte erlaube ich mir auf einen Fehler aufmerksam zu machen, den Hr. C. Neumann auf S. 409 des angeführten Aufsatzes in seinen Rechnungen begangen hat. Er behauptet daselbst unter (30), dass er durch seine Gleichungen (29) „den wichtigen Satz, dass die auf irgend eine ponderable Masse ausgeübte bewegende Kraft identisch ist mit der Resultante sämmtlicher distantiellen Kräfte, welche einwirken theils auf die ponderable Masse selber, theils auf die augenblicklich in ihr enthaltene elektrische Materie“ bewiesen habe, und fügt hinzu: „Man betrachtet diesen Satz gewöhnlich als selbstverständlich. Dass das indessen nicht der Fall sei, zeigt die hier für den Satz gegebene Deduction. Denn aus dieser Deduction geht hervor, dass die Richtigkeit des Satzes wesentlich geknüpft ist an die Voraussetzung, die elektrische Masse besitze keine oder nur eine verschwindend geringe Trägheit.“ Ich erstaunte nicht wenig, als ich diesen Satz las, denn in den Hypothesen, von denen Hr. C. Neumann ausging, und auf welche seine „Deduction“ gegründet ist, war über die mechanischen Beziehungen zwischen der sich bewegenden, hier nur positiven Elektricität und der Materie des Leiters nichts weiter angenommen, als dass die Elektricität der Reibung des Leitungswiderstandes und den voltaischen elektromotorischen Kräften (Schiebungskräften) unterworfen sei. Dass nun durch blosse Rechnung eine neue mechanische Beziehung zwischen beiden, zu welcher in den Prämissen kein Grund gelegt war, erzeugt werden sollte, machte mich neugierig das Verfahren kennen zu lernen, welches so etwas leisten konnte. Der Fehler ist einfach folgender: In Gleichung (25) kommt ein Summandus vor $p\, d^2\xi/dt^2$, worin p die träge Masse der positiven Elektricität, ξ deren x-Coordinate bezeichnet. Hr. Neumann setzt der von ihm erwähnten Annahme gemäss, die er erst einführt, nachdem die genannte Gleichung gebildet ist, $p = 0$ und lässt den genannten Summandus ausfallen. In Gleichung (24) aber ist $p\, d^2\xi/dt^2$ einer endlichen Kraft gleich gesetzt, und wenn also $p = 0$, so wird die Beschleunigung $d^2\xi/dt^2$ unendlich gross, aber das Product beider wird darum noch nicht Null, kann also aus Gleichung (25) auch nicht weggelassen werden. Vielmehr musste erwiesen werden, dass die Summe der Kräfte, welcher $p\, d^2\xi/dt^2$ gleich gesetzt ist, gleich Null sei, und dieser Beweis wird sich, so viel ich sehe, nur führen lassen, wenn der angeblich deducirte Satz (30) als Voraussetzung angenommen wird. (Weiteres unten S. 687.)

3) Es werden die Grundhypothesen des Ohm'schen Gesetzes gemacht, dass nämlich in jedem Augenblicke die elektrische Strömung so hoch steige, bis die durch den Leitungswiderstand erzeugte Gegenkraft der treibenden elektromotorischen Kraft gleich sei. Es liegt hierin die Annahme, dass die elektrischen Fluida keine träge Masse haben. Diese sub 3) hingestellte Annahme hat Hr. C. Neumann in seiner letzten Arbeit in gleicher Weise gemacht.

Andere Hypothesen kann ich aus Hrn. Kirchhoff's Behandlung des Problems nicht herausfinden. Die von Hrn. Bertrand erhobenen und im folgenden Paragraphen besprochenen Bedenken existiren nicht für Jemanden, der vom Weber'schen Gesetze ausgeht, da durch dieses der Sinn der resultirenden Kraft bestimmt gegeben ist.

57 Was die unter 3) gemachte Annahme betrifft, dass die elektrischen Fluida im Leiter sich ohne träge Masse bewegten, so habe ich diese in dem betreffenden § 5 meines früheren Aufsatzes sogar noch fallen lassen, und vielmehr die allgemeineren von Hrn. Lorberg aufgestellten Differentialgleichungen benutzt, welche eine solche träge Masse annehmen. Dieselbe könnte den elektrischen Fluidis, als solchen, direct angehören, oder auch irgend einer Art der Bewegung der ponderablen Masse des Leiters zukommen, welche aber immer der Stromstärke genau proportional bleiben müsste, und nicht wie die Wärmebewegung mit der Temperatur unabhängig von der augenblicklichen Stromstärke gross oder klein werden dürfte.

Diese von Hrn. Lorberg benutzte Hypothese einer trägen Masse der bewegten Elektricität (oder auch träger Masse, welche von der Elektricität mitbewegt wird) beseitigt nun allerdings, wie meine frühere Abhandlung zeigt, das labile Gleichgewicht in Körpern von kleinen Dimensionen, aber lässt es bestehen in Körpern von grossen Dimensionen.[1]) Und schon dieser Umstand genügt, um zu zeigen, dass auch bei den Strömungen unter Voraussetzung der Kirchhoff'schen Annahmen das labile Gleichgewicht gar nicht von den Einwir-

1) Borchardt's Journal Bd. LXXII, S. 95. Erläuterung zu Gleichung (8c). — S. oben S. 589.

kungen abhängt, die in molecularen Abständen erfolgen, sondern im Gegentheil von den Fernwirkungen der Weber'schen Kräfte.

Unser oben aufgestelltes Gesetz (3h), welches dem für die Erhaltung der Energie analog ist, lässt auch erkennen, dass abgeänderte Annahmen über die molecularen Vorgänge und molecularen Kräfte im elektrischen Strome dem Fehler nicht abhelfen können.

Sind überall nur gleiche Mengen positiver und negativer Elektricität in Bewegung, so hebt sich, wie schon bemerkt, das zur Masse hinzugefügte Glied fort, und negative Werthe der Arbeit können dann nur durch die Potentialgrössen $+ P - Q$ hervorgebracht werden, die auf der linken Seite der Gleichung (3h) stehen. Dass übrigens diese negativ werden können, zeigen meine früheren Untersuchungen in § 5, da ja die Berechnung dieser Grössen unabhängig ist von der Art, wie die Bewegung in dem Leiter weiter verläuft. Erst diese letztere wird durch die angezweifelten Differentialgleichungen bestimmt. Da P seiner Natur nach nothwendig immer positiv ist, so kommt es hauptsächlich auf das Vorzeichen und den Werth von Q an. Setzen wir nun:

$$L = \Sigma(mq^2),$$

wo die Summe über alle trägen, ponderablen oder impon- 58
derablen Massen auszudehnen ist, so ist:

$$L + P - Q + V = \mathfrak{A}$$

die gesammte Summe der nach Weber's Annahmen durch die Elektricität bedingten Arbeit. Setzen wir hier voraus, dass V nur die Potentialfunction von Molecularkräften irgend welcher Art sei, also auch die Ergänzungen umfasse, welche etwa noch an der Weber'schen Kraft anzubringen sind, die aber jenseits einer kleinen Distanz gänzlich verschwinden sollen, und vergrössern wir die sichtbaren Dimensionen des betreffenden Körpersystems auf das $n$fache, so aber, dass die Molecularstructur, die molecularen Vorgänge und die Geschwindigkeiten dieser, wie der elektrischen Strömungen unverändert bleiben (die Zahl der Molekeln also auf das n^3fache wächst): so werden L und V wachsen im Verhältnisse $1:n^3$, aber P und Q werden wachsen

im Verhältnisse $1:n^5$. Bei genügender Vergrösserung der Dimensionen werden also schliesslich diese letzteren Grössen immer den Ausschlag geben, und wenn $P-Q$ negativ ist, wird also dann die gesammte Arbeit negativ werden, und wird, wenn ihr durch Reibung mit Wärmeentwickelung noch weitere Verluste zugefügt werden, immer grössere negative Werthe erreichen müssen.

Gehen wir also von einem Zustande einer leitenden Kugel aus, wo im ersten Moment der Bewegung die mittlere Dichtigkeit der Elektricität überall gleich Null ist, dagegen entweder centrifugale oder centripetale Strömungen gleichmässig in allen Radien bestehen, übrigens mit beliebiger Vertheilung der Intensität in einzelnen concentrischen Kugelschichten, so wird $P=0$, Q positiv sein; und welche lebendige Kraft und Arbeit für die molecularen Processe verwendet sein mag, es wird immer nur auf hinreichende Grösse der Dimensionen der leitenden Kugel ankommen, damit die Arbeit negativ werde, und die elektrische Bewegung nicht ohne neuen Zuschuss von Arbeitskraft von aussen her zur Ruhe gebracht werden kann!

Schliesslich erlaube ich mir die gegenwärtige Lage dieser Discussion folgendermaassen zusammenzufassen, so weit sie das Weber'sche Gesetz betreffen:

1) Die elektromagnetischen und elektrodynamischen Erscheinungen sind keineswegs in der Art von den übrigen Vorgängen in der unorganischen Natur unterschieden, dass es nothwendig wäre für ihre Erklärung eine andere Art von Grundkräften, nämlich solche, die nicht blos von der Lage der wirkenden Massen, sondern auch von deren Bewegung abhängen,
59 anzunehmen. Dies geht aus der Theorie von Maxwell hervor, welche die genannten Erscheinungen nicht auf Fernkräfte, sondern auf eine continuirlich im Aether sich fortpflanzende Bewegung zurückführt. Die dabei angenommene Wirkungsweise zwischen zwei aneinander stossenden Volumenelementen des Aethers ist zwar eine andere, als die uns von den fest-elastischen Körpern her bekannte, aber sie lässt sich durch einfache mechanische Vorrichtungen nachahmen, ist also eine solche, wie sie durch die uns wohlbekannten mechanischen Kräfte hervorgebracht werden könnte.

2) Die Rückführung dieser Erscheinungen auf Fernkräfte, die von der Bewegungsweise der wirkenden Theilchen abhängen sollen, wie dies in der Weber'schen Hypothese geschehen ist, ergiebt die Möglichkeit von Bewegungen, bei denen das Arbeitsäquivalent des Massensystems kleiner wird als in der Ruhe, und desto kleiner, je schneller die Bewegung. Daran knüpfen sich physikalisch unzulässige Folgerungen, nämlich die Möglichkeit ein Perpetuum mobile herzustellen und labiles Gleichgewicht der Elektricität in ihren Leitern.

3) Diese unzulässigen Folgerungen werden durch die von den Herren W. Weber und C. Neumann gemachten Annahmen einer trägen Masse der elektrischen Fluida und von molecularen Zusatzkräften höchstens für Leiter von geringen Dimensionen beseitigt, und können überhaupt durch Hypothesen, welche die molecularen Vorgänge und Kräfte betreffen, immer nur für solche beseitigt werden; sie bleiben bestehen für Leiter von hinreichender Grösse und elektrische Quanta von hinreichender Grösse.

4) So lange keine Hülfshypothesen gefunden sind, welche das labile Gleichgewicht und die Möglichkeit in das Unendliche steigender Bewegung vollständig beseitigen, scheint mir, dass überhaupt jede Erklärung aus der Weber'schen Hypothese, auch wo eine solche scheinbar gelingt, ungenügend begründet ist. Was hilft es zu berechnen, dass constante Ströme solche und solche Anziehungskräfte und bei ihrer gegenseitigen Näherung solche und solche inducirende Kräfte aufeinander ausüben würden, wenn nach dem zu Grunde gelegten Gesetze constante Ströme und Ruhe der Elektricität in einem Leiter gar nicht bestehen können.

Um das Verhältniss anschaulicher zu machen, erlaube ich mir einen Vergleich. Wenn Jemand eine physikalische Erklärung gründen wollte auf Strömungen, die in Wasser vorgingen, welches in einem unten geschlossenen Gefässe mit horizontaler Grenzfläche, also in labilem Gleichgewichte, über Luft geschichtet ist, so würde eine solche Erklärung eben
wegen des labilen Gleichgewichts einer so suspendirten Wasser- 60
masse offenbar sofort verworfen werden, obgleich in engen Röhren und Spalten, wo die molecularen Capillarkräfte wirken,

wirklich stabiles Gleichgewicht bestehen, und eine solche Erklärung zulässig erscheinen könnte. Wenn es aber in der Natur der Sache läge, dass dieselbe Erklärung auch auf Gefässe von vielen Quadratfussen Querschnitt anwendbar sein müsste, wo das Gleichgewicht jedenfalls labil ist, so würde dieselbe eben darum auch für die engen Gefässe als unzureichend verworfen werden müssen.

Ganz ähnlich verhält es sich mit dem Weber'schen Gesetze. Die Annahme von träger Masse der Elektricität oder von Molecularkräften könnte das Gleichgewicht in kleinen Leitern vielleicht stabil machen; in Leitern von grossen Dimensionen aber würde es labil bleiben, und wir können das genannte Gesetz deshalb weder für die letzteren, noch für die ersteren als den richtigen Ausdruck der letzten Ursache anerkennen.

Was die frühere Hypothese von Hrn. C. Neumann betrifft, wonach das Potential der elektrischen Massen Zeit zu seiner Verbreitung brauchen soll, so stimmt sie nur für geringe Geschwindigkeiten der Elektricitäten mit dem Weber'schen Gesetze überein. Die von mir gezogenen Folgerungen auf das Zustandekommen unendlicher Geschwindigkeiten nach letzterem Gesetze sind also auf jene C. Neumann'sche Hypothese nicht ohne weitere Untersuchung anwendbar. Wohl aber bleibt unverändert auch für diese Hypothese bestehen, dass nach ihr Bewegungen vorkommen können, bei denen das Arbeitsäquivalent geringer ist als im Ruhezustande, wodurch eben labiles Gleichgewicht und endlose Bewegung bedingt sind, wenn auch vielleicht nicht nothwendig in das Unendliche steigende Bewegung.

Ich will hier übrigens hinzufügen, dass die zweite Abtheilung der jüngst veröffentlichten „Elektrodynamischen Untersuchungen" von Hrn. C. Neumann[1]), welche sich speciell mit dem von mir aufgestellten allgemeineren Ausdruck des elektrodynamischen Potentials beschäftigt, die Consequenzen meiner Hypothese nicht blos für ruhende Leiter, auf welche

1) Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. 20. October 1871. S. 450—478.

ich mich beschränkt hatte, um die von mir discutirten Fragen des elektrodynamischen Grundgesetzes nicht unnöthig zu compliciren, sondern auch für bewegte Leiter behandelt, und namentlich den allgemeinen Beweis des Gesetzes von der Erhaltung 61
der Kraft aus meinen Hypothesen auch für diesen allgemeinsten Fall durchgeführt hat. Ich würde dabei höchstens gegen die Einführung der „Schiebungskräfte“ (elektromotorische Contactkräfte im Volta'schen Sinne) Einwendungen zu machen haben, deren Erörterung übrigens einem anderen Orte vorbehalten bleiben mag, da sie überwiegend physikalische Dinge zu besprechen hat.

Nur in Betreff der Kritik, in welcher sich Hr. C. Neumann dabei gegen meine vor 25 Jahren erschienene Schrift von der Erhaltung der Kraft ergeht, will ich mir zu bemerken erlauben, dass ich selbst schon längst in allen wesentlichen Punkten diese Kritik ausgeübt hatte. Die Darstellung in der „Erhaltung der Kraft“ leidet, wie ich ausdrücklich auf S. 69 schon in dem Büchlein selbst hervorgehoben habe, an dem Mangel, dass man damals den Verlauf der durch plötzliche Stromesschwankungen inducirten Ströme noch nicht kannte, und also die davon herrührende Wärmeentwickelung nicht berechnen konnte. Dann bin ich selbst es zuerst gewesen, welcher im Jahre 1851 [1]) diese Lücke durch neue Versuchsreihen ausgefüllt hat, indem ich zeigte, dass der Verlauf auch dieser Ströme durch F. Neumann's des Vaters und Ohm's Gesetz bestimmt wird. Welche Aenderungen dem entsprechend in der Anwendung des Gesetzes von der Constanz der Energie auf die inducirten Ströme zu machen sind, habe ich 1854 in einer Antwort gegen Hrn. Clausius [2]) kurz, aber in den wesentlichen Punkten vollständig angegeben. Dort wird vorangestellt der Satz, dass ein galvanischer Strom von der Intensität I durch sein Bestehen ein Arbeitsäquivalent von der Form $\frac{1}{2} p I^2$ repräsentire, und habe weiter hinzugefügt: „Für einen einzelnen Stromkreis ist mir noch nicht gelungen zu beweisen“ (nämlich vom Gesetze der Energie her ausgehend), „dass die mit p bezeichnete

1) Pogg. Annalen, Bd. LXXXIII, S. 505—540.

2) Ebenda Bd. XCI, S. 258—260.

Constante gleich dem doppelten Potentiale" (des Stromes auf sich selbst) „sein müsse, so wahrscheinlich dies auch nach der Analogie der übrigen Fälle sein mag." In der That kommt hierbei die Frage nach der Trägheit der Elektricität in Betracht, die durch blos theoretische Schlüsse ohne Thatsachen nicht zu entscheiden ist.

Die Anwendung des Gesetzes von der Erhaltung der Energie auf die elektrischen Ströme modificirte sich in der That nur dadurch, dass zu den übrigen schon sonst bekannt gewesenen Arbeitsäquivalenten auch noch jenes $\frac{1}{2} p I^2$ für die bestehenden elektrischen Ströme hinzugenommen werden musste.

62 Wenn aber Hr. C. Neumann, der doch die Streitschriften von Clausius gegen mich citirt, meine Antwort darauf nicht gekannt haben sollte, so hätte er billiger Weise nicht übersehen sollen, dass diese selbe Bedeutung des Potentials der elektrischen Ströme, deren fehlende Kenntniss den wesentlichen Mangel des betreffenden Kapitels meiner Schrift von der Erhaltung der Kraft bildet, von mir in meiner letzten Arbeit im 72. Bande des Journals für Mathematik geradezu zum Fundament der ganzen Betrachtung gemacht ist, aus welcher die auch von ihm in seiner letzten Arbeit benutzten Hypothesen hergeleitet sind.

Der Streit darüber, ob die Existenz der elektrodynamischen Induction aus dem Gesetze von der Erhaltung der Kraft „deducirt" werden könne, hat für mich nur den Werth eines Wortstreites. Meine Aufgabe in der Erhaltung der Kraft war, die sämmtlichen damals bekannten Thatsachen durchzugehen und zu prüfen, ob sie mit dem betreffenden allgemeinen Gesetze in Uebereinstimmung waren, ob sich vielleicht im Gegentheil irgendwo Lücken oder Widersprüche zeigten. Als Form der Darstellung ist es bei solcher Aufgabe oft anschaulicher die Richtigkeit des allgemeinen Gesetzes vorauszusetzen, und die Folgen zu deduciren, nicht um sie durch eine solche Deduction als bewiesen zu betrachten, sondern um sie mit den Thatsachen zu vergleichen, und dadurch die Zulässigkeit des allgemeinen Gesetzes zu prüfen, was den Ausgangspunkt bildete. Will man alle bei der elektrodynamischen Induction in

Betracht kommenden Thatsachen bis auf eine als bekannt voraussetzen, so wird man diese eine immer noch aus dem Gesetze von der Constanz der Energie „deduciren“ können, so z. B. den Werth der Inductionsconstante. Aber als Beweismittel von thatsächlichen Wahrheiten kenne ich nur den Weg der Induction.

§ 14. Die Einwürfe von Hrn. J. Bertrand.

Hr. J. Bertrand hat aus meinem Aufsatze über die Bewegungsgleichungen der Elektricität einige Punkte hervorgehoben, welche ihm bedenklich erscheinen.[1] Ich erlaube mir dieselben hier zu beantworten, namentlich auch deshalb, da sie in der That Punkte der Theorie betreffen, die wenigstens noch nicht explicite auseinander gesetzt sind.

Zunächst findet Hr. Bertrand Schwierigkeiten in der
Anwendung des Potentialbegriffs auf zwei Stromelemente über- 63
haupt. Er geht dabei von der Hypothese von Ampère aus, dass die Kraft zwischen zwei Stromelementen eine anziehende oder abstossende in der Richtung ihrer Verbindungslinie sei. Dreht man eines der Elemente um die Richtung dieser Kraft als Axe, so würde dadurch keine Arbeit geleistet werden; dennoch änderte sich der Werth des Potentials, dessen Ausdruck nach Neumann, oder in der allgemeineren von mir gegebenen Form ja auch die Winkel zwischen den Elementen ds und ds' enthält.

Hiergegen ist nun zu erwidern, dass die Existenz eines Potentials zweier Stromelemente nicht blos die Existenz einer anziehenden oder abstossenden Kraft zwischen ihnen bedingt, sondern auch an jedem der Elemente die Existenz eines Kräftepaares, welches das betreffende Element in eine bestimmte Richtung zu stellen strebt. Diese Richtung ist, wenn wir Hrn. F. E. Neumann's Form des Potentials zu Grunde legen, der Richtung des anderen Elementes parallel, nach Hrn. W. Weber's Form dagegen fällt sie in die Richtung der Verbindungslinie r.

Denkt man sich jedes dieser Kräftepaare dargestellt durch

1) Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. T. LXXIII, p. 965.

zwei Kräfte, die an den Endpunkten von ds oder ds' angreifen. so werden diese Kräfte allerdings von der Ordnung der Grössen r/ds und r/ds' sein müssen im Vergleich mit der anziehenden oder abstossenden Kraft beider Elemente, und die Arbeit welche geleistet werden muss, um eines der Elemente ds aus der Lage seines stabilen Gleichgewichts um einen rechten Winkel zu drehen, während das andere Element ds' fest liegen bleibt, wird ebenso gross sein müssen, als wenn man ds bei unveränderter Richtung in unendliche Entfernung brächte. Darin liegt aber durchaus kein Widerspruch und keine Unmöglichkeit, wie Hr. Bertrand sie zu finden glaubt. Denn das ist alles genau ebenso, wenn man statt der beiden Stromelemente ds und ds' zwei magnetische Linienelemente nimmt, deren Potential von der Form ist:

$$mm'\,ds\,ds'\,\frac{\cos[ds,ds'] - 3\cos[r,ds]\cos[r,ds']}{r^3}\,.$$

Für zwei solche magnetische Elemente ist die Form des Potentials offenbar berechtigt, und auch hier müssen wir dieselbe Arbeit leisten, um einerseits eines der Elemente aus irgend einer gegebenen Lage in unendliche Entfernung zu bringen, oder andererseits es so zu drehen, dass das Potential gleich Null wird. Auch in diesem Falle sind die Kräfte des Kräfte-
64 paares, welches wirklich an den Enden eines solchen Linienelementes angreift, von der Ordnung r/ds, im Vergleich mit denen, die das Element parallel mit sich selbst zu verschieben streben.

Die Annahme eines Potentials der Stromelemente ist also nicht, wie Hr. Bertrand meint, im Widerspruch mit sich selbst, sondern nur im Widerspruch mit der Hypothese von Ampère, welche ausschliesslich eine anziehende oder abstossende Kraft für jedes lineare Stromelement annimmt. Den Thatsachen gegenüber, welche an geschlossenen Stromkreisen beobachtet werden können, ergeben beide Hypothesen gleiche Resultate und sind deshalb gleich berechtigt, wie Hr. Bertrand anerkennt.

Der zweite Einwand bezieht sich auf die Art und Weise, wie zuerst Hr. Kirchhoff und dann ich selbst das mittels

einer Potentialformel ausgedrückte Inductionsgesetz angewendet haben, um die Componenten der stromerregenden Kraft nach den Richtungen der Coordinatenaxen zu finden. Wenn $P i\, ds$ die Potentialfunction auf ein lineares Stromelement ds mit der Stromintensität i ist, so ist nach Hrn. F. E. Neumann's Inductionsgesetz die elektromotorische Kraft der Induction dP/dt. Aber, fragt Hr. Bertrand, welches ist die Richtung dieser Kraft? Diese Richtung ist nun in dem speciellen Falle, auf den Neumann seine Ausdrücke zuerst angewendet hat, nämlich für lineare Stromelemente, jedenfalls gegeben; es ist die Richtung dieses Elementes. Ich glaube, ich bezeichne den Sinn von Hrn. Bertrand's Zweifel richtig so: Längs des Elementes ds wirkt nur eine Componente der Inductionskraft, deren Grösse das Neumann'sche Gesetz giebt. Diese ändert sich mit der Richtung von ds. Giebt es in dem Sinne eine bestimmte Richtung und Grösse der Inductionskraft, dass die Componente längs ds nach dem gewöhnlichen Verfahren der Zerlegung der Kräfte gefunden werden kann? Das von Hrn. Kirchhoff und mir eingeschlagene Verfahren für nicht lineare Leiter setzt allerdings voraus, dass die Zusammensetzung der Inductionskräfte in derselben Weise geschehen dürfe, wie bei allen anderen Kräften, nämlich nach dem Gesetze des Kräfteparallelogramms. Dies ist nicht unmittelbar klar, wenn man die gesammte Potentialfunction aller vorhandenen Stromelemente auf ein einzelnes Element ds schon durch Integration vollständig gebildet hat. Hr. Bertrand hat Recht, dass er dafür einen Beweis verlangt. Dieser Beweis ist aber so leicht mittels der in den Abhandlungen von F. E. Neumann und W. Weber oft gebrauchten Umformungen zu führen, dass darin für Hrn. Kirchhoff und mich die Entschuldigung ge- 65
funden werden wird, wenn wir ihn dem mit jenen Abhandlungen vertrauten Leser sich selbst zu ergänzen überlassen haben.

Hrn. F. E. Neumann's Potential ist eine Summe von Gliedern von der Form:

$$p = i \,.\, i' \,.\, ds \,.\, ds' \,.\, \frac{\cos\,[ds, ds']}{r}\,.$$

Wenn wir nun die Winkel, welche die Richtung des Elementes ds mit den positiven Coordinatenaxen macht, mit α, β, γ, die

entsprechenden für das Element ds' mit α', β' und γ' bezeichnen, so wird:

$$p = i\,ds\,ds' \left\{ \frac{i' \cos \alpha'}{r} \cos \alpha + \frac{i' \cos \beta'}{r} \cos \beta + \frac{i' \cos \gamma'}{r} \cos \gamma \right\},$$

und wenn man das Integral über sämmtliche Elemente ds' nimmt, so erhält man einen Ausdruck von der Form:

$$\int p\,ds' = iP = i\,.\,ds\,\{A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma\},$$

wo A, B, C unabhängig von i, α, β und γ sind, d. h. unabhängig von der Richtung des Elementes ds und von seiner Stromstärke. Die elektromotorische Inductionskraft, welche durch irgend eine Aenderung in der Lage, Richtung oder Stromstärke der Elemente ds' im Elemente ds erzeugt wird, ist nach F. E. Neumann:

$$\varepsilon \frac{dP}{dt} = \varepsilon \frac{dA}{dt} \cdot ds\,.\cos \alpha + \varepsilon \frac{dB}{dt} \cdot ds\,.\cos \beta + \varepsilon \frac{dC}{dt} \cdot ds\,.\cos \gamma. \qquad (8)$$

Setzen wir:

$$R^2 = \left(\frac{dA}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dC}{dt}\right)^2$$

und betrachten wir R als eine Kraft, welche mit den positiven Coordinatenaxen Winkel macht, deren Cosinus sind:

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{dA}{dt}, \quad \frac{1}{R} \cdot \frac{dB}{dt}, \quad \frac{1}{R} \cdot \frac{dC}{dt},$$

so ist die Inductionskraft, die im Elemente ds zur Wirkung kommt, nach Gleichung (8) gleich der Componente, welche die Kraft $\varepsilon R\,ds$ in Richtung des Elementes ds hervorbringt.

Die Weber'sche Form des Potentials zweier Stromelemente giebt ähnliche Resultate. Hier wird:

$$p_1 = i\,i'\,ds\,ds' \cdot \frac{\cos\,[r, ds]\,\cos\,[r, ds']}{r}.$$

66 Da nun:

$$\cos\,[r, ds] = \frac{x' - x}{r} \cdot \cos \alpha + \frac{y' - y}{r} \cdot \cos \beta + \frac{z' - z}{r} \cdot \cos \gamma$$

ist, so kommt auch hier wieder das Integral unter die Form:

$$P_1 = ds\,\{A_1 \cos \alpha + B_1 \cos \beta + C_1 \cos \gamma\},$$

wo A_1, B_1 und C_1 von i, α, β, und γ unabhängig sind.

Endlich führt die von mir angegebene allgemeinere Form des Potentials:

$$p_2 = i \cdot i' \cdot ds \cdot ds' \cdot \frac{(1+k)\cos[ds, ds'] + (1-k)\cos[r, ds]\cos[r, ds']}{r}$$

auf die entsprechende Form:

$$P_2 = (1+k)P + (1-k)P_1,$$

und die Inductionskraft wird:

$$\varepsilon \cdot \frac{dP_2}{dt} = \varepsilon \cdot \frac{dA_2}{dt} \cdot ds \cos\alpha + \varepsilon \cdot \frac{dB_2}{dt} \cdot ds \cos\beta + \varepsilon \cdot \frac{dC_2}{dt} \cdot ds \cos\gamma,$$

wo:

$$A_2 = (1+k)A + (1-k)A_1,$$
$$B_2 = (1+k)B + (1-k)B_1,$$
$$C_2 = (1+k)C + (1-k)C_1.$$

Die resultirende Kraft und deren Richtung ist gerade wie im ersten Falle zu bestimmen.

Die elektromotorischen Kräfte, welche durch die von Hrn. Kirchhoff und mir angewendeten Potentialausdrücke gesetzt sind, haben also ebenso gut eine bestimmte Richtung und Grösse, wie die elektrostatischen Anziehungskräfte für strömende Elektricität, oder die die Wärme forttreibenden Temperaturunterschiede in den Problemen über Wärmeleitung, und sind also genau in gleicher Weise in Rechnung zu bringen und von uns beiden in Rechnung gebracht worden, wie es in den genannten beiden anderen Fällen geschehen muss, d. h. es ist in jedem Punkte des Leiters und für jedes durch ihn gezogene Linienelement die in dieses Linienelement fallende Componente der (durch den Widerstand des Leiters gehemmten) Strömung proportional gesetzt worden der in dasselbe Linienelement fallenden Componente der treibenden (elektrostatischen und inducirten) Kraft.

Zusatz (1881).

Hr. W. Weber hat am Schlusse seiner im XVIII. Bande der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften[1]) enthaltenen Abhandlung über: „Elektrodynamische Maassbestimmungen" auch das von mir als Illustration gebrauchte Beispiel eines elektrischen Theilchens ε discutirt, welches mit der trägen Masse μ vereinigt sich im Inneren einer mit Elektricität oberflächlich beladenen Hohlkugel bewegt. Er bestätigt meine Rechnung, insofern auch er findet, dass ein solches Theilchen bei Ansammlung endlicher elektrischer Quanta und in endlichen Entfernungen von diesen unendliche Geschwindigkeit erhalten könnte, und dass bei noch weiter gesteigerter Ladung der Zustand eintritt, den ich kurz als „negative Trägheit" bezeichnet habe, wo jede auf μ wirkende beschleunigende Kraft, die nicht elektrischen Ursprungs ist, μ in der ihr entgegengesetzten Richtung beschleunigen würde.

Hr. W. Weber glaubt annehmen zu dürfen, dass die unendliche Geschwindigkeit nur durch eine verschwindend kleine Weglänge existiren und dann schnell wieder abnehmen würde; hierbei tritt aber unendliche Geschwindigkeit unter unendlicher, erst positiver und dann negativer Beschleunigung ein, welcher Fall doch eine nähere Untersuchung erfordert, da $\infty - \infty$ nicht nothwendig $= 0$ ist.

Die Gleichung der lebendigen Kraft, welche Hr. Weber für diesen Fall in Uebereinstimmung mit der von mir in § 12 der vorausgehenden Abhandlung angestellten Analyse aufstellt, ist:

$$\frac{1}{2}\left(\mu - \frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon'\right) q \cdot q - V + C = 0.$$

Darin ist μ die träge Masse des elektrisirten Theilchens ε, ε' ist die Dichtigkeit der elektrischen Belegung der Kugel, und wird als mit der Zeit wachsend angenommen, R ist der Radius der grossen Kugel, q die Geschwindigkeit von μ in Richtung des Radius, V das Potential der äusseren, auf das Theilchen μ wirkenden Kräfte, und C ist die Constante der lebendigen Kraft, in welche der hier nicht weiter in Betracht kommende Werth der im Inneren der Kugel constanten Potentialfunction ihrer elektrischen

1) Abgedruckt in Wiedemann's Annalen Bd. 4, S. 366—373.

Belegungsschicht eingeschlossen ist; c ist die Weber'sche Geschwindigkeit. Der Kürze wegen setzt Hr. Weber:

$$\eta = \frac{3cc\mu}{8\pi R\varepsilon},$$

wonach die obige Gleichung zu schreiben wäre:

$$\tfrac{1}{2}\mu\left(1 - \frac{\varepsilon'}{\eta}\right)\cdot q^2 = V - C.$$

Nun kann man aus dieser Gleichung direct erkennen, dass wenn ε' bis zum Werthe η und über diesen hinaus wachsen könnte, und vor dem Moment, wo $\varepsilon' = \eta$ wird, q reell wäre, es in dem genannten Momente unendlich und nachher imaginär werden würde, wenn nicht gleichzeitig $V - C$ durch Null geht, und sein Zeichen wechselt. Das könnte bei einem gewissen Werthe von C allerdings geschehen, aber der Werth von C ist bestimmt, wenn in irgend einem früheren Augenblicke der Bewegung der Werth von q gleichzeitig mit dem von ε' und V als gegeben angenommen worden ist. Der Werth von C muss also beliebig zu wählen sein, damit man ihn den verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten anpassen kann.

Es ist klar, dass, wenn vor und nach dem Moment, wo $\varepsilon' = \eta$, die Grösse q irgend welchen reellen Werth haben soll, die Grösse $V - C$ von einem positiven Werthe, der jede endliche Grösse haben könnte, zu einem negativen Werthe springen müsste. Soll aber das Gesetz von der Constanz der Energie gewahrt werden, so muss die Constante C (abgesehen von dem in ihr steckenden Potentialwerthe, der ε' proportional ist) unverändert bleiben, und da V jedenfalls, und ε' nach der Weber-schen Annahme sich continuirlich ändern sollen, so kann die Grösse $V - C$ keinen solchen Sprung machen.

Man sieht, das von Hrn. Weber gewählte Beispiel ist noch gefährlicher für seine Theorie, als es die meinigen waren. Ich suchte nur unendliche Geschwindigkeiten nachzuweisen, er stösst auf imaginäre. Uebrigens können im Interesse meines Gegners Zweifel gegen die Zulässigkeit des von ihm gewählten Beispiels erhoben werden, da die von ihm angenommene fortschreitende Ladung der grossen Kugel eine zufliessende Bewegung der Elektricität verlangt, deren Wirkung auf das Theilchen μ nicht berechnet ist.

Hr. Weber selbst hat aus der Gleichung der Energie eine Gleichung für die Beschleunigung abgeleitet, in der er dann ε' der Zeit proportional wachsend annimmt. Diese Gleichung enthält die Constante C nicht mehr, sodass deren Aenderung auch in der Lösung nicht unmittelbar sichtbar wird. Sie ist von der Form:

$$dq = -\frac{a\vartheta}{\mu} \cdot \frac{dt}{t},$$

deren Integral kann geschrieben werden:

$$q = -\frac{a\vartheta}{\mu} \log(ht),$$

wo h eine Integrationsconstante ist. Soll q reell sein, so muss h vor der Zeit $t = 0$ negativen Werth haben, nachher positiven Werth, muss also nothwendig im Momente $t = 0$ seinen Werth ändern. Aenderte es ihn nicht, so wäre q jedenfalls in dem einen Zeitabschnitte complex. Hr. W. Weber schreibt für positive und negative t gleichmässig:

$$q = -\frac{a\vartheta}{2\mu} \log\left(\frac{t\,.\,t}{\vartheta\,.\,\vartheta}\right),$$

d. h. er setzt voraus, dass der Werth h_0 für positive und h_1 für negative Werthe von t der Gleichung genügen:

$$h_0 + h_1 = 0,$$

für welche Annahme ich einen zwingenden Grund nicht zu finden weiss. Allerdings wird aber dadurch der Sprung im Werthe der Integrationsconstante verdeckt. So lange t endlich ist, kann man allerdings statt dt/t auch schreiben $t.dt/t.t$ und als Integral statt $\log . t$ schreiben $\frac{1}{2}\log(t.t)$. Aber für den Uebergang durch 0 wird dieser Factor t/t in seinem Werthe unbestimmt. Dass in diesem Falle in der That die spätere Bewegung nicht mehr die ungestörte Fortsetzung der früheren ist, zeigte sich ganz zweifellos aus der Gleichung der Energie, wie oben erörtert. Wenn andererseits in dem Augenblick, wo $\varepsilon' = \eta$, die erstere Grösse zu wachsen aufhört, müsste die unendliche Geschwindigkeit bestehen bleiben, und sogar unbestimmte Zeit hindurch bestehen bleiben, wenn der Punkt μ in einer Kreisbahn erhalten bleiben könnte.

Die negative Beschleunigung durch eine vorwärts treibende Kraft findet auch Hr. Weber, sobald $\varepsilon' > \eta$ geworden. Er

lässt seinen bewegten Punkt auf geradliniger Bahn die Kugel verlassen, wobei der abnorme Zustand schnell aufhören würde. Aber dieselbe Art abnormer Beschleunigung würde auch in kreisförmiger Bewegung, die unter dem Widerstande einer rückwärts treibenden Kraft ausgeführt würde, eintreten müssen, und dann würde in der That gegen diese äussere Kraft Arbeit in das Unendliche und zwar mit steigender Geschwindigkeit geliefert werden müssen.

Ich bedauere, dass die Art, wie Schüler und Freunde von Hrn. W. Weber von meinen Einwänden gegen die Zulässigkeit seiner Hypothese als von einer gänzlich abgethanen Sache reden, mich zu dieser Kritik gezwungen haben, der ich dem hochverdienten Manne gegenüber gern aus dem Wege gegangen wäre. Uebrigens erlaube ich mir noch zu bemerken, dass ich die Consequenzen seiner Hypothese nie als „ungereimt und absurd“ bezeichnet habe.[1])

1) Betreffs der in der Anmerkung zu S. 671 erwähnten Rechnung von Hrn. C. Neumann hat derselbe in seiner 1874 erschienenen Abhandlung: „Ueber das von Weber für die elektrischen Kräfte aufgestellte Gesetz“ (Abhandl. d. Königl. Sächsischen Ges. d. Wiss. Math.-Phys. Classe Bd. XI. S. 162) geantwortet, dass die Kraft der der Werth $p \cdot d^2\xi/dt^2$ gleichgesetzt wird, auch Weber'sche Kräfte enthalten solle, in denen selbst Glieder mit Coëfficienten $d^2\xi/dt^2$ vorkommen. Dadurch wird allerdings der Werth 0/0 beseitigt und die Gleichung behält bestimmten Sinn. Die sogenannte „Deduction“ des „wichtigen und bisher gewöhnlich für selbstverständlich gehaltenen Satzes“ wird dadurch meines Erachtens um kein Haar besser. Der Autor hat in seinen verschiedenen Aufsätzen verschiedene elektrodynamische Hypothesen discutirt. Diesmal wählt er solche, die ihm Werthe für die Beschleunigung der elektrischen trägen Masse p geben. Er findet, dass diese hypothetisch aufgestellten Gleichungen auch noch einen physikalisch zulässigen Sinn behalten, auch wenn die Masse $p = 0$ gesetzt wird, also gar nicht existirt. Daraus folgt doch nur, dass der so gewonnene Satz richtig sein kann, aber nicht, dass er richtig ist. Ich bin in meinen Irrthum verfallen, weil ich einen so bescheidenen Sinn hinter dem, was der Autor „Deduction“ nennt, nicht gesucht habe. — Ebenda S. 128—149 befinden sich die Auseinandersetzungen des Autors über das, was er in der Ableitung der Kirchhoff'schen Differentialgleichungen als zweifelhaft betrachtet. Sie beruhen auf der Möglichkeit, dass nicht alle Elektricität in Bewegung sei, und dass der Uebergang ruhender in bewegte Elektricität vielleicht noch unbekannte Wirkungen habe.

XXXVI.

Vergleich des Ampère'schen und Neumann'schen Gesetzes für die elektrodynamischen Kräfte.

Aus: Monatsberichte der Berliner Akademie 1873, 6. Februar, S. 91—104.
(Vorläufige Anzeige des folgenden Aufsatzes.)

---

91 Hr. F. E. Neumann (Vater) hat das ganze Gebiet:

1) der elektrodynamischen Bewegungskräfte, welche durch das Ampère'sche Gesetz umfasst werden,
2) der elektrodynamischen Induction, hervorgebracht durch Bewegung von Stromleitern,
3) der elektrodynamischen Induction, hervorgebracht durch Aenderungen der Stromintensität,

unter ein einziges, relativ sehr einfaches Gesetz vereinigt. Dieses Gesetz ergiebt unmittelbar nicht die Kräfte, welche die durchströmten Leiter aus einer Lage in die andere zu führen
92 streben, sondern giebt das Potential, d. h. die Arbeit, welche durch die Ueberführung aus der einen in die andere Lage gewonnen werden kann. Für die unter 1) und 2) genannten Erscheinungen hätte sich allerdings der gesetzliche Ausdruck geben lassen, auch wenn die elektrodynamischen Kräfte nicht als die Variationscoëfficienten eines Potentials sich hätten darstellen lassen; die unter 3) genannten dagegen fordern die Existenz eines Potentials, wie ich in der Einleitung zu meiner Arbeit: „Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität" im 72. Bande von Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik schon erörtert habe.

Dieses Neumann'sche Potentialgesetz, welches in der allerglücklichsten Weise eines der verwickeltsten und verwir-

rendsten Gebiete von Erscheinungen unter einen ebenso einfachen, wie quantitativ genauen Ausdruck bringt, hat sich bisher bei richtiger Anwendung noch immer in Uebereinstimmung mit den thatsächlichen Erfahrungen gezeigt, auch mit solchen, auf die es von seinem Entdecker ursprünglich nicht bezogen war. Ich selbst habe mich bestrebt seine Anwendbarkeit auch für die schnell veränderlichen Ströme der Oeffnungs- und Schliessungsinduction experimentell nachzuweisen, und habe in der vorher genannten theoretischen Arbeit seine Consequenzen für die allgemeinste Form oscillatorischer elektrischer Entladungen in beliebig geformten Leitern von drei Dimensionen verfolgt, welche überall mit dem uns empirisch bekannten allgemeinen Gange der Erscheinungen übereinstimmen, wenn auch quantitative Messungen, die mit der Theorie verglichen werden könnten, bisher nur für lineare Schliessungsdrähte existiren. Für diese stimmen übrigens die Folgerungen des Neumann-schen Gesetzes mit den von Hrn. Kirchhoff aus dem Weber-schen Gesetze abgeleiteten und mit der Erfahrung theilweise verglichenen überein.

Nun hat Hr. F. E. Neumann, in den von ihm veröffentlichten Abhandlungen wenigstens, den Beweis, dass das Potentialgesetz für die elektrodynamischen Bewegungskräfte unter den bisher eingehaltenen Bedingungen des Experiments, nämlich an geschlossenen Strömen, übereinstimmende Resultate mit dem für diese Fälle thatsächlich richtigen Ampère'schen Gesetze gebe, nur nachgewiesen unter der beschränkteren Voraussetzung, dass die betreffenden beiden Stromleiter ohne Veränderung ihrer Form und Grösse bewegt werden. In der That
fehlten zur Zeit seiner Veröffentlichung[1]) noch die Unter- 93
suchungen über die Ausbreitung der elektrischen Strömungen in Leitern von drei Dimensionen und deren experimentelle Bestätigung; ohne diese konnte das Potential eines beweglichen Leiters auf sich selbst nicht gebildet werden, da dies für einen linearen Leiter unendlich gross wird; und ohne dieses Potential

1) Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme. Berlin, Reimer 1848. In der Akademie vorgelegt 9. Aug. 1847.

konnten die Kräfte, welche die Theile eines beweglichen Leiters gegenseitig auf einander ausüben, nicht oder wenigstens nicht ohne nebensächliche Betrachtungen, die damals noch verwickelt und bedenklich erscheinen mochten, behandelt werden. Hr. F. E. Neumann, in seiner vorsichtigen und streng an dem Gegebenen festhaltenden Weise, hat wohl aus diesem Grunde seinen Beweis auf die schon damals ganz klar vorliegenden Fälle beschränkt.

Nachdem in der Zwischenzeit die damals noch fehlenden Untersuchungen, namentlich durch Hrn. Kirchhoff, ausgeführt worden sind, und ihre Ergebnisse als gesichert betrachtet werden können, war eine weitere Anwendung des Potentialgesetzes auf die allgemeinsten Fälle der Bewegung elektrischer Leiter ohne Schwierigkeit auszuführen, wozu allerdings noch in der Formulirung des Gesetzes eine gewisse Beziehung auf diese erweiterten Fälle genommen werden muss, die übrigens aus der ursprünglich von Hrn. Neumann gegebenen Begriffsbestimmung fast mit Nothwendigkeit abzuleiten ist. Da nun dies, so viel ich weiss, noch nirgends explicite geschehen ist, und andererseits wegen des Mangels einer solchen ausführlichen Specialisirung des Gesetzes Zweifel gegen seine Anwendbarkeit aufstiegen, wie solche namentlich von den Herren Ed. Riecke[1], Bertrand[2]) und C. Neumann[3]) (Sohn) ausgesprochen worden sind, so habe ich mich bemüht diese Lücke auszufüllen, und erlaube mir hier die Resultate dieser Arbeit zusammenzufassen.

1) Werth des Potentials P zweier linearer Stromelemente Ds und $D\sigma$ auf einander, deren Stromintensitäten i und
01 j sind, deren Entfernung mit r bezeichnet wird. Für diesen Werth habe ich die in meiner oben erwähnten Abhandlung gebrauchte Form beibehalten, welche durch Einführung einer vorläufig unbestimmt bleibenden, jedenfalls positiven Constante k allgemeiner gehalten ist, als die von Hrn. F. E. Neumann

1) Göttinger Nachrichten 14. Aug. 1872.

2) Comptes rendus de l'Acad. des Sciences 14. Octob. 1872.

3) Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wiss. 3. Aug. 1872. Mathematische Annalen Bd. V. 606.

vorzugsweise gebrauchte Form, die dem Werthe $k = 1$ entspricht:

$$P = -\tfrac{1}{2} A^2 \frac{ij}{r} [(1 + k) \cos (Ds, D\sigma)$$
$$+ (1 - k) \cos (r, Ds) \cos (r, D\sigma)] \, Ds \cdot D\sigma. \qquad (1)$$

Die Grössen $(Ds, D\sigma)$, (r, Ds) und $(r, D\sigma)$ bezeichnen die Winkel zwischen den Richtungen der eingeklammerten Linien, wobei als positive Richtung für r die von σ nach s laufende gewählt ist, für Ds und $D\sigma$ aber diejenige, in der die positive Elektricität fliesst.

Die Grösse $-P$ bezeichnet die durch das gleichzeitige Bestehen der elektrischen Ströme in Ds und $D\sigma$ gesetzte Energie, welche als Inductionsstrom beim Aufhören einer der Strömungen zur Erscheinung kommt.

Die Grösse $+P$ ist dagegen die *potentielle Energie* der auf die Leiter wirkenden elektrodynamischen Bewegungskräfte, unter der Voraussetzung, dass bei deren Bewegungen die Stromintensitäten i und j unverändert bleiben.

Da das Potential P auch von den Winkeln abhängig ist, so folgt daraus unmittelbar, dass die mechanische Wirkung des Stromes in $D\sigma$ auf das als festen Stab vorgestellte Stromelement Ds sich im allgemeinen nicht durch eine einzige Kraft, wie bei *Ampère*, *Grassmann*, *Stefan*, sondern nur durch zwei an den Enden von Ds angreifende Kräfte ersetzen lassen wird, deren Intensität unabhängig von der Länge Ds ist. Die Art dieser Kräfte, wie sie auf ein vollkommen nachgiebiges Element wirken, ergiebt sich übrigens aus der folgenden Analyse vollständiger.

Die vier auf die Enden von Ds und $D\sigma$ einwirkenden Kräfte genügen für jeden Werth der Constante k dem Gesetze von der Gleichheit der Action und Reaction[1]), was die von *Ampère* angenommenen Kräfte ebenfalls thun, die von Hrn. 95

1) Dies ist wohl nur in Folge eines Versehens von Hrn. C. *Neumann* in seiner oben citirten Abhandlung geleugnet worden. Dass die Angabe im Texte richtig ist, ergiebt sich einfach aus dem Umstande, dass das Potential dieser Kräfte nur von der *relativen* Lage von Ds und $D\sigma$ gegen einander abhängig gemacht ist.

Grassmann und Stefan angenommenen aber im allgemeinen nicht.

2) Gesetz der elektrodynamischen Bewegungskräfte. Um dieses auszusprechen für Leiter von drei Dimensionen muss man sich diese erst in leitende Fäden zerlegt denken, welche überall der Richtung der zur Zeit bestehenden Strömungslinien folgen, sodass keine Elektricität von einem dieser Fäden zu seinen Nachbarn übergeht.

Die elektrodynamischen Bewegungskräfte, welche auf jedes Element eines jeden Stromfadens ausgeübt werden, sind alsdann gegeben durch die Regel, dass die mechanische Arbeit, welche die genannten Kräfte bei irgend einer unendlich kleinen Verschiebung der als beliebig biegsam und dehnbar gedachten Stromfäden leisten, gleich ist der bei derselben Verschiebung eintretenden Abnahme des elektrodynamischen Potentials, diese berechnet unter der Voraussetzung, dass die Stromintensität in jedem, von denselben ponderablen Theilchen gebildeten Faden unverändert bleibt.

3) An jeder Stelle des leitenden Systems, wo das Quantum der freien Elektricität durch die zur Zeit bestehenden Ströme nicht geändert wird, laufen die Stromfäden continuirlich fort. Dagegen sind Enden von Stromfäden überall da anzunehmen, wo das Quantum der freien Elektricität sich ändert. Liegen solche Stellen im Innern des Leiters, so kann ein Theil der Elektricität auch weiter strömen; es kann also dort das Ende eines Stromfadens oder eines Theiles eines solchen mit Längenelementen eines anderen Theiles desselben Fadens zusammenfallend gedacht werden. Ist i die Stromintensität in dem Faden, und e die freie Elektricität an seinem Ende, so ist am oberen Ende (nach welchem ein positives i hin gerichtet ist) $i = de/dt$, am unteren Ende $i = -de/dt$.

Für die Wirkungen eines linearen Stromleiters σ auf einen eben solchen s lässt sich der Gang der Rechnung kurz angeben, wie folgt. Da bei dehnbaren Leiterelementen die Längen s und σ selbst sich verändern, so müssen zwei andere Parameter p und ϖ eingeführt werden, um die einzelnen materiellen

Punkte des Leiters zu charakterisiren. Wir nehmen an, der Werth von p bleibe bei der Bewegung für jeden Punkt des Leiters s, und der von ϖ für jeden des Leiters σ unverändert, und es sei s eine continuirliche eindeutige Function von p, σ 96
eine ebensolche von ϖ. Wir setzen den Werth von P aus zwei Theilen zusammen, nämlich:

$$P = P_1 + P_2, \tag{1a}$$

$$P_1 = -A^2 ij \iint \frac{\cos(Ds, D\sigma)}{r} Ds \cdot D\sigma, \tag{1b}$$

$$P_2 = -A^2 \frac{1-k}{2} ij \iint \frac{d^2 r}{ds \cdot d\sigma} Ds \cdot D\sigma. \tag{1c}$$

Der Ausdruck für P_1 lässt sich schreiben:

$$P_1 = -A^2 \cdot ij \iint \frac{1}{r} \left[\frac{dx}{dp} \cdot \frac{d\xi}{d\varpi} + \frac{dy}{dp} \cdot \frac{d\eta}{d\varpi} + \frac{dz}{dp} \cdot \frac{d\zeta}{d\varpi} \right] dp \cdot d\varpi. \tag{1d}$$

Hierin sind x, y, z die Coordinaten der Punkte des Leiters s; ξ, η, ζ die des Leiters σ.

Um die Kräfte X, Y, Z zu finden, die auf s wirken und von P_1 abhängig sind, sind x, y, z zu variiren um δx, δy, δz und dann zu setzen:

$$\iint (X \cdot \delta x + Y \cdot \delta y + Z \cdot \delta z) + \delta P_1 = 0. \tag{2}$$

Um die X-Kräfte zu finden, genügt es x zu variiren. Dies giebt:

$$\delta P_1 = -A^2 ij \iint \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right) \left[\frac{dx}{dp} \cdot \frac{d\xi}{d\varpi} + \frac{dy}{dp} \cdot \frac{d\eta}{d\varpi} + \frac{dz}{dp} \cdot \frac{d\zeta}{d\varpi} \right] \delta x \cdot dp \cdot d\varpi$$
$$- A^2 \cdot ij \iint \frac{1}{r} \cdot \frac{d\xi}{d\varpi} \cdot \frac{d\,\delta x}{dp} \cdot dp \cdot d\varpi.$$

Aus dem zweiten Theile dieses Ausdrucks ist durch partielle Integration das $d\delta x / dp$ fortzuschaffen. Wenn man dies thut und dabei berücksichtigt, dass nach Gleichung (2) die mit δx multiplicirten Factoren die negativen Werthe der an der betreffenden Stelle angreifenden X-Kräfte sind, so erhält man:

1) für das Innere von s: 97

$$\left.\begin{aligned} Xds = A^2 \cdot ij \cdot dy \int \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right) \frac{d\eta}{d\varpi} - \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{r}\right) \frac{d\xi}{d\varpi} \right] d\varpi \\ + A^2 \cdot ij \cdot dz \int \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right) \frac{d\zeta}{d\varpi} - \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{r}\right) \frac{d\xi}{d\varpi} \right] d\varpi \end{aligned}\right\} \tag{2a}$$

2) für die Endpunkte von s, deren freie Elektricität mit e bezeichnet werden mag:

$$\overline{X} = A^2 j \frac{de}{dt} \int \frac{1}{r} \frac{d\xi}{d\varpi} \cdot d\varpi. \tag{2b}$$

Die analogen Ausdrücke für die Y und Z Kräfte sind hiernach leicht zu bilden.

Die Kräfte X für das Innere sind übereinstimmend mit Grassmann's Form, die $\overline{X}$ für die Enden von s unterscheiden die Potentialtheorie von der Grassmann'schen.

In diesen Ausdrücken kann nun, da Verschiebungen der Leiterelemente in der weiteren Rechnung nicht mehr zu berücksichtigen sind, statt der unbestimmten Variablen p und ϖ auch wieder s und σ eingeführt werden.

Wenn man die aus dem zweiten Integrale im Werthe von δP_1 entstandenen Glieder, welche alle $d\xi/d\varpi$ als Factor enthalten, noch einmal partiell integrirt, sodass $d\xi/d\varpi$ fortgeschafft und dafür dessen Integral $(\xi - x)$ eingeführt wird, so kann man den Werth von X setzen:

$$X = \int X_i d\sigma + \Sigma X_a, \tag{3}$$

wo X_a die von der partiellen Integration herrührenden auf die Enden von σ bezüglichen Theile des Ausdruckes sind. Die X_i ergeben sich aber hierbei als die Componenten der Ampère'schen Kräfte, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} X_i = -\frac{x-\xi}{r} \cdot ij \cdot A^2 \Big\{ & \frac{2}{r^2}\left[\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d\xi}{d\sigma} + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{d\eta}{ds} + \frac{dz}{ds}\cdot\frac{d\zeta}{d\sigma}\right] \\ & + \frac{3}{r^2}\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{d\sigma}\Big\} \end{aligned}\right\} \tag{3a}$$

$$X_a = -A^2 i \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \cdot \frac{x-\xi}{r^2} \cdot \frac{dr}{ds}. \tag{3b}$$

98 Indem man dieselbe partielle Integration an der Gleichung (2b) vollzieht, kommt diese auf die Form:

$$\overline{X} = \Sigma \overline{X}_a + \int \overline{X}_i d\sigma,$$

wo:

$$\overline{X}_i = -A^2 j \frac{de}{dt} \cdot \frac{x-\xi}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\sigma} \tag{3c}$$

$$\overline{X}_a = -A^2 \frac{d\varepsilon}{dt} \cdot \frac{de}{dt} \cdot \frac{x-\xi}{r}. \tag{3d}$$

Endlich kommen noch hinzu die Kräfte, welche von dem in (1c) gegebenen zweiten Theile P_2 des Potentials P herrühren. Dessen Werth lässt sich aber durch Integration über s und σ auf die Form bringen:

$$P_2 = -A^2 \frac{1-k}{2} \Sigma \left\{ \frac{de}{dt} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \cdot r \right\},$$

wo sich die Summirung auf die Werthe bezieht, die den verschiedenen Combinationen aus je zwei Enden von s und σ entsprechen. Dieses P_2 ist nicht mehr von den Richtungen der Leiterelemente abhängig, sondern nur von der Entfernung ihrer Endpunkte von einander, und zeigt also die Existenz abstossender Kräfte zwischen ihnen an von der Intensität:

$$A^2 \frac{1-k}{2} \cdot \frac{de}{dt} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt},$$

deren Componenten sich zu den unter $\overline{X}_a$ angegebenen hinzuaddiren. Die Summe beider abstossender Kräfte ist:

$$-A^2 \frac{1+k}{2} \cdot \frac{de}{dt} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Die Uebertragung dieser Rechnung auf verzweigte lineare Leitungen, auf Leitungen, die nach drei Dimensionen ausgedehnt sind, und auf die Wirkungen eines Leiters auf sich selbst, ist ohne principielle Schwierigkeiten.

Zusammenstellung der Resultate dieser Rechnung. Das Ampère'sche und Grassmann'sche Gesetz
kennen nur Kräfte, welche von Stromelement auf Stromelement 99
wirken, keine zwischen Stromelementen und Stromenden oder von Stromenden unter einander. In Bezug auf die erste Classe von Wirkungen, nämlich der Stromelemente auf Stromelemente, ist das Potentialgesetz mit jenen beiden in vollkommenster Uebereinstimmung für jede beliebige Art der Verschiebung eines vollkommen biegsamen, dehnbaren oder flüssigen Leiters. Die Fälle der Gleitstellen sind bei richtiger und genauer Anwendung der obigen Principien mit einbegriffen.

Das Potentialgesetz ergiebt aber ausser den Kräften von Stromelement auf Stromelement noch weiter:

a) Kräfte zwischen Stromelementen und Stromenden,

b) Kräfte zwischen Stromenden.

Die Berechnung derselben fällt etwas verschieden aus, je nachdem man die Berechnung der Kräfte zwischen Stromelementen auf das Grassmann'sche oder Ampère'sche Gesetz zurückführt; denn diese beiden unterscheiden sich selbst wieder. im Falle der eine Strom ungeschlossen ist, durch eine Wirkung seiner Stromenden auf die Stromelemente des anderen.

Wir können, wie es durch Ampère geschehen ist, alle diese Kräfte zurückführen auf anziehende oder abstossende, die alle nur in Richtung der Verbindungslinie der betreffenden Linienelemente und Endpunkte wirken. Das Gesetz der Wirkung zweier Stromelemente aufeinander nach Ampère ist bekannt und in Gleichung (3a) ausgedrückt.

Nach dem Potentialgesetz kommt dann hinzu:

a) eine abstossende Kraft zwischen dem Stromelement $jD\sigma$ und der am Ende des Stromfadens s freiwerdenden Elektricität e von der Grösse:

$$A^2 j \cdot \frac{de}{dt} \cdot \frac{\cos(r, D\sigma)}{r} D\sigma.$$

Diese ist, wie man sieht, jedem Potentialgesetz eigen und unabhängig von dem besonderen Werth der Constante k.

b) eine abstossende Kraft zwischen je zwei Stromenden mit den elektrischen Quantis e und ε von der Grösse

$$-A^2 \frac{1+k}{2} \cdot \frac{de}{dt} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Diese ist von k abhängig und unabhängig von r.

100 Zu bemerken ist, dass nach dem Potentialgesetz wie nach dem Grassmann'schen Gesetz die gesammte elektrodynamische Resultante aller vorhandenen Stromelemente und Stromenden zusammengenommen immer senkrecht zur Strömungsrichtung ist. Nach dem Ampère'schen Gesetz ist dies nur für die Wirkungen geschlossener Ströme der Fall. Daraus folgt dass eine sich ändernde Vertheilung der ponderablen Masse längs des Stromfadens, zu dem sie gehört, nach dem Potentialgesetz gar keinen Einfluss auf die Arbeit der elektrodynamischen Kräfte hat, was also auch den Grenzfall mit ein-

schliesst, wo aus einem Leiterelement die ponderablen Theilchen ganz verschwinden, vorausgesetzt, dass nur noch die Elektricitäten in Richtung desselben übergehen.

4) Gleitstellen. Stellt man sich die Gleitung eines Leiterstückes längs der Oberfläche des anderen als eine Bewegung zweier absolut fester Körper vor, so könnte die Anwendbarkeit des sub 2 aufgestellten Gesetzes auf den Fall, wo ein elektrischer Strom durch eine solche Gleitstelle geleitet wird, zweifelhaft erscheinen. Denn hierbei würde in der Gleitstelle jeder Stromfaden, soweit er aus einer continuirlichen Reihe ponderabler Theile besteht, nothwendig zerrissen werden. Da übrigens thatsächlich die Elektricität sich an den zerrissenen Enden nicht anhäuft, sondern durch neu gebildete Schliessungen übergeht, so müssten wir in der Rechnung die beiden Enden des ponderablen Theiles des Stromfadens nicht als Enden der Leitung überhaupt betrachten, sondern als verbunden durch ein unendlich kleines, von ponderablen Theilen freies Linienelement. In diesem Sinne wären dann alle unsere bisher angestellten Rechnungen und Resultate auch auf einen solchen Fall anwendbar.

Es ist dies einer der Fälle, wo die Voraussetzung absoluter Festigkeit der betreffenden Körper und absoluter Discontinuiät der Bewegung diesseits und jenseits der Gleitfläche physikalisch nicht zulässig ist, sondern nur als Grenze hingestellt werden kann, der sich die wirklichen Vorgänge unter Umständen bis zum Ununterscheidbaren annähern. Um zu ermitteln, wie wir in einem solchen Falle das Potentialgesetz anzuwenden haben, werden wir untersuchen müssen, wie die aus ihm gezogenen Folgerungen im Grenzfall bei allmäliger Annäherung einer continuirlichen Bewegung an die discontinuirliche ausfallen würden.

In der That ist nun in den Fällen, wo wir die Wirkung 101
elektrodynamischer Kräfte an Leitern mit sogenannten Gleitstellen beobachten können, gar keine Discontinuität der Bewegung vorhanden. Denn da die bewegenden Kräfte verhältnissmässig schwach sind und gute Leitung gefordert wird, so müssen wir bei der Ausführung der Versuche immer eine lei-

tende Flüssigkeit, Quecksilber oder einen Elektrolyten, zwischen die Enden der metallischen Leiter bringen, um gute Leitung bei leichter Beweglichkeit zu haben. Dann geschieht in der That die Bewegung unter continuirlicher Verschiebung der Flüssigkeitsschichten gegen einander, während die äussersten Schichten der Flüssigkeit an den metallischen Zuleitern haften. Brauchen wir trockene Metalle, die aufeinander schleifen, so müssen wir bekanntlich harte Reibung, die die Oberflächen verändert, unter starkem Druck herstellen, um Ströme von schwachen elektromotorischen Kräften durchzuleiten, und bei starken elektromotorischen Kräften blitzen Funken, das heisst Ströme glühenden Metalldampfes fast in jedem Augenblick an den schleifenden Theilen auf. Dadurch wird factisch immer eine dünne Uebergangsschicht hergestellt, in der der Uebergang von dem ruhenden zu dem bewegten Theile des Leiters continuirlich erfolgen kann. Sowie aber eine noch so dünne Uebergangsschicht da ist, welche die Continuität der Verschiebungen herstellt, so unterliegt die Anwendung aller oben hingestellten Sätze gar keiner Schwierigkeit, und es bleiben die Folgerungen des Potentialgesetzes für geschlossene Ströme mit solchen Gleitstellen in vollkommener Uebereinstimmung mit dem Ampère'schen Gesetze und mit der Erfahrung.

Will man den Erfolg in Fällen dieser Art direkt aus dem Potentialgesetz berechnen, so kommt hier in Betracht, dass die Stromfäden in der Uebergangsschicht Winkeldrehungen machen, die bei gleicher Geschwindigkeit der Gleitung desto schneller werden, je kürzer diese sich drehenden Abschnitte der Fäden sind, und dass daher die bei ihrer Drehung zu leistende elektrodynamische Arbeit unabhängig von ihrer Länge wird, also unabhängig von der Dicke der Uebergangsschicht.

Will man bei einer solchen Betrachtung von der Existenz der unendlich dünnen Uebergangsschicht absehen, so muss man doch das Kräftepaar an den Gleitflächen hinzusetzen, welches auf diese vernachlässigten Stromelemente ds wirkt. Die Intensität
102 seiner beiden Kräfte aber ist unabhängig von der Länge ds, wie schon soeben bemerkt wurde.

Wenn, wie in dem Beispiel von Hrn. Riecke, ein Radius eines Kreises den Strom vom Mittelpunkte desselben, um den

er drehbar ist, zur leitenden Peripherie führt, und dabei unter dem Einflusse anderer concentrischer Kreisströme steht, so wirkt, wie Hr. Riecke richtig bemerkt, nach dem Potentialgesetz unmittelbar gar keine Kraft auf den festen Theil des Radius, dessen relative Lage gegen die Kreisströme sich nicht verändert, und es kommt allein das Kräftepaar zur Erscheinung, welches auf die Uebergangsschicht an der Gleitstelle wirkt. Dieses aber bedingt in der That den ganzen Erfolg.

Was die von Hrn. Bertrand angeregte Frage nach den Kräften betrifft, welche den Zusammenhang des Leiters zu trennen suchen, so zeigt die hier angestellte ausführliche Analyse, die den allgemeinsten Fall beliebig dehnbarer und verschiebbarer Elemente in Rechnung zieht, dass auf alle inneren Elemente der Stromfäden, soweit die elektrische Stromintensität constant ist, nur und ausschliesslich die Kräfte des Grassmann'schen Gesetzes wirken. Wenn aber Zerreissung des leitenden Zusammenhanges einträte, so würden allerdings an den Endflächen die in (2b) ermittelten Kräfte wirksam werden und auf beide Endflächen in entgegengesetztem Sinne wirken. Diese könnten den Stromleiter s zu zerreissen streben, wenn der Strom in σ hinreichend stark, nahe und parallel, aber von entgegengesetzter Richtung mit dem in s wäre. Die darauf hinwirkenden Kräfte würden aber immer eine endliche Intensität haben, und ausserdem würde nach erfolgter Trennung sogleich die relativ sehr mächtige elektrostatische Kraft der durch den Extracurrent an den Trennungsflächen angehäuften Elektricitäten auf die Wiedervereinigung hinwirken.

Hrn. Bertrand's zunächst für einen elastischen Stromfaden angestellte Betrachtung aber, durch deren Resultat er das ganze Potentialgesetz zu vernichten glaubt, da nach ihm diese Kräfte jeden durchströmten Leiter zertrümmern müssten, beruht auf einem Irrthum. Er hat die relative Deformation, das heisst das Verhältniss zwischen den Verschiebungen und den linearen Dimensionen des betreffenden Volumenelementes, mit der absoluten Deformation, das heisst mit dem absoluten Betrage jener Verschiebungen verwechselt. Unter
Einwirkung eines endlichen Kräftepaares ist die relative 103
Deformation einer unendlich dünnen Lamelle allerdings end-

lich, wie Hr. **Bertrand** angiebt. Damit aber die bei der Deformation geleistete Arbeit des Kräftepaares endlich wäre, müsste die **absolute Deformation** der betreffenden Lamelle endlich sein, was nicht der Fall ist. Diese ist vielmehr von derselben Grössenordnung, wie die Dicke der Lamelle, und daher die bei der Deformation an der Lamelle geleistete Arbeit ebenfalls von der Ordnung ihrer Dicke, und die am ganzen Körper geleistete Arbeit ist endlich.

5) Was die Möglichkeit betrifft, zwischen dem **Ampère**schen Gesetz der Elektrodynamik und dem Potentialgesetze zu entscheiden, so ist das nur möglich an Strömen mit freien Enden, an denen sich freie Elektricität anhäuft und wieder verschwindet. In dieser Beziehung bietet sich folgender Weg dar, der nicht als unausführbar erscheint, wenn er auch nicht ohne die Hülfe sehr grosser Drahtmassen wird gelingen können.

Ein geschlossener Ringmagnet oder ein entsprechendes in sich zurücklaufendes Solenoïd von Kreisströmen wirkt bekanntlich nach dem **Ampère**'schen Gesetze gar nicht nach aussen. Nach dem Potentialgesetze wirkt es auf geschlossene Ströme nicht ein, wohl aber auf die Enden ungeschlossener Ströme. Hängt man eine ebene kreisförmige **Franklin**'sche Tafel so auf, dass sie um ihren verticalen Durchmesser, der mit dem verticalen Durchmesser des Ringes zusammenfällt, sich drehen kann, und verbindet ihre Platten mit den Enden der Drahtleitung des Ringes, so wird die Entladung der **Franklin**'schen Tafel durch den Ring, die in diesem Falle oscillatorisch sein würde, nach dem Potentialgesetze die Tafel der Ebene des Ringes parallel zu stellen streben, dagegen nach dem **Ampère**schen Gesetze ohne Einfluss sein.

Andererseits, wenn eine kreisförmige **Franklin**'sche Tafel horizontal aufgehängt wird, drehbar um eine durch ihren Mittelpunkt gehende Verticale, und unter ihr ein cylindrischer Elektromagnet mit verticaler Axe steht, durch dessen Drahtwindungen sich die **Franklin**'sche Tafel entladet, so muss sie nach dem **Ampère**'schen Gesetze um ihre Verticalaxe gedreht werden, nach dem Potentialgesetze dagegen nicht.

Ich werde versuchen, diese beiden Experimente anzustellen, doch sind noch Voruntersuchungen über Beseitigung der Funken, Anwendbarkeit von Eisenkernen u. s. w. nöthig, ehe ich die
Construction des Apparates mit einiger Sicherheit auf Erfolg 104
beginnen kann. Da dies vielleicht noch längere Zeit in Anspruch nehmen möchte, habe ich mich entschlossen, die Veröffentlichung der Resultate vorstehender theoretischer Untersuchungen nicht länger zu verzögern.[1])

---

1) Die Ausführung der hier vorgeschlagenen Versuche scheiterte an dem Umstande, dass die dabei auftretenden elektrostatischen Kräfte zu mächtig waren und bei den minimalsten Graden von Assymmetrie in der Stellung der Apparate viel grössere Ablenkungen hervorbrachten als von den elektromagnetischen Kräften je zu hoffen waren. (1881).

XXXVII.

Ueber die Theorie der Elektrodynamik.

Dritte Abhandlung.

Die elektrodynamischen Kräfte in bewegten Leitern.

Aus: Borchardt's Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. LXXVIII. S. 273—324. (1874).

273 Meine Abhandlung im 72. Bande dieses Journals behandelt die elektrodynamischen Wirkungen nur in ruhenden leitenden Körpern; in solchen beschränken sich die genannten Wirkungen auf die Induction elektromotorischer Kräfte. Dieser Fall erschien als der verhältnissmässig einfachste für die theoretische Behandlung, weil die bestehende elektrische Bewegung irgend einen Arbeitswerth, das heisst ein Potential, nothwendig haben muss, und der Werth desselben für geschlossene Stromleiter als wohlbekannt angesehen werden durfte. Der Zweck jener Arbeit war ein wesentlich praktischer; es handelte sich darum zu untersuchen, welche verschiedenen Formen der Werth der elektrodynamischen Energie für ungeschlossene Ströme etwa noch haben konnte, wenn man ihn für geschlossene Ströme durch die von F. E. Neumann dem Vater (beziehlich durch Gauss [1]) gegebenen Ausdrücke als bekannt ansieht; ferner bei welcher Art von Versuchen sich möglicher Weise Unterschiede zeigen könnten, welche von den noch unbestimmten

1) Gauss' Werke, Bd. V, S. 610 u. 613. Die nachgelassenen Papiere aus dem Jahre 1835 enthalten den Werth des elektrodynamischen Potentials

Theilen des Ausdruckes herrührten. Hielt man an der Wahr-
scheinlichkeit fest, dass gewisse allgemeinste Eigenschaften der
bekannten Theile der gesuchten Ausdrücke auch den noch
unbekannten zukommen würden, so liess sich das, was zweifel-
haft blieb, auf den unbekannt bleibenden Werth einer Con-
stanten k zurückführen, welche in der Lehre von der Elektro-
dynamik etwa dieselbe Rolle spielt, wie in der Lehre von der
Elasticität diejenige Constante, welche das Verhältniss zwischen
dem Widerstande gegen Compression und dem gegen Schiebung
der Schichten angiebt. Ueber diese Constante ergab die Unter-
suchung nur soviel, dass sie nicht negativ sein dürfe (ebenso
wenig wie die genannte Constante der Elasticität), weil sonst
das Gleichgewicht der ruhenden Elektricität in einem ruhenden
Leiter labil würde, und sich dann die Möglichkeit elektrischer
Bewegungen ergeben hätte, deren Arbeitswerth geringer ge- 274
wesen wäre als der des Ruhezustandes.

Ich habe in jener Arbeit die von Hrn. F. E. Neumann
in die Wissenschaft einmal eingeführten Bezeichnungen bei-
behalten. Die Grösse, die in demselben Sinne wie die lebendige
Kraft ponderabler bewegter Massen das der elektrischen Be-
wegung entsprechende Quantum von Energie angiebt, und die
man deshalb mit Cl. Maxwell auch passend die actuelle
Energie der elektrischen Bewegung nennen kann, ist
gleich dem negativen Werthe des von Neumann senior
definirten elektrodynamischen Potentials, und nur in
diesem Sinne ist letzterer Ausdruck an den meisten Stellen
jener Arbeit beibehalten worden.

Der genannte Begriff wird also daselbst ohne jede Be-
ziehung auf die bei Bewegungen von Leitern eintretenden
elektrodynamischen Erscheinungen gebraucht, und seine An-
wendung bleibt unberührt durch die Einwände, welche seitdem
von mehreren Physikern und Mathematikern gegen eine er-
weiterte Anwendung desselben auf die von Leitern elektrischer
Ströme gegen einander ausgeübten Bewegungskräfte (pondero-
motorischer Kräfte nach Hrn. C. Neumann juniors zweck-
mässiger Nomenclatur) erhoben worden sind. Letzteres ent-
spricht einer anderen Bedeutung des elektrodynamischen Po-
tentials, die mit der erst erwähnten nicht nothwendig verbunden

ist, sich aber historisch zuerst entwickelt und die Terminologie bestimmt hat. Danach spielt das elektrodynamische Potential den ponderomotorischen Kräften zweier linearer Stromleiter gegenüber dieselbe Rolle, wie das magnetische oder elektrostatische Potential den magnetischen oder elektrischen Anziehungskräften gegenüber. Es giebt in diesem Sinne die potentielle Energie der ponderomotorischen Kräfte elektrodynamischen Ursprungs an, welche, wenn die Stromstärken in den leitenden Fäden unverändert bleiben, bei den Bewegungen der Leiter in mechanische Arbeit verwandelt werden kann. Und zwar ist die bei einer bestimmten Verschiebung der Leiter und bei unverändert gebliebenen Stromintensitäten von den ponderomotorischen Kräften elektrodynamischen Ursprungs geleistete Arbeit gleich zu setzen der Differenz, um welche der Werth des elektrodynamischen Potentials während dieser Verschiebung kleiner geworden ist. Bei diesem Gebrauche des Potentialbegriffes ist also die Rede von einer besonderen Art von Arbeit (der mechanischen bei Bewegung der Leiter geleisteten), welche unter besonderen beschränkenden Bedingungen (Constanz der Stromintensitäten) geleistet werden kann. Wenn wir in dem Sinne meiner früheren Arbeit das negativ genommene elektro-
275 dynamische Potential gleich der actuellen Energie der elektrischen Bewegung setzen, so ist dabei keine Beschränkung weder der einen, noch der anderen Art zu machen nöthig. Der Beweis, dass das elektrodynamische Potential negativ genommen das Arbeitsäquivalent der elektrischen Bewegung ausdrücke, ist allerdings dort nur geführt worden unter der Voraussetzung, dass die elektrischen Ströme ohne Bewegung der Leiter verlaufen und erlöschen. Die Wärme, welche dabei in den durchströmten Leitern entwickelt wird, ergiebt sich als das Aequivalent jenes Arbeitswerthes. Dadurch ist aber die Bedeutung jener Grösse als eines Arbeitsäquivalents ein für alle Mal festgestellt.

Die Aufgabe des vorliegenden Aufsatzes ist nun, den Umfang festzustellen, in welchem die andere und ursprünglichere Bedeutung des elektrodynamischen Potentials als eines Potentials der ponderomotorischen Kräfte den vorhandenen Thatsachen gegenüber zulässig erscheint.

Die Hypothese, dass die ponderomotorischen Kräfte elektrodynamischen Ursprungs, wenn die Intensität sämmtlicher elektrischer Strömungen in deren materiellen leitenden Fäden constant bleibt, ein Potential haben, können wir mit dem von Hrn. C. Neumann angewendeten Namen kurz das Potentialgesetz der ponderomotorischen elektrodynamischen Kräfte nennen. Ist der Werth des Potentials gegeben, und wird ferner die Hypothese gemacht, dass die Grösse und Richtung der genannten ponderomotorischen Kräfte unabhängig von den gleichzeitig erfolgenden virtuellen oder actuellen Verschiebungen der Leiterelemente sei, so ist dadurch die Grösse dieser Kräfte vollständig bestimmt.

Thatsächlich bekannt ist die Grösse der ponderomotorischen Kräfte bisher erst für die Wirkungen von je zwei oder mehreren geschlossenen Strömen aufeinander, und für die Wirkungen eines geschlossenen Stromes auf seine einzelnen Theile. Wir dürfen das Ampère'sche Gesetz als einen thatsächlich richtigen gesetzlichen Ausdruck dieses bis jetzt bekannten Bereiches von Erscheinungen ansehen.

Wir werden also zunächst nachzuweisen haben, dass für geschlossene Ströme bei beliebiger Biegsamkeit, Dehnbarkeit und Verschiebbarkeit der Leiterstücke die Berechnung der ponderomotorischen Kräfte aus dem Potentialgesetze genau dieselben Werthe giebt, wie die aus dem Ampère'schen Gesetze.

Dieser Nachweis ist von Hrn. F. E. Neumann[1]) selbst nur gegeben worden für den Fall, dass die betreffenden Strom- 276
leiter linear sind, und jeder von ihnen unveränderliche Form und Grösse hat. Vergegenwärtigt man sich den Zustand der mathematischen Theorie der elektrischen Vorgänge zur Zeit der Veröffentlichung dieses Beweises, so ist leicht zu verstehen, warum der Autor desselben in seiner vorsichtigen, an wohlbestätigten Thatsachen streng festhaltenden Weise sich jene Beschränkungen auferlegte, und die Tragweite seines wichtigen und fruchtbaren Gesetzes, welches die ganze Elektrodynamik

1) Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme. Berlin 1848. — Abhandlungen d. Berliner Akademie 1847.

zu umfassen fähig war, zunächst noch so eng abgrenzte. Zu jener Zeit war nämlich die Theorie der Vertheilung elektrischer Ströme in Leitern von drei Dimensionen noch nicht durchgearbeitet, also konnten auch die Wirkungen der elektrodynamischen Induction auf nicht lineare Leiter noch nicht behandelt werden. Das Potential eines Leiters auf sich selbst wird aber unendlich gross, wenn man ihn als eine Linie im strengen Sinne des Wortes betrachtet, und die Kräfte, welche die Theile eines seine Form verändernden Leiters aufeinander ausüben, lassen sich nicht behandeln, ehe der Werth des Potentials, welches er auf sich selbst ausübt, sicher berechnet werden kann.

Was im Jahre 1847 mangelte, ist jetzt geleistet, ist theoretisch und experimentell durchgearbeitet zum grossen Theil durch Hrn. Neumann senior selbst und seine Schüler, sodass, was an dem damals gegebenen Beweise fehlte, jetzt verhältnissmässig leicht zu ergänzen ist. Die mathematischen Methoden dafür waren durch die früheren Arbeiten gegeben, und ich würde kaum gewagt haben für eine solche Arbeit den Platz in diesem Journale in Anspruch zu nehmen, wenn nicht die Schwierigkeiten, auf welche die Herren J. Bertrand[1]), C. Neumann[2]) und Riecke[3]) bei der Anwendung des Potentialgesetzes gestossen sind, und die Einwände, die sie daraus hernehmen zu dürfen glaubten, mir gezeigt hätten, dass eine methodische Durchführung des Beweises mit Beseitigung der früheren beschränkenden Annahmen wünschenswerth und nützlich sein würde.

Die Einwände der letztgenannten beiden Herren beziehen sich auf die Erscheinungen an Stromkreisen mit Gleitstellen. Eine vollständig genügende Behandlung dieser Fälle ist nur
277 zu geben, wenn man die Werthe der Kräfte in Leitern von drei Dimensionen schon bestimmt hat. Bei den wirklich ausführbaren Versuchen mit Gleitstellen haben wir immer eine

1) Comptes Rendus de l'Acad. d. Sc. 1872, 14 Octobre; 1873, 3 et 10 Novembre.

2) Berichte der Königl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1872, 3. August. — Mathematische Annalen Bd. V, 606.

3) Göttinger Nachrichten. 1872, 14. August.

flüssige Schicht (Quecksilber, elektrolytische Flüssigkeiten oder auch wohl elektrische Funken und Lichtbogen) zwischen den Leitern, welche einen continuirlichen Uebergang der Bewegung von einem zum anderen Leiter herstellen, sodass auch an der Gleitstelle die Componenten der Geschwindigkeit continuirliche Functionen der Coordinaten bleiben. Dies letztere muss vorausgesetzt werden, wenn das Potentialgesetz überhaupt anwendbar sein soll. Nun lässt sich aber zeigen, dass die Wirkung einer sehr dünnen Uebergangsschicht dieser Art von ihrer Dicke unabhängig ist, und sich auch nicht ändert, wenn letztere verschwindend klein wird, und dadurch die Componenten der Geschwindigkeit an der Gleitfläche discontinuirlich werden. Daraus ergiebt sich, wie man die Sache zu behandeln hat, wenn man zur Vereinfachung der Rechnung die mathematische Fiction einer absoluten Discontinuität der Bewegung einführen will. Wenn man diese Discontinuität analytisch richtig behandelt, als Grenze eines continuirlichen Ueberganges, so ergiebt das Potentialgesetz genau dieselben Folgerungen wie das Ampère'sche, die auch in guter Uebereinstimmung mit den bekannten Thatsachen sind.

Während für geschlossene Stromkreise die genannten beiden Gesetze die vollkommenste Uebereinstimmung zeigen bei ganz beliebigen Formveränderungen der Leiter, so unterscheiden sie sich von einander in Bezug auf die ponderomotorischen Wirkungen an ungeschlossenen Leitern. Ungeschlossene Leiter haben Enden, und diese Enden sind dadurch charakterisirt, dass an ihnen freie positive oder negative Elektricität auftritt oder verschwindet. Das Ampère'sche Gesetz reducirt alle ponderomotorischen Wirkungen auf anziehende oder abstossende Kräfte zwischen Stromelementen. Ist das Potentialgesetz auch für ungeschlossene Ströme gültig, so müssen ausser 1) den Ampère'schen Kräften zwischen Stromelementen, auch noch 2) anziehende oder abstossende Kräfte zwischen Stromelementen und Stromenden und 3) eben solche zwischen Stromenden existiren. Die Art des Stromendes charakterisirt man am zweckmässigsten durch den Werth von de/dt, wo e die freie positive Elektricität an der betreffenden Stelle bezeichnet. Die Kräfte ad 2) sind proportional de/dt

und der auf das Stromende e hin gerichteten Componente der Strömung in dem wirkenden Stromelemente, abstossend, wenn
278 diese Componente und de/dt gleiches Zeichen haben, übrigens umgekehrt proportional der Entfernung beider und unabhängig von der Constante k, also jeder Form des Potentialgesetzes in gleicher Stärke zukommend. Die Kräfte ad 3) für zwei Stromenden mit den freien Elektricitäten e und ε sind proportional dem Product $(de/dt).(d\varepsilon/dt).(1+k)$; sie sind anziehend, wenn die beiden Differentialquotienten gleiches Zeichen haben, und unabhängig von der Entfernung. Sie könnten nur bei dem unzulässigen Werthe $k = -1$ wegfallen.

An den Umstand, dass hier Kräfte aufgeführt werden, deren Intensität von der Entfernung unabhängig ist, hat Hr. Bertrand[1]) Einwendungen geknüpft, welche berechtigt sein würden, wenn es sich um unabhängig voneinander bestehende Elementarkräfte handelte. Das Potentialgesetz in seiner ursprünglichen Form kennt ebenso gut wie das Ampère'sche nur Fernwirkungen, die mit wachsender Entfernung abnehmen. Wenn man aber die Differenz zwischen den von beiden Gesetzen angezeigten Wirkungen nimmt, und diese Differenz nach Art der von Ampère gewählten Darstellung in einfache anziehende Kräfte auflöst, die von Punkt zu Punkt wirken, so kommt man auf Kräfte, die von der Entfernung unabhängig sind. Da aber jede ungeschlossene Linie zwei Enden hat, und von beiden Enden gleich grosse und entgegengesetzte Kräfte dieser Art ausgehen, diese sich auch der Natur der Sache nach nothwendig noch mit anderen von den Elementen der Stromcurve herrührenden Summanden verbinden, so kommt es nicht darauf an, ob die zu einem bestimmten Zwecke ausgesonderten Theile einzeln, sondern nur darauf, ob ihre Summe physikalisch unzulässige Folgerungen giebt. Das letztere aber ist nicht der Fall.

Diese Verhältnisse sind in § 15 dieser Arbeit für unverzweigte lineare Leiter auseinandergesetzt, in § 16 für körper-

---

1) Comptes Rendus de l'Acad. d. Sc. T. LXXVII p. 1054. — Die Einwände beziehen sich auf den oben als Nr. XXXVI abgedruckten vorläufigen Auszug der vorliegenden Arbeit.

liche Leiter, in § 17 ist die Behandlung der analytischen Ausdrücke für Gleitstellen besprochen.

Da directe Versuche über die ponderomotorischen Kräfte elektrodynamischen Ursprunges an Stromenden noch nicht vorliegen, so blieb zunächst nur noch nachzuweisen übrig, dass das Potentialgesetz in seiner Anwendung auf ungeschlossene Leiter von beliebig veränderlicher Form dem Gesetze von der Constanz der Energie genüge. Zu dem Ende sind in § 18 die analytischen Ausdrücke für die elektrodynamische Induction 279
durch Bewegung körperlicher Leiter entwickelt, und ist in § 19 mit deren Hülfe die Constanz der Energie nachgewiesen.

Nachdem auf diese Weise der Nachweis vervollständigt war, dass das Potentialgesetz in seiner verallgemeinerten Fassung in allen Fällen den an ein solches Gesetz nach dem jetzigen Stande unserer physikalischen Kenntnisse zu stellenden Anforderungen entspreche, habe ich noch die Frage zu beantworten gesucht, ob und welche Abweichungen in den Werthen der ponderomotorischen und durch Bewegung inducirten elektromotorischen Kräfte von dem Potentialgesetze etwa stattfinden könnten, ohne das Gesetz von der Erhaltung der Kraft zu verletzen, und ohne die ponderomotorischen Wirkungen geschlossener Ströme gegen einander zu verändern.

Die Untersuchung hierüber ist in § 20 geführt worden; da die allgemeineren Formen der durch Aenderungen der Stromstärken inducirten Kräfte von mir schon früher discutirt sind, so konnte ich mich hier auf die durch Bewegung der Leiter zu inducirenden beschränken. Es ist dabei die Annahme festgehalten worden, 1) dass die zu den elektromotorischen Kräften vielleicht hinzuzufügenden Zusatzkräfte im Leiterelement Ds unabhängig von der Stromstärke i in Ds, aber proportional der Stromstärke j in dem inducirenden Elemente $D\sigma$ zu setzen, und dass die ponderomotorische Arbeit, welche sie bei einer kleinen Verschiebung leisten, proportional mit $i.j$ ist; 2) dass die Analogie zwischen der Wirkung geschlossener Ströme und der von Magneten auch in diesen Fällen bestehe, 3) dass die elektromotorischen und ponderomotorischen Wirkungen der einzelnen wirkenden Elemente $D\sigma$ auf das Element Ds sich einfach summiren.

Diese Annahmen führen zu den in den Gleichungen (7a) und (7b) aufgestellten Werthen der Zusätze, welche zu den elektromotorischen Kräften $j\mathfrak{r}$, ausgeübt auf Ds, $i\mathfrak{r}_1$ auf $D\sigma$, und zu der ponderomotorischen Arbeit $i.j.\delta\mathfrak{w}$ gemacht werden könnten. Darin kommen sechs unbekannte Functionen der Entfernung r beider Elemente vor, nämlich φ, ψ, χ und $\varphi_1, \psi_1, \chi_1$, von denen die drei ersteren auch noch von $dr/d\sigma$ und die drei letzteren auch noch von dr/ds abhängen können. Nimmt man an, wie es Hr. Neumann gethan, dass nur die Ampère'schen ponderomotorischen Kräfte existiren, und keine anderen, so bestimmen sich die genannten Functionen, wie es in den Gleichungen (8) angegeben ist, und der Werth der durch Be-
280 wegung der Leiter inducirten elektromotorischen Kraft wird in Gleichung (8b) gegeben. Dieser Werth unterscheidet sich von dem, den Hr. C. Neumann[1]) bei Lösung einer sehr ähnlichen Aufgabe gefunden hat, dadurch dass er die unbestimmt bleibende Constante k enthält, welche nach der Neumann'schen Deduction den bestimmten Werth $k = -1$ annehmen müsste. Der von mir gefundene allgemeinere Werth entspricht aber allen denjenigen Forderungen, welche Hr. C. Neumann als die Grundlagen seiner Rechnung vorangestellt hat (l. c. S. 419—420 und 468—470).

Der Unterschied ist dadurch bedingt, dass der genannte Autor im Laufe der Rechnung (l. c. S. 481—482) noch eine weitere beschränkende Hypothese gleichsam als selbstverständlich einführt, die dies aber, wie mir scheint, durchaus nicht ist. Er nimmt nämlich an, dass bei einer durch Bewegung erzeugten Verlängerung eines Stromelementes dasselbe inducirend so wirke, als ob in dem hinzugekommenen Theile seiner Länge ein neuer Strom entstände, und wendet auf diesen Vorgang das Gesetz der Induction durch Intensitätsänderung an, welches, wenn man das Potentialgesetz verlässt, von dem der Induction durch Lagenänderung verschieden ist. Man könnte aber eine Dehnung eines Stromelementes ebenso gut als eine Entfaltung

1) Ueber die den Kräften elektromotorischen Ursprungs zuzuschreibenden Elementargesetze. Abhandlungen der Königl. Sächs. Akademie der Wissenschaften. Math.-Phys. Classe Bd. X. — Die elektrischen Kräfte. Leipzig, 1873. Aus der ersteren Abhandlung ist oben citirt.

vorher eingefalteter Theile desselben ansehen, und müsste dann offenbar das Gesetz der Induction durch Lagenänderung anwenden. Da ich keine solche beschränkende Hypothese gemacht habe, ist der von mir gefundene Ausdruck allgemeiner, indem er eine Constante k mehr enthält.

Dieser Unterschied ist aber von grosser Wichtigkeit. Hrn. C. Neumann's Deduction zeigt nämlich, dass, wenn man von seinen Voraussetzungen ausgeht, die Constante k einen negativen Werth erhält, und das Gleichgewicht der Elektricität in den Leitern labil wird. Wie ich in meinen früheren beiden Arbeiten gezeigt habe, sind überhaupt negative Werthe von k nicht zulässig. Wären Hrn. C. Neumann's Voraussetzungen unanfechtbar, so würde durch seine sorgfältige und scharfsinnige Untersuchung meines Erachtens nach der Beweis geführt gewesen sein, dass das Ampère'sche Gesetz, als ausschliessliches Gesetz der ponderomotorischen Kräfte betrachtet, mit dem Gesetze von der Erhaltung der Kraft unvereinbar sei.[1]) Da
aber die bezeichnete, nachträglich gemachte Hypothese über 281
die Induction durch Dehnung der Leiterelemente keineswegs als unumgänglich erscheint, ist, so weit ich sehe, aus rein theoretischen Gründen über die an den Enden ungeschlossener Leiter wirkenden ponderomotorischen Kräfte keine Entscheidung zu gewinnen, und muss an das Experiment appellirt werden.

Ich habe schon in der der Berliner Akademie gemachten Mittheilung (Februar 1873) kurz angedeutet, wie solche Versuche gemacht werden könnten.

Die dort geplanten Versuche werden aber nur bei Anwendung sehr grosser Drahtmassen und Batterien Erfolg gewähren können. Leichter ausführbar ist vielleicht eine andere Classe von Versuchen, bei deren Erfolg freilich noch eine andere Frage in Betracht kommt, welche zwischen den verschiedenen Theorien streitig ist. Hrn. W. Weber's Theorie setzt nämlich voraus, dass elektrische Quanta, welche irgendwie ihre

---

1) Von dieser Meinung ausgehend habe ich einen Bericht für die englische Zeitschrift „the Academy“ (March 14, 1874) geschrieben, und erst später gesehen, dass gegen Hrn. C. Neumann's Deduction Einwendungen zu machen seien.

relative Lage zu einander ändern, elektrodynamische Wirkungen hervorbringen müssen, einerlei ob ihre ponderablen Träger sich mit ihnen bewegen oder nicht. Das Potentialgesetz dagegen kennt nur Wirkungen, welche die strömende Elektricität hervorbringt, wenn sie sich in ihren Leitern und relativ zu diesen bewegt. Letzterer Annahme entsprechend würden Spitzen, durch welche Elektricität ausströmt oder einströmt, sei es gegen die Scheibe einer Elektrisirmaschine, sei es um von der bewegten Luft fortgetragen zu werden, als Stromenden zu betrachten sein, und würden die elektrodynamischen Eigenschaften von solchen zeigen können.

Einstweilen, ehe solche Versuche ausgeführt sind, bleiben wir auf die Wahrscheinlichkeit beschränkt, welche die grössere oder geringere Einfachheit und Symmetrie der Gesetze, die mehr oder weniger gut bewahrte Analogie der wesentlichen Eigenschaften der wirksamen Kräfte in den verschiedenen Fällen darbietet. Solche Betrachtungen geben allerdings keine definitive Entscheidung, aber sie geben doch immerhin den verhältnissmässig besten Leitfaden in die Hand, um den richtigen Weg zu finden.

In dieser Beziehung ist zu bemerken, dass das Potentialgesetz unter denselben analytischen Ausdruck, der namentlich bei der Annahme $k = 1$ ausserordentlich einfach wird, die sämmtlichen Erscheinungen 1) der ponderomotorischen Kräfte. 2) der Induction durch Stromesänderung, 3) der Induction durch Bewegung vereinigt, also überhaupt das ganze Gebiet der bisher bekannten Thatsachen der Elektrodynamik. Die Auffindung des Potentialgesetzes durch Gauss und Neumann senior kann in der That als eine der glücklichsten und glänzendsten Errun-
282 genschaften der mathematischen Physik angesehen werden. Weichen wir dagegen ab vom Potentialgesetze, so brauchen wir für jedes der genannten Gebiete besondere Gesetze, wobei das für 2) mit dem Potentialgesetze übereinstimmt, die beiden anderen complicirter sind als jenes.

An geschlossenen Stromkreisen finden wir thatsächlich folgende allgemeine Eigenthümlichkeiten der elektrodynamischen Wirkungen:

1) Die ponderomotorischen Kräfte geschlossener Strom-

kreise haben ein Potential. Das heisst: die mechanische Arbeit der ponderomotorischen Kräfte beider Kreise bei constant bleibenden Stromintensitäten[1]) ist nur von der Anfangs- und Endlage beider Kreise, nicht von der Art des Uebergangs abhängig.

2) Die ponderomotorischen Kräfte, welche ein geschlossener Stromkreis auf ein lineares Stromelement ohne freie Enden ausübt, stehen auf der Richtung des letzteren senkrecht.

3) Die gesammte elektromotorische Kraft, welche ein geschlossener Stromkreis während einer endlichen Verschiebung und Aenderung seiner Stromstärke in einem anderen hervorbringt, ist nur abhängig von der anfänglichen und endlichen relativen Lage beider Kreise zu einander, sowie von der anfänglichen und endlichen Stromstärke des Inducenten, nicht von den Zwischenzuständen.

Diese drei Eigenschaften der elektrodynamischen Kräfte überträgt das Potentialgesetz hypothetisch auch auf ungeschlossene Ströme. Wird eine von ihnen übertragen, so werden nothwendig auch die anderen übertragen.

Wenn wir dagegen das Ampère'sche Gesetz als den vollständigen Ausdruck für die ponderomotorischen Kräfte annehmen, so überträgt sich keine von diesen allgemeinen Eigenschaften der Wirkungen geschlossener Ströme auf die ungeschlossenen. Es wird in diesem Falle nur eine mögliche, aber nicht nothwendige Zerlegungsweise der ponderomotorischen Kräfte geschlossener Stromkreise in Elemente, die physikalisch nicht direct nachweisbar sind, auf die ungeschlossenen Kreise übertragen.

Ich muss gestehen, dass es mir im höchsten Grade unwahrscheinlich dünkt, dass Eigenschaften, wie 1) und 3), die am entscheidendsten für den Charakter der Naturkräfte sind,
bei den uns bekannten elektrodynamischen Wirkungen nur 233
durch einen gleichsam zufälligen Einfluss der Summirung über eine geschlossene Linie entstanden sein sollten, während sie den einzelnen Summanden an und für sich nicht zukämen.

---

1) Gleitstellen sind dabei zu behandeln als sich entfaltende Falten, oder man muss die neuen Leiterstücke durch Dehnung entwickelt denken.

§ 15. Die ponderomotorischen Kräfte nach dem Potentialgesetze.

Das Potentialgesetz giebt unmittelbar nur den Werth der mechanischen Arbeit, welche von den ponderomotorischen Kräften elektrodynamischen Ursprungs geleistet wird, wenn zwei lineare Stromleiter eine Aenderung ihrer relativen Lage erleiden, während die Intensität des elektrischen Stromes in beiden constant bleibt. Die letztere Bedingung, nämlich Constanz der Stromstärke, wird im Folgenden immer als erfüllt vorausgesetzt, wo nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt ist. Der Ausdruck, den das genannte Gesetz für den Werth der genannten Arbeit giebt, lässt sich auf ganz beliebige Verschiebungen der einzelnen Punkte der Leiter anwenden, wie sie durch beliebige andere gleichzeitig einwirkende mechanische Kräfte hervorgebracht werden können, wobei nur zu bemerken ist, dass überall, wo die Strömung fortbestehen soll, die Componenten der Verschiebungen continuirliche Functionen der Coordinaten sein müssen, da discontinuirliche Verschiebungen die Continuität der Leitung aufheben würden. Unter diesen Umständen genügt der Ausdruck für den Werth der Arbeit, um die elektrodynamischen Kräfte vollständig zu bestimmen, welche auf die einzelnen Punkte des Leiters wirken, wenn wir voraussetzen, dass die elektrodynamische Kraft, welche auf jeden Punkt des Leiters wirkt, unabhängig ist von den Geschwindigkeiten dieses Punktes und unabhängig von den gleichzeitigen Verschiebungen der übrigen Punkte des Leiters.[1]) Die Aufgabe dieses Paragraphen ist, zu zeigen, dass ein eindeutig bestimmtes System von solchen Kräften angegeben werden kann, welches die durch den Werth des Potentials angezeigte Arbeit in jedem Falle hervorzubringen geeignet ist; und ferner werden wir die Werthe dieser durch das Potentialgesetz angezeigten Kräfte zu vergleichen haben mit denen, welche Ampère angenommen hat.

---

1) Diese Formulirung der Aufgabe ist gewählt, um die von Hrn. Bertrand (Comptes Rendus T. LXXVII, p. 1049—1054) begangenen Missverständnisse bestimmter auszuschliessen.

Das Längenelement des einen Leiters s sei Ds, und die Stromintensität in demselben i, während wir dieselben Grössen für den anderen Leiter σ mit $D\sigma$ und j bezeichnen. Die Entfernung zwischen Ds und $D\sigma$ bezeichnen wir mit r. Für den Werth des Potentials DP der ponderomotorischen Kräfte, welches die beiden Elemente Ds und $D\sigma$ gegen einander her- 234
vorbringen, nehme ich aus den in meiner ersten Abhandlung auseinander gesetzten Gründen wieder den allgemeineren Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} DP = -\tfrac{1}{2}A^2 \cdot \frac{ij}{r}\,[(1+k)\cos(Ds, D\sigma) \\ + (1-k)\cos(r, Ds)\cos(r, D\sigma)]\, Ds \cdot D\sigma. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Darin ist A die von Hrn. W. Weber gemessene Constante, oder $1/A$ eine der Lichtgeschwindigkeit nahehin gleiche Geschwindigkeit, k eine vorläufig noch unbekannt bleibende Constante, welche nicht negativ sein kann, und $(Ds, D\sigma)$, (r, Ds), $(r, D\sigma)$ sind die Winkel zwischen den Richtungen der bezeichneten Linien, wobei Ds und $D\sigma$ als positiv wachsend zu nehmen sind nach der Richtung, in welcher die positive Elektricität fliesst, r aber positiv wächst von $D\sigma$ nach Ds. Als Einheit der Stromstärke ist, wie früher, diejenige genommen, bei welcher die algebraische Summe der durch einen Querschnitt in bestimmtem Sinne fliessenden Elektricität gleich der elektrostatischen Maasseinheit ist.

Das ganze Potential der beiden Leiter s und σ aufeinander würde sein:

$$P = \iint DP.$$

Das Potentialgesetz sagt aus, dass wenn die beiden Stromleiter s und σ aus einer ersten Lage mit dem Potentialwerth P_1 in eine zweite mit dem Potentialwerthe P_2 bewegt werden, und die Ströme i und j dabei constante Intensität behalten, die während der Bewegung von den elektrodynamischen Bewegungskräften, welche jeder Leiter auf den andern ausübt, geleistete Arbeit gleich $P_1 - P_2$ sei.

Es wird in diesem Paragraphen also vorläufig noch abgesehen von den Kräften, welche jedes Element des Leiters s

von sämmtlichen übrigen desselben Leiters erleidet. Diese Kräfte können nur bei Berücksichtigung der drei Dimensionen der Leiter berechnet werden, da, wie schon bemerkt, das elektrodynamische Potential für lineare Leiter mit endlicher Strömung unendlich wird.

Wir bezeichnen die rechtwinkeligen Coordinaten des Linienelements Ds mit x, y, z, die des Elements $D\sigma$ mit ξ, η, ζ. Während einer unendlich kleinen Lagenänderung mögen die ersteren zunehmen um δx, δy, δz, die zweiten um $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, der Potentialwerth P um δP. Dabei seien $X \cdot Ds$, $Y \cdot Ds$, $Z \cdot Ds$ die Componenten der elektrodynamischen Kräfte, welche
285 σ auf Ds ausübt, und $\Xi D\sigma$, $\Upsilon D\sigma$, $Z D\sigma$ seien dieselben für die Wirkung von s auf $D\sigma$. Ferner seien $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ und $\overline{\Xi}$, $\overline{\Upsilon}$, $\overline{Z}$ die Componenten der Kräfte, welche auf die Enden der beiden Stromleiter einwirken, und $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, sowie $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$, $\overline{\zeta}$ die zugehörigen Coordinaten. Nach dem Potentialgesetze ist alsdann:

$$\left.\begin{aligned}\delta P + \int(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)Ds + \Sigma[\overline{X}\delta\overline{x} + \overline{Y}\delta\overline{y} + \overline{Z}\delta\overline{z}]\\ + \int(\Xi\delta\xi + \Upsilon\delta\eta + Z\delta\zeta)D\sigma + \Sigma[\overline{\Xi}\delta\overline{\xi} + \overline{\Upsilon}\delta\overline{\eta} + \overline{Z}\delta\overline{\zeta}] = 0.\end{aligned}\right\} \quad (1\,a)$$

Die Variationen der Coordinaten sind hierbei ganz beliebig zu nehmen, nur müssen, wie oben bemerkt, δx, δy und δz continuirliche Functionen der Länge s, und $\delta\xi$, $\delta\eta$ und $\delta\zeta$ der Länge σ sein, wenn wir mit s und σ die längs des Leiters gemessenen Abstände der Elemente Ds und $D\sigma$ von zwei beliebig gewählten festen Anfangspunkten verstehen. Wäre diese Bedingung an irgend einer Stelle nicht erfüllt, so würde die Continuität der Leitung daselbst unterbrochen werden. In diesem Falle wäre eine solche Stelle als ein Paar von Endpunkten der sich trennenden beiden Leiterstücke zu betrachten. Welche Kräfte auf solche wirken, wird sich im Folgenden ergeben. Wie die Fälle discontinuirlicher Lagenänderungen in Gleitstellen zu behandeln sind, in denen die Leitung des Stromes nicht aufhört, werde ich in § 17 auseinandersetzen.

Zur bequemeren Berechnung von δP wollen wir P zunächst in zwei Theile zerlegen:

$$P = P_0 + P_1,$$

$$DP_0 = - A^2 \frac{ij}{r} \cos(Ds, D\sigma) \cdot Ds \cdot D\sigma,$$

$$DP_1 = - \tfrac{1}{2} A^2 \frac{ij}{r} (1-k) \left[\cos(r, Ds)\cos(r, D\sigma) - \cos(Ds, D\sigma)\right] \cdot Ds \cdot D\sigma$$

oder:

$$DP_1 = -\tfrac{1}{2} A^2 ij \cdot (1-k) \frac{d^2 r}{ds\, d\sigma} \cdot Ds \cdot D\sigma.$$

Wenn wir durch Integration nach s und σ aus der letzteren Gleichung den Werth von P_1 bilden, und die an den Enden von s und σ angesammelte freie Elektricität beziehlich mit e und ε bezeichnen, können wir schreiben:

$$P_1 = - \frac{1-k}{2} A^2 \Sigma \left[\frac{de}{dt} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \cdot r\right], \qquad (1\text{b})$$

wo sich das Summenzeichen auf alle aus je einem Endpunkt von s und je einem Endpunkt von σ zu bildenden Combinationen bezieht. Der Werth von P_1 ist also nur von der Lage der Endpunkte der beiden Leiter abhängig, und ergiebt 286
also auch nur Kräfte, welche auf diese wirken, deren Grösse wir weiter unten bestimmen werden.

Der andere Theil des Potentials P_0 hat die ursprüngliche von Hrn. F. E. Neumann in der oben citirten Abhandlung gewählte Form, abgesehen von einer anderen Wahl der Stromeinheit. Er kann im allgemeinen von dem Integralzeichen nicht befreit werden. Da nun bei der Ausführung der Variationen δx, δy, δz auch die Längen der Elemente Ds variiren werden, so wollen wir unter dem Integrationszeichen statt s und σ zwei andere Variabele p und ϖ einführen, deren Werthe für jeden einzelnen materiellen Punkt des Leiters bei der Bewegung unverändert bleiben sollen, und die so gewählt sind, dass s eine continuirliche Function von p, σ eine eben solche von ϖ ist. Dann ist also:

$$P_0 = - A^2 ij \iint \frac{\cos(Ds, D\sigma)}{r} \cdot \frac{ds}{dp} \cdot \frac{d\sigma}{d\varpi} \cdot dp \cdot d\varpi$$

oder:

$$P_0 = - A^2 i.j \iint \frac{1}{r} \left[\frac{dx}{dp} \cdot \frac{d\xi}{d\varpi} + \frac{dy}{dp} \cdot \frac{d\eta}{d\varpi} + \frac{dz}{dp} \cdot \frac{d\zeta}{d\varpi}\right] \cdot dp \cdot d\varpi. \qquad (1\text{c})$$

Da die Variationen der Coordinaten keiner anderen einschränkenden Bedingung unterliegen, als der, dass sie continuirliche Functionen der Coordinaten sind, so kann man die Variation für jede derselben einzeln berechnen, indem man die Variationen der anderen Coordinaten gleich Null setzt. Variiren wir nur x, so wird:

$$\delta P_0 = -A^2 \cdot ij \int\!\!\int \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right) \delta x \left[\frac{dx}{dp} \cdot \frac{d\xi}{d\varpi} + \frac{dy}{dp} \cdot \frac{d\eta}{d\varpi} + \frac{dz}{dp} \cdot \frac{d\zeta}{d\varpi}\right] \cdot dp \cdot d\varpi$$
$$- A^2 \cdot ij \int\!\!\int \frac{1}{r} \cdot \frac{d\xi}{d\varpi} \cdot \frac{d\,\delta x}{dp} \cdot dp \cdot d\varpi.$$

Schaffen wir aus dem letzten Gliede den Factor $d\delta x / dp$ durch partielle Integration nach p fort, so erhalten wir ein Integral, welches in allen seinen Gliedern den Factor δx hat, und da δx eine willkürliche continuirliche Function von p ist, so kann Gleichung (1a), die in diesem Falle:

$$\delta P_0 + \delta P_1 + \int X \delta x \cdot ds + \overline{X} \cdot \delta \overline{x} = 0$$

wird, bei der im Anfange dieses Paragraphen ausgesprochenen Annahme, dass der Werth von X, wie der der übrigen Kraftcomponenten unabhängig von δx, δy, δz sei, nur dann erfüllt sein, wenn die mit δx multiplicirte Grösse für jeden Punkt von s gleich Null ist. Für innere Punkte giebt dies:

287
$$\left.\begin{aligned} X \frac{ds}{dp} &= A^2 ij \int \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right) \left[\frac{dx}{dp} \cdot \frac{d\xi}{d\varpi} + \frac{dy}{dp} \cdot \frac{d\eta}{d\varpi} + \frac{dz}{dp} \cdot \frac{d\zeta}{d\varpi}\right] d\varpi \\ &\quad - A^2 ij \int \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{r}\right) \frac{d\xi}{d\varpi}\, d\varpi \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

und für die Endpunkte von s ergiebt sich mit Berücksichtigung von (1b):

$$\overline{X} = A^2 j \frac{de}{dt} \int \frac{1}{r} \cdot \frac{d\xi}{d\varpi}\, d\varpi + \frac{1-k}{2} A^2 \frac{de}{dt} \Sigma \left[\frac{ds}{dt} \cdot \frac{dr}{dx}\right]. \quad (2a)$$

Da bei der weiteren Berechnung dieser Werthe Verschiebungen nicht mehr zu berücksichtigen sind, können wir als unabhängige Variable unter dem Integrationszeichen wieder s und σ anwenden, und erhalten:

$$X = A^2 \cdot ij \cdot \frac{dy}{ds} \int \frac{1}{r^3} \left[(y-\eta) \frac{d\xi}{d\sigma} - (x-\xi) \frac{d\eta}{d\sigma} \right] d\sigma$$
$$+ A^2 \cdot ij \cdot \frac{dz}{ds} \int \frac{1}{r^3} \left[(z-\zeta) \frac{d\xi}{d\sigma} - (x-\xi) \frac{d\zeta}{d\sigma} \right] d\sigma$$

und entsprechend:

$$Y = A^2 \cdot ij \cdot \frac{dx}{ds} \int \frac{1}{r^3} \left[(x-\xi) \frac{d\eta}{d\sigma} - (y-\eta) \frac{d\xi}{d\sigma} \right] d\sigma \qquad (2\text{b})$$
$$+ A^2 \cdot ij \cdot \frac{dz}{ds} \int \frac{1}{r^3} \left[(z-\zeta) \frac{d\eta}{d\sigma} - (y-\eta) \frac{d\zeta}{d\sigma} \right] d\sigma,$$
$$Z = A^2 \cdot ij \cdot \frac{dx}{ds} \int \frac{1}{r^3} \left[(x-\xi) \frac{d\zeta}{d\sigma} - (z-\zeta) \frac{d\xi}{d\sigma} \right] d\sigma$$
$$+ A^2 \cdot ij \cdot \frac{dy}{ds} \int \frac{1}{r^3} \left[(y-\eta) \frac{d\zeta}{d\sigma} - (z-\zeta) \frac{d\eta}{d\sigma} \right] d\sigma.$$

Daraus ergiebt sich leicht:

$$X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} = 0,$$

das heisst: Nach dem Potentialgesetz ist die Resultante der elektrodynamischen Bewegungskräfte, welche ein linearer Stromleiter auf ein Stromelement im Innern einer linearen Leitung ausübt, jedesmal senkrecht auf die Richtung der Strömung. Dies ist in Uebereinstimmung mit Hrn. Grassmanns[1]) Elementargesetz, stimmt aber mit Ampère's Gesetz nur, wenn σ ein geschlossener Leiter ist. Von dem Grassmann'schen Gesetze unterscheidet sich das Potentialgesetz dadurch, dass jenes die in Gleichung (2a) gegebenen, auf die Endpunkte der Leitung und die dort frei werdende Elektricität de/dt wirkenden Kräfte nicht kennt. Wenn man die in den Gleichungen 288
(2b) vor Ausführung der Integration mit $d\sigma$ multiplicirten Werthe mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ bezeichnet, so dass:

$$X = \int \mathfrak{x}\, d\sigma,$$
$$Y = \int \mathfrak{y}\, d\sigma,$$
$$Z = \int \mathfrak{z}\, d\sigma,$$

1) Poggendorff's Annalen LXIV. 1845.

so sind diese Grössen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ die Componenten der Wirkung, welche das Stromelement $d\sigma$ auf die inneren Punkte von ds ausübt. In der That reducirt sich der Werth von X, Y, Z auf $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, wenn man den Stromleiter σ auf das Element $d\sigma$ reducirt. Bezeichnen wir nun mit α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche die Coordinatenaxen mit derjenigen Richtung machen, die zugleich senkrecht gegen r und gegen $D\sigma$ ist, so ist leicht einzusehen, dass:

$$\alpha \cdot \mathfrak{x} + \beta \cdot \mathfrak{y} + \gamma \cdot \mathfrak{z} = 0,$$

das heisst, dass die Richtung der vom Elemente $D\sigma$ auf die inneren Punkte von Ds ausgeübten Kraft auch senkrecht zu der Richtung ist, deren Projectionen α, β, γ sind, oder dass die Richtung der Kraft in der durch r und $D\sigma$ gelegten Ebene liegt, wie es dem von Hrn. Grassmann aufgestellten Gesetze entspricht.

Für ein einzelnes lineares Element Ds bleiben also stehen, ebenso wie für ein längeres Stück von s, erstens die Kräfte, welche auf sämmtliche Punkte der Länge von Ds senkrecht zu Ds wirken, und zweitens zwei Kräfte (2a), welche auf die Endpunkte von Ds wirken. Ist das Linienelement Ds als ein fester Körper anzusehen, so lassen sich diese Kräfte im allgemeinen auf zwei einzelne Kräfte als Resultanten reduciren[1]) oder, wenn man lieber will, auf eine Kraft und ein Kräftepaar, wie ich dies in meiner zweiten Abhandlung (Bd. 75 dieses Journals) schon angegeben habe.

Einen linearen Leiter kann man in jedem Punkte sich getheilt denken, also jeden Punkt desselben als die zusam-
289 menfallenden Endpunkte zweier Leiterstücke betrachten. Dann

1) Es würde unstatthaft sein, zuerst, wie es Hr. Bertrand in Comptes Rendus T. LXXVII, p. 1052—1053 verlangt, für jedes Element diese Reduction der Kräfte auf eine Kraft und ein Kräftepaar ausführen zu wollen, um dann die aus dieser Reduction sich ergebenden Resultanten zur weiteren Berechnung der Wirkungen auf die einzelnen Punkte eines vollkommen beweglichen Leiters zu benutzen. Denn jene Reduction ist nur zulässig für Stücke Ds, welche als absolut feste Körper zu betrachten sind, während die Anwendung, auf die es hier ankommt, an die Voraussetzung gebunden ist, dass die Theile des Leiters im Gegentheil nachgiebig seien.

würde diesem Paar von Endpunkten von der einen Seite her eben so viel frei werdende positive Elektricität zuströmen, als von der andern Seite negative. Die Summe der frei werdenden Elektricität würde also doch wieder gleich Null sein. Dem entsprechend würde Gleichung (2a) anzeigen, dass zwei gleich grosse und entgegengesetzt gerichtete Kräfte auf den betreffenden Punkt wirkten, die eine, insofern er oberes Ende des einen Leiterstückes ist, und in ihm positive Elektricität frei wird, die andere, insofern er unteres Ende des andern Leiterstückes ist, und in ihm negative Elektricität frei wird. Da beide Kräfte genau denselben Punkt mit genau gleicher Grösse und genau entgegengesetzter Richtung angreifen, so werden sie sich gegenseitig vollkommen aufheben, so lange nicht der Zusammenhang des Leiters an dieser Stelle zerrissen wird; die Summe ihrer virtuellen Momente oder ihrer Arbeit für irgend eine denkbare oder wirkliche Verschiebung des Leiters ohne Aufhebung der Continuität der Strömungslinie wird immer gleich Null sein.[1]) Dagegen ist dies nicht mehr der Fall, sowie der Leiter an dieser Stelle zerreisst, und seine Verschiebungen discontinuirliche Functionen der Coordinaten werden. Es werden also die Kräfte der Gleichung (2a), welche auf die Stromenden wirken, in der That auch im Innern des Leiters bei geeigneter Richtung des Stromes j ein Zerreissen des Leiters s und eine Aufhebung seines Zusammenhanges befördern können. Zugleich zeigt aber auch die Gleichung (2a), dass bei endlichen Stromstärken und endlicher Länge der Stromleiter die beiden Kräfte, welche in jedem einzelnen Querschnitt des Leiters den Molecularkräften, welche den Zusammenhang zu bewahren streben, entgegenwirken, von endlicher Grösse sind.[2])

Die bis hierher ausgeführte Zerlegung der ponderomoto-

1) Hr. Bertrand (l. c. p. 1053) behauptet, diese Endkräfte, welche nicht die Richtung der Tangente des Leiters s hätten, müssten den Leiter verschieben. Er hat dabei nicht beachtet, dass jeder innere Punkt des Leiters von zwei gleich grossen und entgegengesetzten Kräften dieser Art angegriffen wird, die sich genau aufheben, so lange der Leiter nicht zerreisst.

2) Einen hierauf bezüglichen Einwand von Hrn. Bertrand will ich am Ende des Paragraphen besprechen.

rischen Kräfte in diejenigen Kräfte, welche auf die einzelnen Punkte des Innern und der Oberfläche des bewegten Leiters wirken, hat ihre bestimmte physikalische Bedeutung, da im Falle der Bewegung die Beschleunigung jedes einzelnen Leiterpunktes nur von den auf ihn selbst wirkenden Kräften mechanischen und elektrodynamischen Ursprungs abhängt. Die weitere
290 Zerlegung der elektrodynamischen Kraft, welche der Leiter σ auf einen jeden der Punkte von s ausübt, in Theile, welche den einzelnen Theilen von σ entsprechen, hat etwas Willkürliches, da die Art, wie wir σ theilen, willkürlich ist. Bisher haben wir es in Längenelemente getheilt. Indessen können wir auch bis auf Kräfte, die von den Punkten von σ ausgehen, zurückgehen, da ja andererseits bei der Bewegung von σ die Beschleunigungen seiner einzelnen Punkte auf Kräfte zurückführen, welche vom ganzen Leiter s auf die einzelnen Punkte von σ ausgeübt werden.

Eine solche Zerlegung ist nun in unserem Falle namentlich vortheilhaft, um den Unterschied der von dem Potentialgesetze angezeigten Wirkungen von denen des Ampère'schen Gesetzes möglichst einfach heraustreten zu lassen. Ausserdem ist zu bemerken, dass die von dem Grassmann'schen Gesetze angezeigten Elementarkräfte zwischen Stromelement und Stromelement dem Gesetz der Gleichheit der Action und Reaction nicht genügen, obgleich dieses Gesetz bei der Zusammenfassung der gleichzeitig auf Stromelemente und Stromenden stattfindenden Wirkungen gewahrt bleibt. Die Zerlegung in Punktkräfte führt dagegen auf Elementarwirkungen, die dem Gesetze von der Action und Reaction genügen.

Um elementare Kräfte der letzteren Art zu erhalten, muss man eine nochmalige partielle Integration des letzten Gliedes der Gleichung (2) ausführen, was bei gleichzeitiger Einführung von s und σ an Stelle der Variablen p und ϖ das Resultat giebt:

$$X = \Sigma\left[A^2 i \cdot \frac{ds}{dt} \cdot (x-\xi)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

$$- A^2 \cdot ij \int \left[(x-\xi)\frac{d^2}{ds \cdot d\sigma}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{x-\xi}{r^3} \cdot \cos(ds, d\sigma)\right] d\sigma,$$

$$Y = \Sigma\left[A^2 i \cdot \frac{ds}{dt} \cdot (y-\eta)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

$$- A^2 \cdot ij \int \left[(y-\eta)\frac{d^2}{ds \cdot d\sigma}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{y-\eta}{r^3} \cdot \cos(ds, d\sigma)\right] d\sigma,$$

$$Z = \Sigma\left[A^2 i \cdot \frac{ds}{dt} \cdot (z-\zeta)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

$$- A^2 \cdot ij \int \left[(z-\zeta)\frac{d^2}{ds \cdot d\sigma}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{z-\zeta}{r^3} \cdot \cos(ds, d\sigma)\right] d\sigma.$$

Es sind dies die Componenten einer Summe von Abstossungskräften, welche theils von den Enden, theils von den linearen Stromelementen der Leitung σ auf das Stromelement ds ausgeübt werden. Die Werthe sind folgende:

1) Abstossende Kraft eines Endes von σ auf ein Stromelement ds: 291

$$+ A^2 i \cdot \frac{ds}{dt} \cdot r \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}\right) = - A^2 i \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{ds}.$$

2) Abstossende Kraft der Stromelemente von σ auf die von s:

$$- A^2 \cdot ij \cdot \left[r \cdot \frac{d^2}{ds \cdot d\sigma}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r^2} \cdot \cos(ds, d\sigma)\right].$$

Da nun:

$$\frac{d^2}{ds \cdot d\sigma}\left(\frac{1}{r}\right) = - \frac{d}{d\sigma}\left[\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{ds}\right] = - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 r}{ds \cdot d\sigma} + \frac{2}{r^3} \cdot \frac{dr}{ds} \cdot \frac{dr}{d\sigma},$$

und ferner:

$$\frac{dr}{ds} = \cos(r, ds),$$

$$\frac{dr}{d\sigma} = - \cos(r, d\sigma),$$

$$\frac{d^2 r}{ds \cdot d\sigma} = \frac{1}{r}\left[\cos(r, ds) \cdot \cos(r, d\sigma) - \cos(ds, d\sigma)\right],$$

so wird der Werth der Abstossungskraft:

$$- \frac{A^2 \cdot ij}{r^2} \cdot \left[2\cos(ds, d\sigma) - 3\cos(r, ds) \cdot \cos(r, d\sigma)\right],$$

was die bekannte Form von Ampère ist.

Die auf die Enden von s wirkenden Kräfte bringen wir auf die entsprechende Form, indem wir in (2a) das $d\xi/d\sigma$ durch partielle Integration fortschaffen:

$$\overline{X} = -\frac{1+k}{2}A^2\frac{de}{dt}\cdot\Sigma\left[\frac{ds}{dt}\cdot\frac{x-\xi}{r}\right] + A^2\frac{de}{dt}\cdot j\cdot\int(x-\xi)\cdot\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma,$$

und ebenso:

$$\overline{Y} = -\frac{1+k}{2}A^2\frac{de}{dt}\cdot\Sigma\left[\frac{ds}{dt}\cdot\frac{y-\eta}{r}\right] + A^2\frac{de}{dt}\cdot j\cdot\int(y-\eta)\cdot\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma,$$

$$\overline{Z} = -\frac{1+k}{2}A^2\frac{de}{dt}\cdot\Sigma\left[\frac{ds}{dt}\cdot\frac{z-\zeta}{r}\right] + A^2\frac{de}{dt}\cdot j\cdot\int(z-\zeta)\cdot\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma.$$

Dies sind die Componenten von Abstossungskräften, welche theils von den Enden der Leitung σ, theils von deren inneren Elementen auf die Enden der Leitung s ausgeübt werden. Und zwar ist die Grösse der Abstossung

3) zwischen den Enden der Leitungen:

$$-\frac{1+k}{2}\cdot\frac{de}{dt}\cdot\frac{ds}{dt}A^2$$

unabhängig von der Entfernung;

292 4) zwischen den inneren Elementen von σ und den Enden von s:

$$A^2\frac{de}{dt}\cdot j\cdot r\cdot\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma = -A^2\frac{de}{dt}\;i\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\sigma}d\sigma,$$

welcher Ausdruck dem vorher für die Abstossung zwischen den Enden von σ und den inneren Elementen von s gefundenen genau entspricht.

Die Ergebnisse der bisher angestellten Untersuchung sind also folgende:

Für die Kräfte, welche die inneren Längenelemente zweier linearen, unverzweigten, in beliebigem Grade biegsamen und dehnsamen Leiter aufeinander ausüben, ergiebt das Potentialgesetz genau dieselben Werthe wie das Gesetz von Ampère. Der Werth der Constanten k in der von mir gewählten allgemeineren Form des Potentialgesetzes hat darauf keinen Einfluss.

Unterschieden ist das Potentialgesetz von dem von Ampère nur durch die Kräfte, welche auf die Enden der Leitungen nicht geschlossener Ströme wirken, an denen sich Elektricität ansammelt. Dergleichen Kräfte kennt Ampère's Gesetz nicht. Das Potentialgesetz dagegen ergiebt, wenn man alle Kräfte in anziehende und abstossende zerlegt, eine in Richtung der Verbindungslinie wirkende Kraft sowohl zwischen Stromelementen und Stromenden, wie zwischen je zwei Stromenden. Die Kraft zwischen Stromelementen und Stromenden (1 und 3 oben) ist eine anziehende, wenn die an dem Stromende sich sammelnde Art der Elektricität gleichnamig ist mit derjenigen, welche in dem Stromelemente sich von dem Stromende entfernt. Die Grösse dieser Kraft ist proportional der Geschwindigkeit der Ansammlung der betreffenden Elektricität an dem Stromende, ferner proportional der Geschwindigkeit, mit der die Entfernung zwischen beiden wächst, endlich umgekehrt proportional der ersten Potenz der Entfernung, übrigens unabhängig von der Constante k. Sie ist also ein nothwendiges Ergebniss jeder Form des Potentialgesetzes. Im Gegensatz zu Hrn. W. Weber's Hypothese ist es hier nicht die schon angesammelte freie, sondern die eben aus Bewegung in Ruhe übergehende sich ansammelnde Elektricität, welche die Wirkung ausübt, und die Wirkung selbst nicht dem Quadrate, sondern der ersten Potenz von dr/dt proportional.

Es strebt also hiernach bewegte Elektricität die eben frei werdende Elektricität derselben Art in dieselbe Bewegung nachzuziehen, in welcher erstere relativ zu letzterer begriffen ist.

Die Kraft zwischen Stromenden endlich ist eine anziehende, wenn sich Elektricität gleicher Art an
beiden Stromenden sammelt. Dass in der Unabhängig- 293
keit dieser Kraft von der Entfernung keine physikalische Schwierigkeit liegt, ist schon in der Einleitung erörtert worden.

In den Comptes Rendus vom 14. October 1872 hat Hr. Bertrand der Académie des Sciences eine Betrachtung mitgetheilt, durch welche er beweisen zu können glaubt, dass die durch das Potentialgesetz gegebenen Kräfte, die, wenn man sich die einzelnen Längenelemente des Leiters als feste Stäbe denkt, für jedes derselben auf eine Einzelkraft und ein Kräftepaar zurückgeführt werden könnten, nothwendig den festesten Leiter zertrümmern müssten, wenn sie existirten. Ich habe in der vorläufigen Zusammenfassung der hier vorgetragenen Resultate, die ich der Berliner Akademie (Februar 1873) gab, diesen Einwurf erwähnt und kurz bezeichnet, was mir die wahrscheinlichste Quelle des Irrthums in Hrn. Bertrand's Raisonnement zu sein schien. Meine dort gegebene Interpretation seiner Meinung hat mein Gegner aber in dem Compte Rendu vom 10. November 1873 als unrichtig bezeichnet, und eine Auseinandersetzung wiederholt, welche ich vorher nur für eine nicht sehr glücklich gewählte und leicht misszuverstehende Form der Darstellung gehalten und deshalb übergangen hatte. Bei der hervorragenden Stellung, welche Hr. Bertrand unter den französischen Mathematikern einnimmt, muss ich hier auf die Sache zurückkommen. Um meinem Gegner nichts unterzuschieben, was er nicht selbst gesagt hat, citire ich aus C. R. LXXV S. 863 die Stelle, wo derselbe die Sache in möglichst drastischer Anschaulichkeit beschreibt:

„Lassen Sie uns einen geradlinigen horizontalen Draht annehmen, der ein Meter lang und in 100 Milliarden gleicher Theile getheilt ist, welche die Stelle der unendlich kleinen Elemente in der Formel (nämlich des Potentialgesetzes) vertreten; nehmen wir weiter an, jedes derselben werde durch ein Kräftepaar von zwei verticalen Kräften angegriffen, deren jede dem Gewicht von 1 mgr gleich ist. Es kommt hier nicht darauf an, dass solche Kräfte, wenn sie auf einen als absolut fest betrachteten Stab einwirken, sich nach den Regeln der Statik in ein Kräftepaar von sehr kleinem Moment zusammensetzen würden, welches, ohne Zweifel, unfähig sein würde, einen Spinnenfaden zu zerreissen; muss der Kupferdraht, welcher nach oben gezogen wird durch 100 Milliarden Milligramm, das heisst durch 100,000 kg, und nach unten durch

eine gleiche Kraft, nicht augenblicklich zerrissen werden? Und man bemerke wohl, es handelt sich nicht nur um sehr kleine, sondern um unendlich kleine Elemente; man muss also die Existenz nicht nur von 100 Milliarden solcher Kräfte voraussetzen, sondern von einer unendlichen Zahl, und wie klein auch der Werth jeder einzelnen derselben wäre, der Faden müsste einen unendlich grossen Widerstand entwickeln können, um fest zu bleiben.“

Im C. R. t. LXXVII S. 1050–1051, wo mich Hr. Bertrand darüber tadelt, dass ich so entscheidender Auseinandersetzungen gar nicht Erwähnung gethan hätte, fasst er dies Beispiel noch einmal zusammen: „Betrachten wir einen geradlinigen Stab, der an seinen Enden von gleichen und entgegengesetzten Kräften von unendlicher Intensität gezogen wird“ u. s. w. Hier sind die Kräfte, die ein Jahr früher wenigstens noch über den ganzen Stab vertheilt waren, nun ganz an die Enden verlegt.

Wenn Hr. Bertrand Recht hat, so werden wir uns hüten 294
müssen, einen stählernen Magnetstab je von Osten nach Westen zu richten, denn dann müsste derselbe in Staub zerfallen. An einem solchen können wir uns durch den Versuch überzeugen, dass jedes durch zwei zur magnetischen Axe senkrechte Querschnitte aus dem Stabe herausgetrennte Stück, so klein und kurz es auch sein mag, noch immer seine zwei Pole hat, und wenn die Magnetisirung des Stabes in seiner ganzen Länge gleichmässig gewesen ist, so ist die Anziehungskraft des Erdmagnetismus auf jeden Pol jedes kleinsten Stückes gleich gross. Jedes von ihnen wird also vor der Trennung, wie nach der Trennung, vom Erdmagnetismus gerichtet durch ein Kräftepaar, dessen zwei Kräfte endliche Grösse behalten, so klein auch die der magnetischen Axe parallele Länge des betreffenden Stückes sein mag. Nehmen wir an, diese Kraft sei gleich der Schwere von einem Milligramm. Theilen wir die Länge des Magnetstabes in 100 Milliarden Theile u. s. w., so ergiebt sich bei ostwestlicher Richtung des Stabes, dass 100,000 kgr den Magneten nach Norden reissen, andere 100,000 kg nach Süden. Müssen wir nun wirklich mit Hrn. Bertrand schliessen, dass der Magnet unter

solchen Umständen zerrissen wird? Die Natur entscheidet gegen die Meinung des berühmten Akademikers, und Alle, die sich bisher mit mathemathischer Mechanik beschäftigt haben, nicht blos ich allein, haben in diesem, wie allen ähnlichen Fällen geglaubt, die mechanische Theorie sei hier vollständig im Einklang mit dem, was in Wirklichkeit geschieht.

Man denke sich zwei Längenelemente eines Stabes ab und bc in Richtung der x. Es sei ab afficirt von den beiden, ein Paar bildenden, Kräften $-Y$ in a und $+Y$ in b. Ein gleiches Paar wirke auf bc, nämlich eine Kraft $-Y$ in b und $+Y$ in c. Die Summe der virtuellen Momente der beiden Kräfte $+Y$ und $-Y$, welche die beiden Seiten eines und desselben Querschnittes b des Stabes angreifen, bleibt Null bei allen Bewegungen aller Theile des Stabes, ausser bei solchen, welche den Stab im Querschnitt b zerreissen. Also auf Trennung der beiden Seiten eines Querschnittes wirken immer nur die beiden endlichen Kräfte hin, die ihn direct angreifen. Die Cohäsion des Leiters braucht folglich in jedem Querschnitte nur zwei endlichen Kräften zu widerstehen. Bei allen anderen Bewegungen werden die beiden Kräfte, welche jeden einzelnen Querschnitt angreifen, sich aufheben, und so bleibt schliesslich nichts von allen diesen Kräften übrig als die erste am Anfang des ersten und die letzte am Ende des letzten Längenelementes dx, also zwei endliche Kräfte, welche ein endliches Moment hervorbringen.

Ich muss gestehen, Hrn. Bertrand's Rechnung scheint mir allen wohlbewährten Principien der Mechanik und der Differentialrechnung zu widersprechen; ich ziehe deshalb vor zu glauben, dass ich seine wahre Meinung nicht gefunden und nicht verstanden habe. Wenn er seine Ansicht darüber auseinandersetzen will, warum ein von Osten nach Westen gerichteter Magnetstab nicht zertrümmert wird, trotzdem er sich, so weit ich sehe, genau unter derselben Art von Kraftwirkung befindet, wie ein von einem elektrischen Strome durchflossener Draht nach den von mir aus dem Potentialgesetze gezogenen Folgerungen, so werde ich vielleicht verstehen können, welchen Sinn die von ihm angestellte Betrachtung haben soll.

§ 16. Die elektrodynamischen Kräfte in körperlichen Leitern. 295

Der von Hrn. F. E. Neumann aufgestellte Werth des elektrodynamischen Potentiales soll die durch die elektrodynamischen Kräfte bei Bewegungen der ponderablen Leiter zu leistende ponderomotorische Arbeit geben unter der Voraussetzung, dass die Intensität der Strömungen in jedem linearen Leiter während der Bewegung ungeändert bleibt. Die Aenderungen des Potentials, welche von Aenderungen in der Intensität der Strömungen abhängen, seien diese nun durch Aenderungen des Widerstandes oder der elektromotorischen Kräfte hervorgebracht, haben keinen Einfluss auf den ponderomotorischen Theil der geleisteten Arbeit.

Die ponderomotorischen Kräfte hängen eben nur ab von den Stromstärken, wie sie zur Zeit der Wirkung bestehen, nicht von deren Veränderungen. Die Auseinandersetzungen des vorigen Paragraphen für unverzweigte Leiter lassen sich ohne Schwierigkeit auf zwei beliebig verzweigte Systeme linearer Leiter übertragen. An jedem Verzweigungspunkte ist:

$$\frac{de}{dt} = \Sigma[\pm i] = 0,$$

wenn man mit i die Intensitäten der Strömung in den einzelnen von dort ausgehenden Zweigen bezeichnet und das $-$ Zeichen für die Strömungen benutzt, deren positive Richtung von dem genannten Punkte ausgeht, das $+$ Zeichen für die, deren positive Richtung auf den Punkt hingeht. Wenn aber $de/dt = 0$ ist, so ist auch die Summe der elektrodynamischen Wirkungen gleich Null, welche von dem besprochenen Verzweigungspunkte als Endpunkte mehrerer Strömungen ausgehen, oder auf ihn einwirken. Wenn durch die Bewegung einzelne Fäden des Netzes gedehnt, andere verkürzt werden, und die Stromvertheilung wegen veränderten Widerstandes solcher Zweige sich ändert, so wird dies ebenso wenig, wie bei einfachen unverzweigten Leitungen auf die ponderomotorischen Kräfte Einfluss haben.

Von dem Falle eines verzweigten Leiters kann man durch immer steigende Anzahl der Verzweigungspunkte übergehen zu

einem im Raume ausgedehnten Leiter von drei Dimensionen. Wenn man sich einen solchen in Fäden abgetheilt denkt, welche überall den Stromlinien parallel gerichtet sind, sodass von keinem dieser Fäden zu seinen Nachbarn Elektricität bei der bestehenden Stromvertheilung überfliesst, so wird die elektrodynamische Wirkung dieselbe sein müssen, als wären dieselben
296 Stromfäden als lineare Leiter vorhanden und von einander durch nichtleitende Zwischenräume isolirt. Will man den Neumann'schen Begriff des elektrodynamischen Potentials auf körperlich ausgedehnte Leiter übertragen, so wird man bei der Variation des Potentials für die Berechnung der geleisteten mechanischen Arbeit die Stromstärke in jedem, aus denselben materiellen Theilen gebildeten Stromfaden als unveränderlich betrachten müssen.

Wir wollen die Stromcomponenten der elektrischen Strömung im Punkte x, y, z mit u, v, w bezeichnen, die Componenten der Geschwindigkeit des materiellen Leiters dagegen mit α, β, γ. Das Linienelement Ds wird die Richtung der elektrischen Strömung haben, wenn:

$$Dx : Dy : Dz : Ds = u : v : w : \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Wenn wir nun unter q den Querschnitt eines unendlich dünnen Stromfadens verstehen, dessen Axe ds ist, und von dem das unendlich kleine Stück ds als cylindrisch betrachtet werden kann, so ist $q\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ die Stromintensität in diesem Stromfaden, und $q\,ds$ sein Volumen, welches wir mit $D\omega$ bezeichnen wollen, also die Stromintensität:

$$i = \frac{D\omega}{Ds}\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = \frac{u}{Dx} D\omega = \frac{v}{Dy} D\omega = \frac{w}{Dz} D\omega.$$

Wenn also für das betreffende Stück des Stromfadens bei der Variation der Grössen x, y, z das i unverändert bleiben soll, so haben wir:

$$0 = \delta\left[\frac{u}{Dx} D\omega\right] = \delta\left[\frac{v}{Dy} D\omega\right] = \delta\left[\frac{w}{Dz} D\omega\right].$$

Die erste dieser Gleichungen giebt:

$$0 = \frac{D\omega}{Dx}\delta u + \frac{u}{Dx}\delta D\omega - \frac{u}{Dx^2} D\omega . \delta Dx$$

oder:

$$\delta u = u \frac{\delta Dx}{Dx} - u \frac{\delta D\omega}{D\omega}. \tag{3}$$

Das zweite Glied rechts in dieser Gleichung ist die relative Volumvergrösserung in der Umgebung des Punktes x, y, z, und diese ist nach bekannten Sätzen, wenn δx, δy, δz continuirliche Functionen der Coordinaten sind:

$$\frac{\delta D\omega}{D\omega} = \frac{d\delta x}{dx} + \frac{d\delta y}{dy} + \frac{d\delta z}{dz}.$$

Ferner ist:

$$\delta Dx = \frac{d\delta x}{dx} \cdot Dx + \frac{d\delta x}{dy} \cdot Dy + \frac{d\delta x}{dz} \cdot Dz,$$

also: 297

$$u \frac{\delta Dx}{Dx} = u \cdot \frac{d\delta x}{dx} + v \cdot \frac{d\delta x}{dy} + w \cdot \frac{d\delta x}{dz}, \tag{3a}$$

und die Gleichung für δu ergiebt:

$$\left.\begin{aligned} \delta u &= \left(v \cdot \frac{d\delta x}{dy} - u \cdot \frac{d\delta y}{dy}\right) + \left(w \cdot \frac{d\delta x}{dz} - u \cdot \frac{d\delta z}{dz}\right), \\ &\text{dem entsprechend:} \\ \delta v &= \left(u \cdot \frac{d\delta y}{dx} - v \cdot \frac{d\delta x}{dx}\right) + \left(w \cdot \frac{d\delta y}{dz} - v \cdot \frac{d\delta z}{dz}\right), \\ \delta w &= \left(u \cdot \frac{d\delta z}{dx} - w \cdot \frac{d\delta x}{dx}\right) + \left(v \cdot \frac{d\delta z}{dy} - w \cdot \frac{d\delta y}{dy}\right). \end{aligned}\right\} \tag{3b}$$

Der von den beiden Elementen Ds und Ds' abhängige Theil des Neumann'schen Potentiales P_0, wie es oben in (1c) gegeben ist, erhält dann den Werth:

$$DP_0 = -\frac{A^2 Ds \,.\, Ds'}{r} \cdot \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} . \sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2} \left[\frac{Dx}{Ds} \cdot \frac{Dx'}{Ds'} + \frac{Dy}{Ds} \cdot \frac{Dy'}{Ds'} + \frac{Dz}{Ds} \cdot \frac{Dz'}{Ds'}\right] \cdot q \cdot q'$$

oder da:

$$\frac{Dx}{Ds} = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}},$$

u. s. w.

$$DP_0 = -A^2 \frac{D\omega \,.\, D\omega'}{r} \left[uu' + vv' + ww'\right].$$

Wenn man hier nach den Volumenelementen $D\omega$ und $D\omega'$ integrirt, erhält man:

$$P_0 = -\tfrac{1}{2} A^2 \iint D\omega \,.\, D\omega' \cdot \frac{uu' + vv' + ww'}{r}.$$

Der Factor $\frac{1}{2}$ ist hier eingetreten, da bei der Ausdehnung der sechs Integrationen über sämmtliche Punkte des gesammten Leitersystems jede Combination zweier Elemente $D\omega$ und $D\omega'$ zweimal vorkommt. Wären $D\omega$ und $D\omega'$ Volumenelemente zweier getrennter Leiter S und S' und die Integration über x, y, z nur auf S, die nach x', y', z' nur über S' auszudehnen, so würde der Factor $\frac{1}{2}$ wegzulassen sein. Dass diejenigen Elemente des Integrals P_0, welche wegen $r = 0$ unendlich werden, das Integral nicht unendlich machen, so lange u, v, w daselbst endlich sind, ist aus der Theorie der Potentialfunctionen bekannt.

Beschränken wir uns zunächst darauf, den hier gegebenen Theil P_0 des Potentials zu variiren und die davon abhängigen Kräfte zu suchen, die wir mit X_0, Y_0, Z_0 bezeichnen wollen, so haben wir:

298 $$\delta P_0 + \int (X_0 \delta x + Y_0 \delta y + Z_0 \delta z)\, D\omega = 0. \tag{3d}$$

Wir setzen wieder die Theilchen des Körpers als frei verschieblich voraus, sodass δx, δy und δz von einander ganz unabhängige, aber continuirliche Functionen der Coordinaten sind. Beschränken wir uns zunächst auf Variation der x, sodass vorläufig $\delta y = \delta z = 0$ gesetzt wird, so erhalten wir:

$$\delta P_0 = -A^2 \iint \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right) \delta x (u u_1 + v v_1 + w w_1)\, D\omega \,.\, D\omega'$$
$$- A^2 \iint \frac{1}{r} [u_1 \delta(u D\omega) + v_1 \delta(v D\omega) + w_1 \delta(w D\omega)]\, D\omega'.$$

Setzt man nun, nach Gleichung (3) und (3a):

$$\delta(u \,.\, D\omega) = u D\omega \cdot \frac{\delta D x}{d x}$$
$$= D\omega \cdot \left[u \frac{d\,\delta x}{dx} + v \frac{d\,\delta x}{dy} + w \frac{d\,\delta x}{dz}\right]$$

und entsprechende Werthe für $\delta(v \,.\, D\omega)$ und $\delta(w \,.\, D\omega)$, so wird:

$$\delta P_0 = -A^2 \iint \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right) \delta x (u u_1 + v v_1 + w w_1) + \frac{u_1}{r}\left(u \frac{d\,\delta x}{dx}\right.\right.$$
$$\left.\left. + v \frac{d\,\delta x}{dy} + w \frac{d\,\delta x}{dz}\right)\right] D\omega \,.\, D\omega'.$$

Setzt man nun statt $D\omega$ seinen Werth:

$$D\omega = dx \,.\, dy \,.\, dz,$$

so kann man durch partielle Integration die Differentialquotienten von δx fortschaffen, vorausgesetzt, dass δx eine continuirliche Function der Coordinaten ist, oder dass keine Gleitstellen mit absoluter Discontinuität der Bewegung vorkommen. In dem resultirenden Ausdrucke ist die mit δx multiplicirte Grösse nach (3d) gleich $-X_0 D\omega$ zu setzen. Führen wir die Grössen ein:

$$U' = \int \frac{u'}{r} D\omega',$$

$$V' = \int \frac{v'}{r} D\omega',$$

$$W' = \int \frac{w'}{r} D\omega',$$

und berücksichtigen wir die Gleichung:

$$-\frac{de}{dt} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz},$$

worin e die Dichtigkeit der freien Elektricität ist, so erhalten wir:

$$X_0 = A^2 \left[v \left(\frac{dV'}{dx} - \frac{dU'}{dy} \right) + w \left(\frac{dW'}{dx} - \frac{dU'}{dz} \right) + U' \frac{de}{dt} \right], \quad (3e)$$

und für die auf die Flächeneinheit der Oberfläche des Leiters 299
wirkende Kraft, wenn ε die Menge freier Elektricität an dieser Flächeneinheit ist:

$$\overline{X}_0 = U' \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (3f)$$

Dazu kommt nun noch die von dem Theile P_1 des Potentials herrührende Kraft. Ehe man hier variirt, kann man seine Integration vornehmen, wie in (1b), und man erhält, wie dort:

$$P_1 = -\frac{1-k}{4} A^2 \iint \frac{de}{dt} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \, r D\omega \,.\, D\omega'.$$

Die Integrationen sind beide über die sämmtlichen vorhandenen Volumenelemente auszudehnen, und da sich dabei die Combination jeder zwei Elemente zweimal wiederholt, so ist vorn

der Factor $\frac{1}{2}$ hinzugefügt. Dabei ist aber zu bemerken, dass unter diesem de/dt und $d\varepsilon/dt$ auch die Werthe der frei werdenden elektrischen Massen an den vorhandenen Grenzflächen der Leiter mitzubefassen sind.

Da das P_1 eine ähnliche Form, wie die Potentiale anziehender Massen de/dt und $d\varepsilon/dt$ hat, so ergiebt sich in bekannter Weise daraus die Kraft:

$$X_1 = \frac{1-k}{2} A^2 \frac{de}{dt} \int \frac{d\varepsilon}{dt} \frac{x-\xi}{r} D\omega'. \tag{3g}$$

Oder wenn man die in Gleichung (2c) meiner ersten Abhandlung gebrauchte Bezeichnung[1]) beibehält:

$$\Psi = \int r \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \cdot D\omega',$$

so ist:

$$X_1 = \left(\frac{1-k}{2}\right) A^2 \frac{de}{dt} \frac{d\Psi}{dx}. \tag{3h}$$

Führt man ferner die anderen ebenda gebrauchten Functionen ein, nämlich:

$$U = U' + \frac{1-k}{2} \cdot \frac{d\Psi}{dx},$$

$$V = V' + \frac{1-k}{2} \cdot \frac{d\Psi}{dy},$$

$$W = W' + \frac{1-k}{2} \cdot \frac{d\Psi}{dz},$$

300 so werden die Ausdrücke der elektrodynamischen Bewegungskräfte einfach folgende:

$$\left.\begin{aligned} X &= A^2 \left[v \left(\frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dy} \right) + w \left(\frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz} \right) + U \frac{de}{dt} \right], \\ Y &= A^2 \left[u \left(\frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx} \right) + w \left(\frac{dW}{dy} - \frac{dV}{dz} \right) + V \frac{de}{dt} \right], \\ Z &= A^2 \left[u \left(\frac{dU}{dz} - \frac{dW}{dx} \right) + v \left(\frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy} \right) + W \frac{de}{dt} \right]. \end{aligned}\right\} \tag{3i}$$

Dabei ist unter e alle an Flächen und in körperlichen Räumen angesammelte freie Elektricität zu verstehen, ebenso wie dies

---

1) In dieser Gleichung ist ein Druckfehler. Der Factor 4π im Nenner muss getilgt werden, da $\Delta\varphi = -4\pi\varepsilon$ ist. (Der Fehler ist oben S. 570 schon corrigirt.)

bei der Bildung der Function Ψ mit $d\varepsilon/dt$ geschehen ist. Dass die mit u, v, w multiplicirten Factoren den Componenten der magnetischen Kraft, welche durch die Ströme erzeugt wird, proportional sind, ist in Gleichung (19b) meiner ersten Abhandlung nachgewiesen.

Die in (3i) gegebenen Werthe der elektrodynamischen Kräfte haben die Grassmann'sche Form, nur dass in dieser letzteren die auf die freiwerdende Elektricität de/dt wirkenden Kräfte fehlen. Es bleibt noch übrig den von de/dt unabhängigen Theil auf die Ampère'sche Form zu bringen.

Zu dem Ende führe man in dem Ausdrucke:

$$\left.\begin{aligned} K &= u\frac{dU'}{dx} + v\frac{dU'}{dy} + w\frac{dU'}{dz} \\ &= -\iiint u' \frac{[u(x-\xi) + v(y-\eta) + w(z-\zeta)]}{r^3} \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \end{aligned}\right\} \quad (3\text{k})$$

eine partielle Integration nach ξ aus, welche ergiebt:

$$K = +\int u_1 (x-\xi) \frac{[u(x-\xi) + v(y-\eta) + w(z-\zeta)]}{r^5} \cos a \,.\, d\omega$$

$$+\iiint (x-\xi)\left[\frac{u_1 u}{r^3} - 3\frac{(x-\xi)^2 u + (y-\eta)(x-\xi)v + (z-\zeta)(x-\xi)w}{r^5}\right] d\xi . d\eta . d\zeta$$

$$-\iiint (x-\xi)\frac{du_1}{d\xi}\frac{[u(x-\xi) + v(y-\eta) + w(z-\zeta)]}{r^3}\, d\xi \,.\, d\eta \,.\, d\zeta.$$

Mittels der Gleichung:

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{du'}{d\xi} + \frac{dv'}{d\eta} + \frac{dw'}{d\zeta}$$

lässt sich aus dem letzten Integral zuerst das $du'/d\xi$ und dann $dv'/d\eta$ und $dw'/d\zeta$ durch partielle Integration beseitigen. Das giebt:

$$K = \iiint \frac{d\varepsilon}{dt}(x-\xi)\frac{[u(x-\xi) + v(y-\eta) + w(z-\zeta)]}{r^3}\, d\xi \,.\, d\eta \,.\, d\zeta$$ 301

$$- u\frac{dU'}{dx} - v\frac{dV'}{dx} - w\frac{dW'}{dx} - 3\iiint \frac{(x-\xi)}{r^5}[(x-\xi)u + (y-\eta)v$$
$$+ (z-\zeta)w][(x-\xi)u' + (y-\eta)v' + (z-\zeta)w']\, d\xi \,.\, d\eta \,.\, d\zeta.$$

Wenn man nun zur ersten der Gleichungen (3i) hinzuaddirt die aus (3k) folgende Gleichung:

$$0 = A^2\left[-K + u\frac{dU'}{dx} + v\frac{dU'}{dy} + w\frac{dU'}{dz}\right],$$

so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} X = A^2 U \frac{de}{dt} - A^2 \iiint \frac{d\varepsilon}{dt} \frac{x-\xi}{r^3} [u(x-\xi) + v(y-\eta) \\ + w(z-\zeta)]\, d\xi . d\eta . d\zeta - A^2 \iiint \frac{x-\xi}{r^3} [2\cos(i,j) \\ - 3\cos(i,r)\cos(j,r)]\, d\xi . d\eta . d\zeta. \end{aligned}\right\} (31)$$

Das letzte Glied dieses Ausdruckes ist die Ampère'sche Kraft zwischen zwei Stromelementen. Das erste Glied rührt her von den Wirkungen auf die freiwerdende Elektricität in x, y, z. Das zweite giebt die Wirkung der anderwärts frei werdenden Elektricität auf die Strömung im Punkte x, y, z. Wird nirgends Elektricität frei, das heisst, sind alle Ströme, die auf einander wirken, geschlossene, so bleibt die Ampère'sche Kraft allein übrig.

Dadurch ist auch für Leiter von drei Dimensionen, bei denen die Bewegungen der einzelnen Volumenelemente in ganz beliebiger Weise geschehen können, vorausgesetzt nur, dass sie continuirlich für benachbarte Theilchen geschehen und die Stromfäden nicht zerreissen, erwiesen, dass für geschlossene Strömungen das Potentialgesetz genau dieselben elektrodynamischen Bewegungskräfte ergiebt, wie Ampère's Gesetz.

Der zweite Theil des Werthes von X in (31) ist die x-Componente einer anziehenden Kraft:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} d\xi . d\eta . d\zeta \left[u \frac{x-\xi}{r} + v \frac{y-\eta}{r} + w \frac{z-\zeta}{r} \right],$$

welche die freiwerdende Elektricität $d\varepsilon/dt$ im Volumenelemente $d\xi . d\eta . d\zeta$ auf die von ihr weg in Richtung von r fliessende elektrische Strömung im Punkte x, y, z ausübt.

Der erste Theil jenes Werthes von x endlich entspricht der auf die im Punkte x, y, z frei werdende Elektricität ausgeübten Kraft.

302 § 17. Die Anwendung des Potentialgesetzes auf Gleitstellen.

Die in § 15 angestellten Betrachtungen setzten voraus, dass entweder die Variationen δx, δy, δz continuirliche Functionen der Coordinaten sind, wobei dann die Continuität der Strom-

leitung erhalten bleibt, oder dass die Stromleitung abbricht, wo die Variationen discontinuirlich werden. Nun können aber auch Fälle vorkommen, in denen man die Bewegung der leitenden Metallstücke als discontinuirlich betrachten kann, und doch die Stromleitung erhalten bleibt. Ein solcher Fall wäre zunächst der, wo die zwei Metallstücke sich trennen, und der Strom zwischen ihnen einen leitenden Bogen von glühendem Metalldampf erzeugt. Hier besteht weiter keine analytische Schwierigkeit in der Anwendung unseres Gesetzes, da das materielle leitende Verbindungsglied sich durch Dehnung aus den vorher an der Berührungsstelle liegenden Metalltheilchen gebildet hat. Hier ist und bleibt das neue Leiterelement, welches die Lücke ausfüllt, für sich bestehend, so lange überhaupt Leitung besteht, und an diesen Fall kann sich also kein Zweifel anknüpfen.

Weniger augenfällig wird das Verhältniss, wenn der Draht, welcher sich von seiner bisherigen Berührungsstelle mit dem anderen Leiter trennt, sogleich wieder mit anderen Stellen des letzteren Leiters in Berührung kommt, sodass sich immer wieder neue Stromfäden anknüpfen, und deshalb der Funkenbogen zwischen beiden Leitern gar nicht oder nur in unterbrochener Weise zur Erscheinung kommt. Dieser Fall würde dem Bestehen einer Gleitstelle zwischen den beiden Leitern entsprechen.

Denkt man sich die Stromfäden construirt, welche durch die Gleitstelle hindurchgehen, und nehmen wir einen absoluten Sprung in den Werthen der Geschwindigkeiten diesseits und jenseits der Gleitfläche an, so würde aus einer solchen Annahme folgen, dass in der Gleitstelle jeder der zur Zeit bestehenden Stromfäden immer und immer wieder zerrissen wird. Die Berechnung der ponderomotorischen Kräfte aus dem Potentialgesetze kann aber nur unter der Voraussetzung geschehen, dass die Strömung in jedem aus denselben materiellen Theilen bestehenden Stromfaden ungeändert bleibt. Wie sich die materiellen Theile des Leiters dabei in dem Faden verschieben, hat keinen Einfluss auf die geleistete Arbeit, da nach der Länge des Leiters keine elektrodynamischen Bewegungskräfte wirken. Man würde also auch in diesem Falle bei der Berechnung der Variationen voraussetzen müssen, dass die ab-

reissenden Stromfäden noch durch ein leitendes Linienelement für einen Augenblick verbunden bleiben. Diese Vorstellung
303 kann unnatürlich oder willkürlich erscheinen, sie ist es aber nicht, wenn wir beachten, dass bei wirklich ausführbaren Versuchen eine absolute Discontinuität der Bewegung gar nicht eintritt, und wenn man von den wirklich vorkommenden Verhältnissen den Uebergang zur Grenze einer theoretisch-discontinuirlichen Bewegung der beiden Leiter macht.

Bei der Schwäche der elektrodynamischen Kräfte, welche auf einen einzelnen Leitungsdraht wirken, müssen wir den Draht sehr leicht beweglich machen und doch dafür sorgen, dass an der Gleitstelle sehr gute Leitung des Stromes stattfindet. Um beide Bedingungen gleichzeitig zu erfüllen, kennen wir bisher keine andere Methode, als die, an der Gleitstelle flüssige Leiter, entweder Quecksilber oder Elektrolyten, einzuschalten, deren Grenzschichten an den beiden metallischen Elektroden festhaften, und deren innere Schichten sich so bewegen, dass sie einen continuirlichen Uebergang von der Bewegung der einen zu der der anderen Elektrode herstellen. Hierbei ist von einer wirklichen Discontinuität der Bewegung also gar keine Rede, und auf dergleichen Versuche bleibt die bisher gegebene Beweisführung, dass für geschlossene Ströme das Ampère'sche und Neumann'sche Gesetz dieselben Resultate geben, vollkommen anwendbar.

Denkt man sich die flüssige Schicht immer dünner werdend, so kann man die besprochene continuirliche Bewegung einer discontinuirlichen bis zu jedem Grade der Annäherung ähnlicher machen, ohne dass die bisher angestellten Betrachtungen ihre Anwendbarkeit verlieren.

Solche Fälle treten ein, wenn wir zwei harte Metalle aufeinander schleifen lassen. Es ist bekannt, dass dies unter ziemlich starkem Druck geschehen muss, wenn eine gute Stromleitung erreicht werden soll; dabei verändern sich die oberflächlichen Schichten der Metalle sehr merklich und reiben sich ab, woraus wir schliessen müssen, dass ihre oberflächlichen Schichten der Bewegung des anderen Stückes zum Theile folgen. Bei leicht entzündlichen Metallen, wie Eisen, sprühen

dabei Funken auf, welche zeigen, dass der Uebergang der Elektricität zum Theil auch durch kurze Dampfbögen unterhalten wird. Für dergleichen Fälle hat man die elektrodynamischen Bewegungskräfte der Gleitstelle allerdings noch nicht direct beobachtet, doch hat Hr. F. E. Neumann durch den Versuch gezeigt, dass die inducirten elektromotorischen Kräfte auch in diesen Fällen seinem Potentialgesetze folgen, und daraus folgt nach dem Gesetze von der Erhaltung der Kraft, dass es auch die elektrodynamischen Kräfte thun müssen (s. unten § 20).

Die Annahme einer Gleitung mit discontinuirlicher Verschiebung ist also den bisher beobachteten Thatsachen gegen- 304
über nur eine Grenze, der die wirklichen Verhältnisse sehr nahe kommen können, und die deshalb analytisch als vereinfachende Darstellung derselben gebraucht werden mag, vorausgesetzt dass man in der Rechnung das richtige Annäherungsverfahren anwendet. Aehnliche Grenzbegriffe haben wir in der mathematischen Physik viele, wie den des absolut festen Körpers, der incompressiblen Flüssigkeit u. s. w., deren Eigenschaften sich aus den allgemeinen Principien der Mechanik (Newton's Axiomen) auch nur dann herleiten lassen, wenn man sie als die Grenze der elastischen Körper von grossem Elasticitätscoëfficienten ansieht. Thut man dies nicht, so muss man bei ihrer Behandlung noch besondere Hypothesen zu Hülfe nehmen, welche die besondere Art und Weise definiren, wie Kräfte, gegen feste Körper wirkend, zu zerlegen sind.

In unserem Falle ergeben sich also richtige Folgerungen aus dem Neumann'schen Gesetze, wenn man eine Gleitung mit discontinuirlicher Verschiebung als den Grenzfall continuirlicher Verschiebung ansieht, welche nur auf eine immer dünner werdende Schicht zusammengedrängt wird. Man kann nun entweder so verfahren, dass man aus dem Potentialausdrucke die Ampère'schen Kräfte herleitet, ehe man die Uebergangsschicht als unendlich dünn gesetzt hat; oder wenn man auf diese unmittelbar den Potentialausdruck anwenden will, das Potential von verschwindend kleinen Stromfadenelementen mitberechnet, welche die gleitenden Flächen verbinden.

Nehmen wir an, dass an der negativen Seite der yz-Fläche

die leitende Masse in Ruhe sei, dass zwischen $x = 0$ und $x = \lambda$ deren Geschwindigkeit in Richtung der y sei:

$$\mathfrak{v} = \frac{x\beta}{\lambda};$$

dagegen für $x > \lambda$:

$$\mathfrak{v} = \beta.$$

Die elektrische Strömung sei senkrecht zur Gleitfläche parallel x und von dem constanten Werthe u_0, so würden in den Schichten zwischen $x = 0$ und $x = \lambda$, wenn jeder materielle leitende Faden seine Stromintensität behielte, nach dem Zeittheilchen dt die Stromcomponenten sein:

$$u = u_0,$$
$$v = u_0 \frac{\beta}{\lambda} dt,$$
$$w = 0.$$

305 Betrachten wir die Dicke λ als verschwindend klein und vernachlässigen wir die Glieder, welche λ in höherer als der ersten Potenz enthalten, so wird der Werth des elektrodynamischen Potentials für das Flächenstück Q dieser verschiebbaren Schicht sein:

$$P = -\left(Uu_0 + Vu_0 \frac{\beta}{\lambda} dt\right) Q\lambda,$$

und wenn wir die gesammte Intensität des durch Q gehenden Stromes mit J bezeichnen:

$$J = Qu,$$

so ist:

$$\frac{dP}{dt} dt = -VJ\beta\, dt,$$

also unabhängig von der Dicke λ der verschiebbaren Schicht. Eine Kraft Y, welche an der Ebene $x = \lambda$ angebracht dieselbe Arbeit leisten würde, müsste sein:

$$Y\beta\, dt = -\frac{dP}{dt} \cdot dt,$$

woraus folgt:

$$Y = JV.$$

Es ist dies einfach der Werth der Kraft, welche auf die Endfläche der verschiebbaren Schicht wirken würde, wenn sie eine Endfläche des Stromes wäre. Auf diese Endkraft reducirt

sich die ganze elektrodynamische Wirkung, welche die übrigen vorhandenen Strömungen auf die verschiebbare Schicht ausüben, sobald diese verschwindend kleine Dicke hat.

Da aber die Fläche $x = \lambda$ in Wahrheit keine Endfläche des durchströmten Leiters ist, sondern an den gleitenden festen Leiter sich anschliesst, so begegnet die Endkraft der sich verschiebenden Schicht der entgegengesetzt gerichteten gleich grossen Endkraft an der Endfläche des festen Leiters, und beide heben sich gegenseitig auf.

Der ganze Einfluss einer solchen unendlich dünnen Uebergangsschicht, wie wir sie angenommen haben, besteht also darin, dass die beiden Endkräfte wegfallen, welche auf die Grenzfläche der beiden Leiter wirken würden, wenn statt der leitenden Uebergangsschicht eine isolirende Zwischenschicht bestände. Das heisst also, es wirken diesseits und jenseits der Gleitfläche nur die Ampère'schen (oder Grassmann'schen) Kräfte. Diejenigen Theile dieser Kräfte, welche auf die leitenden Elemente der Uebergangsschicht selbst wirken, sind verschwindend klein, 306
wenn die Dicke der Schicht verschwindend klein ist.

Will man also die elektrodynamische Arbeit direct aus dem Werthe des Potentials berechnen, und dabei die Existenz der Uebergangsschicht vernachlässigen, so muss man an Stelle dieser Schicht zwei Endkräfte an die Grenzflächen der gleitenden Leiter hinzugefügt denken, welche denjenigen gerade entgegengesetzt sind, die ebenda auf Endflächen der Strömung wirken würden. Denn die genannten Grenzflächen sind eben keine Endflächen der Strömung. Diese Art der Darstellung vereinfacht die Berechnung der Wirkung oft in hohem Grade. Nehmen wir z. B. das von Hrn. Riecke angeführte Beispiel, wo der bewegliche Theil des Leiters der Radius eines Kreises ist, der an der leitenden Peripherie des Kreises gleitet, und die Zuleitung des Stromes zum Centrum des Kreises, die Ableitung von der Peripherie symmetrisch zur Axe geschieht, während die elektrodynamische Wirkung von starken Kreisströmen ausgeht, die concentrisch mit dem Gleitkreise angebracht sind. In einem solchen Falle rotirt bekanntlich der Radius entgegengesetzt der positiven Elektricität in den Kreisströmen. Hr. Riecke hat Recht, dass in diesem Falle

das Potential, welches die Kreisströme auf den Radius ausüben, sich bei dessen Bewegung nicht ändert, weil er immerfort in symmetrischer Lage zu ihnen bleibt. Aber die Stromfäden in der Gleitstelle gehen fortdauernd aus der radialen in die tangentiale Richtung über, und deren Potential gegen die Kreisströme ist in erster Lage Null, in zweiter Lage hat es einen von Null verschiedenen Werth. Die Vorgänge in der Gleitstelle allein sind in diesem Falle das Treibende, und aus unserer Darstellung ergiebt sich, dass der Werth der drehenden Kraft einfach zu finden ist, indem man die Endkraft für die gleitende Spitze berechnet und diese negativ nimmt.

An ähnlichen Beispielen hat Hr. C. Neumann Anstoss genommen[1]) und leugnet deshalb die Anwendbarkeit des von seinem Vater aufgestellten Potentialgesetzes auf Stromelemente. Die absolute Discontinuität der Bewegung in der Gleitstelle, welche die Schwierigkeit (das Zerreissen der Stromfäden) herbeiführt, ist aber nur eine mathematische Fiction. Nimmt man sie streng, so giebt das Potentialgesetz, welches Fortdauer des Stromes in denselben materiellen Stromfäden voraussetzt, keine
307 falsche, sondern überhaupt gar keine Auskunft für die Stellen, wo die Fäden zerreissen. Den richtigen Werth findet man auf dem von uns eingeschlagenen Wege, welcher die den wirklichen Verhältnissen entsprechende Art der Annäherung an die Discontinuität analytisch ausdrückt.

§ 18. Die elektrodynamische Induction.

Hr. F. E. Neumann hat das von ihm aufgestellte Gesetz der Induction im Anfange der oben citirten Abhandlung auch nur für geschlossene lineare Ströme erwiesen. In der ersten meiner elektrodynamischen Abhandlungen (Bd. 72 dieses Journals) habe ich seine Anwendung ausgedehnt auf die durch Aenderung der Stromstärke hervorgerufene Induction in ruhenden Leitern von drei Dimensionen mit ungeschlossenen Strömungen. Dasselbe ist hier noch zu thun für die allgemeinsten Fälle der Induction, bei denen gleichzeitig Aenderungen der Stromintensität und der Lage der Leiter vorkommen.

---

1) Die elektrischen Kräfte. Leipzig 1873. S. 77—79.

Die elektromotorische Kraft, welche auf das Element Ds eines Stromfadens einwirkt, ist, wenn wir die bisher gewählten Maasseinheiten beibehalten und die Neumann'schen Sätze, welche zunächst nur für Leiter von endlicher Länge aufgestellt sind, auf deren einzelne Längenelemente übertragen, unabhängig von der Stromstärke in Ds selbst, und gleich der Geschwindigkeit der Aenderung des Potentials dP/dt, welches sämmtliche vorhandenen Ströme auf das von der Einheit der Stromstärke durchflossene materielle leitende Element Ds hervorbringen.

Für zwei lineare Stromelemente Ds und $D\sigma$ mit den Stromstärken i und j können wir setzen:

$$DP = i.j.A^2.\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{d\sigma}+\frac{1+k}{2}\cdot\frac{d^2r}{ds\cdot d\sigma}\right]Ds.D\sigma, \qquad (4)$$

oder wie in (1):

$$DP = -\tfrac{1}{2}A^2\cdot\frac{i\cdot j}{2}\cdot[(1+k)\cos(Ds, D\sigma)$$
$$+(1-k)\cos(r, Ds).\cos(r, D\sigma)].Ds.D\sigma.$$

Die inducirte Kraft $\mathfrak{R}$ für die Längeneinheit der Stromleiter s und σ wäre nach dem eben ausgesprochenen Principe durch folgende Beziehung gegeben:

$$\mathfrak{R}.Ds.D\sigma = \frac{A^2}{\delta t}\cdot\delta\left\{j\cdot\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{d\sigma}+\frac{1+k}{2}\cdot\frac{d^2r}{ds\cdot d\sigma}\right]\cdot Ds.D\sigma\right\} \qquad (4a)$$

oder:

$$\mathfrak{R}.Ds.D\sigma = -\frac{A^2}{2\delta t}\cdot\delta\left\{\frac{j}{r}\cdot[(1+k)\cos(Ds, D\sigma)\right.$$
$$\left.+(1-k)\cos(r, Ds).\cos(r, D\sigma)].Ds.D\sigma\right\}.$$

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}_1$ die entsprechende inducirte Kraft, die 308
im Stromleiter σ wirkt, so ist:

$$\mathfrak{R}_1.Ds.D\sigma = \frac{A^2}{\delta t}\cdot\delta\left\{i\cdot\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{d\sigma}+\frac{1+k}{2}\cdot\frac{d^2r}{ds\cdot d\sigma}\right]\cdot Ds.D\sigma\right\}$$

und die Arbeit $\delta\mathfrak{W}$, welche die ponderomotorischen Kräfte an den Längeneinheiten der Stromleiter verrichten,

$$\left.\begin{aligned}\delta\mathfrak{W}.Ds.D\sigma = -A^2.i.j\,\delta\left\{\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{d\sigma}\right.\right.\\ \left.\left.+\frac{1+k}{2}\cdot\frac{d^2r}{ds\cdot d\sigma}\right]\cdot Ds.D\sigma\right\}.\end{aligned}\right\} \qquad (4b)$$

Daraus folgt:

$$\delta(DP) = [(\mathfrak{R}.i + \mathfrak{R}_1.j)\,\delta t + \delta\mathfrak{W}].Ds.D\sigma. \tag{4c}$$

Diese letztere Gleichung ist, wie wir später sehen werden, der Ausdruck des Gesetzes von der Erhaltung der Kraft.

Wenn wir diese Ausdrücke auf Leiter von drei Dimensionen übertragen wollen, so müssen wir die Aenderung des Potentials P suchen für ein Stück Ds eines aus denselben materiellen Theilchen bestehenden und von der Stromstärke $J = 1$ durchströmten Stromfadens. Sind Dx, Dy, Dz die Projectionen von Ds auf die Coordinatenaxen, so ist der Theil von P, der sich auf Ds bezieht, mit Benutzung der schon früher gebrauchten Zeichen:

$$PDs = -JA^2[U.Dx + V.Dy + W.Dz]. \tag{5}$$

Dieser Ausdruck bleibt nach bekannten Sätzen endlich, auch wenn das Element Ds des Stromfadens innerhalb desselben Raumes liegt, der die Elemente für die Integrale U, V, W liefert. Ich werde im Folgenden diese Grössen als Functionen der Zeit und der Coordinaten x, y, z des im Raume festen Punktes betrachten, auf den sie sich beziehen. Die Variationen δU, δV, δW sollen also die Veränderungen bezeichnen, welche U, V, W in dem festen Raumpunkte x, y, z durch Aenderungen der Stromstärke und Bewegungen der übrigen Stromelemente erleiden. Dagegen wollen wir $\delta(U)$, $\delta(V)$, $\delta(W)$ gebrauchen, um die Aenderungen in dem bewegten materiellen Punkte zu bezeichnen, der zu Anfang der Zeit δt im Punkte x, y, z sich befindet. Es ist also:

$$\delta(U) = \delta U + \frac{dU}{dx}\cdot\delta x + \frac{dU}{dy}\cdot\delta y + \frac{dU}{dz}\cdot\delta z,$$

wenn δx, δy und δz die Verschiebungen bezeichnen, welche jener materielle Punkt im Zeittheilchen δt erlitten hat. Die Veränderung von Dx ist, wie sich leicht ergiebt,

309

$$\delta Dx = \frac{d\delta x}{dx}\cdot Dx + \frac{d\delta x}{dy}\cdot Dy + \frac{d\delta x}{dz}\cdot Dz.$$

Mit Berücksichtigung dieser Werthe ergiebt Gleichung (5), da $J = 1$,

$$\mathfrak{R}.Ds.\delta t = \delta(P.Ds) = (\mathfrak{X}.Dx + \mathfrak{Y}.Dy + \mathfrak{Z}.Dz)\,\delta t, \tag{5a}$$

worin gesetzt ist:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{X}.\delta t &= -A^2\left[\delta(U) + U\cdot\frac{d\,\delta x}{d\,x} + V\cdot\frac{d\delta y}{d\,x} + W\cdot\frac{d\,\delta z}{d\,x}\right],\\
\mathfrak{Y}.\delta t &= -A^2\left[\delta(V) + U\cdot\frac{d\,\delta x}{d\,y} + V\cdot\frac{d\,\delta y}{d\,y} + W\cdot\frac{d\,\delta z}{d\,y}\right],\\
\mathfrak{Z}.\delta t &= -A^2\left[\delta(W) + U\cdot\frac{d\,\delta x}{d\,z} + V\cdot\frac{d\,\delta y}{d\,z} + W\cdot\frac{d\,\delta z}{d\,z}\right].
\end{aligned}\right\}\quad(5\text{b})$$

Setzen wir statt der Verschiebungen δx, δy und δz die entsprechenden Componenten der Geschwindigkeit:

$$\delta x = \alpha.\delta t,\qquad \delta y = \beta.\delta t,\qquad \delta z = \gamma.\delta t,$$

so ergeben sich die Werthe der Grössen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, welche, wie Gleichung (5a) zeigt, die den Coordinatenaxen parallelen Componenten der inducirten elektromotorischen Kraft $\mathfrak{R}$ sind, wie folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{X} &= -A^2\left[\frac{\delta U}{\delta t} + \alpha\cdot\frac{d\,U}{d\,x} + \beta\cdot\frac{d\,U}{d\,y} + \gamma\cdot\frac{d\,U}{d\,z}\right.\\
&\qquad\left. + U\cdot\frac{d\alpha}{d\,x} + V\cdot\frac{d\beta}{d\,x} + W\cdot\frac{d\gamma}{d\,x}\right],\\
\mathfrak{Y} &= -A^2\left[\frac{\delta V}{\delta t} + \alpha\cdot\frac{d\,V}{d\,x} + \beta\cdot\frac{d\,V}{d\,y} + \gamma\cdot\frac{d\,V}{d\,z}\right.\\
&\qquad\left. + U\cdot\frac{d\alpha}{d\,y} + V\cdot\frac{d\beta}{d\,y} + W\cdot\frac{d\gamma}{d\,y}\right],\\
\mathfrak{Z} &= -A^2\left[\frac{\delta W}{\delta t} + \alpha\cdot\frac{d\,W}{d\,x} + \beta\cdot\frac{d\,W}{d\,y} + \gamma\cdot\frac{d\,W}{d\,z}\right.\\
&\qquad\left. + U\cdot\frac{d\alpha}{d\,z} + V\cdot\frac{d\beta}{d\,z} + W\cdot\frac{d\gamma}{d\,z}\right].
\end{aligned}\right\}\quad(5\text{c})$$

Diese Werthe lassen sich auch schreiben:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{X} &= -A^2\left[\frac{\delta U}{\delta t} + \beta\left(\frac{d\,U}{d\,y} - \frac{d\,V}{d\,x}\right) + \gamma\left(\frac{d\,U}{d\,z} - \frac{d\,W}{d\,x}\right)\right.\\
&\qquad\left. + \frac{d}{d\,x}(U\alpha + V\beta + W\gamma)\right],\\
\mathfrak{Y} &= -A^2\left[\frac{\delta V}{\delta t} + \alpha\left(\frac{d\,V}{d\,x} - \frac{d\,U}{d\,y}\right) + \gamma\left(\frac{d\,V}{d\,z} - \frac{d\,W}{d\,y}\right)\right.\\
&\qquad\left. + \frac{d}{d\,y}(U\alpha + V\beta + W\gamma)\right],\\
\mathfrak{Z} &= -A^2\left[\frac{\delta W}{\delta t} + \alpha\left(\frac{d\,W}{d\,x} - \frac{d\,U}{d\,z}\right) + \beta\left(\frac{d\,W}{d\,y} - \frac{d\,V}{d\,z}\right)\right.\\
&\qquad\left. + \frac{d}{d\,z}(U\alpha + V\beta + W\gamma)\right].
\end{aligned}\right\}\quad(5\text{d})$$

Die ersten Theile dieser Ausdrücke $\delta U/\delta t$, $\delta V/\delta t$ und $\delta W/\delta t$ geben die inducirten Kräfte, denen das Leiterelement ausgesetzt sein würde, auch wenn es nicht selbst bewegt würde.
310 Wenn wir die in Gleichung (19b) meiner Abhandlung im 72. Bande eingeführten Werthe der magnetischen Kraftcomponenten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ anwenden:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L} &= A\left[\frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy}\right], \\
\mathfrak{M} &= A\left[\frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz}\right], \\
\mathfrak{N} &= A\left[\frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx}\right],
\end{aligned} \tag{5e}$$

so erhalten die zweiten in (5d) mit α, β, γ multiplicirten Theile der obigen Kräfte, die wir mit $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$ bezeichnen wollen, die Werthe:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X}_1 &= -A\,[\beta\mathfrak{N} - \gamma\mathfrak{M}], \\
\mathfrak{Y}_1 &= -A\,[\gamma\mathfrak{L} - \alpha\mathfrak{N}], \\
\mathfrak{Z}_1 &= -A\,[\alpha\mathfrak{M} - \beta\mathfrak{L}],
\end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{X}_1 Dx + \mathfrak{Y}_1 Dy + \mathfrak{Z}_1 Dz = -A\,[\mathfrak{L}(\gamma Dy - \beta Dz) \\
+ \mathfrak{M}(\alpha Dz - \gamma Dx) + \mathfrak{N}(\beta Dx - \alpha Dy)].
\end{aligned}\right\} \tag{5f}$$

Das ist die durch Bewegung des Leiterelements Ds quer durch die Richtung der magnetischen Kraftlinien erzeugte inducirende Kraft.

Endlich der letzte Theil der Werthe von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, der die Differentialquotienten von $(U\alpha + V\beta + W\gamma)$ enthält, und den wir beziehlich mit $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{Y}_2$, $\mathfrak{Z}_2$ bezeichnen wollen, giebt für einen linearen Leiter, dessen Längenelemente Ds sind,

$$\int(\mathfrak{X}_2 Dx + \mathfrak{Y}_2 Dy + \mathfrak{Z}_2 Dz) = -\,\overline{(U\alpha + V\beta + W\gamma)}, \tag{5g}$$

wo der Ausdruck rechts die Differenz der den Grenzen der Integration angehörigen Werthe bezeichnet. Er wird gleich Null, wenn die Integration über eine geschlossene Curve ausgedehnt wird.

Ich will hier nur noch an die seit Ampère bekannten Beziehungen zwischen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ und U, V, W erinnern. Es sei $d\omega$ das Flächenelement einer einfach zusammenhängenden

Fläche, und es seien a, b, c die Winkel, welche die Normale dieses Elements mit den Coordinatenaxen macht, ds aber das Linienelement der Grenzcurve, so ergiebt sich mit Benutzung der in (5e) gegebenen Werthe, wenn $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ und U, V, W in der Fläche überall stetig und endlich sind,

$$\begin{aligned} & i\iint(\mathfrak{L}.\cos a + \mathfrak{M}.\cos b + \mathfrak{N}.\cos c)\,d\omega \\ = {} & i\iint(\mathfrak{L}.dy.dz + \mathfrak{M}.dx.dz + \mathfrak{N}.dx.dy) \\ = {} & i\int(U.dx + V.dy + W.dz) \\ = {} & \int(U.u + V.v + W.w)\,ds, \end{aligned}$$

worin die ersten beiden Integrale über die ganze Fläche, das 311
letzte über die ganze Umfangslinie auszudehnen sind. Das elektrodynamische Potential für die vom Strome i durchflossene Umfangslinie findet sich gleich dem magnetischen Potential für die Fläche, wenn deren Flächeneinheit das magnetische Moment i in Richtung ihrer Normale hat. Es entspricht dies dem von Ampère aufgestellten Satze, wonach die ponderomotorische Einwirkung eines geschlossenen Stromes auf andere Ströme oder Magneten gleich der magnetischen Einwirkung einer in der angegebenen Art magnetisirten und von der Stromlinie begrenzten Fläche ist.

Daraus ergiebt sich weiter, dass die inducirte elektromotorische Kraft in der ganzen Länge der Grenzcurve gleich ist der Grösse:

$$\frac{d}{dt}\iint[L.\cos a + M.\cos b + N.\cos c]\,d\omega.$$

Die unter dem Integralzeichen stehende Grösse ist die in Richtung der Normale von $d\omega$ wirkende magnetische Richtkraft, multiplicirt mit $d\omega$. Nennen wir diese R, und beschränkt sich die Fläche auf ihr eines Element $d\omega$, so ist die längs des ganzen Umfangs von $d\omega$ inducirte elektromotorische Kraft:

$$\frac{d}{dt}(R.d\omega).$$

§ 19. Die Erhaltung der Energie.

Wir haben noch zu untersuchen, in wiefern die gefundenen ponderomotorischen Kräfte X, Y, Z der Gleichung (3i) und die elektromotorischen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ der Gleichungen (5b) die Forderungen des Gesetzes von der Erhaltung der Energie erfüllen. Wir wollen zunächst die Werthe beider Arten von Kräften als unbekannt betrachten und aus der Constanz der Energie den Zusammenhang herleiten, der zwischen beiden besteht.

Wenn wir den Leitungswiderstand der Volumeneinheit eines körperlich ausgedehnten Leiters, nach denselben Einheiten gemessen wie in den Gleichungen (3b) meiner ersten Abhandlung, mit $\varkappa$ bezeichnen, so sind die Gleichungen der elektrischen Strömung:

$$\left.\begin{aligned}\varkappa u &= -\frac{d\varphi}{dx} + \mathfrak{X} + \mathfrak{A},\\ \varkappa v &= -\frac{d\varphi}{dy} + \mathfrak{Y} + \mathfrak{B},\\ \varkappa w &= -\frac{d\varphi}{dz} + \mathfrak{Z} + \mathfrak{C}.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

312 Darin ist φ die elektrostatische Potentialfunction, und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{C}$ sind die anderweitigen elektromotorischen Kräfte hydroelektrischen oder thermoelektrischen Ursprungs, welche etwa mitwirken.

Multipliciren wir die erste dieser Gleichungen mit $u\,dt$, die zweite mit $v\,dt$, die dritte mit $w\,dt$, addiren und integriren die ganze Summe über den ganzen Raum, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}&\delta t \iiint \varkappa\,(u^2 + v^2 + w^2)\,dx.dy.dz\\ &= \delta t \iiint [\mathfrak{A}u + \mathfrak{B}v + \mathfrak{C}w]\,dx.dy.dz,\\ &- \delta t \iiint \left(u\cdot\frac{d\varphi}{dx} + v\cdot\frac{d\varphi}{dy} + w\cdot\frac{d\varphi}{dz}\right) dx.dy.dz,\\ &+ \delta t \iiint [\mathfrak{X}u + \mathfrak{Y}v + \mathfrak{Z}w]\,dx.dy.dz.\end{aligned}\right\} \tag{6a}$$

Das Integral links ist das Arbeitsäquivalent der in den Stromleitern während des Zeittheilchens δt entwickelten Wärme. Das

erste Integral rechts ist das Arbeitsäquivalent der bei der Strömung aufgebrauchten chemischen Kräfte in hydroelektrischen Erregern, beziehlich der durch das Peltier'sche Phänomen aufgebrauchten Wärme in thermoelektrischen Erregern, wie ich dies schon in meinem Büchlein über die Erhaltung der Kraft entwickelt habe. Das zweite Integral links ist das durch die elektrischen Strömungen verloren gegangene Arbeitsäquivalent elektrostatischer Kräfte, wie die zur Gleichung (5a) meiner Abhandlung im 72. Bande dieses Journals (oben S. 580) gegebenen Erläuterungen mit Berücksichtigung von (4b) ebendaselbst zeigen.

Daraus folgt, dass das dritte Integral der rechten Seite, welches wir mit $Q\delta t$ bezeichnen wollen,

$$Q = \iiint(\mathfrak{X}u + \mathfrak{Y}v + \mathfrak{Z}w)\,dx.dy.dz \tag{6b}$$

dasjenige Arbeitsäquivalent darstellt, welches die inducirten elektromotorischen Kräfte zur Wärmeentwickelung in der Leitung beigetragen haben. Ausserdem haben die ponderomotorischen Kräfte der elektrischen Ströme mechanische Arbeit erzeugt, deren Betrag $\mathfrak{W}\delta t$ ist,

$$\mathfrak{W} = \iiint(X\alpha + Y\beta + Z\gamma)\,dx.dy.dz, \tag{6c}$$

worin α, β, γ, wie im vorigen Paragraphen, die Geschwindigkeitscomponenten des materiellen Volumenelements $dx.dy.dz$ in Richtung der x, y und z bezeichnen.

Diese letzten beiden Arbeitsäquivalente $Q\delta t$ und $\mathfrak{W}\delta t$ sind nun zu leisten auf Kosten des Arbeitswerthes der elektrischen Strömungen, den wir in Gleichung (4a) meiner ersten 313.
Abhandlung mit Φ_0 bezeichnet haben:

$$\Phi_0 = \tfrac{1}{2} A^2 \iiint (U.u + V.v + W.w)\,dx.dy.dz; \tag{6d}$$

und wir haben also:

$$Q + \mathfrak{W} = -\frac{d\Phi_0}{dt}, \tag{6e}$$

als Ausdruck des Gesetzes von der Erhaltung der Kraft.

Wenn wir in den Werth von $\mathfrak{W}$ der Gleichung (6c) die von uns aus dem Potentialgesetz hergeleiteten Werthe der

Kräfte X, Y, Z der Gleichung (3) setzen, darin aber die Grösse de/dt durch ihren Werth ersetzen, nämlich in Volumenelementen:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz},$$

und in Flächenelementen an der Grenze der Leiter:

$$\frac{de}{dt} = u \,.\, \cos a + v \,.\, \cos b + w \,.\, \cos c,$$

endlich die Differentialquotienten von u, v, w durch partielle Integration beseitigen, so erhalten wir einen Ausdruck von der Form:

$$\mathfrak{W} = A^2 \iiint [\mathfrak{P} \,.\, u + \mathfrak{Q} \,.\, v + \mathfrak{R} \,.\, w]\, dx \,.\, dy \,.\, dz, \tag{6f}$$

worin:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \beta \left(\frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx} \right) + \gamma \left(\frac{dU}{dz} - \frac{dW}{dx} \right) \\ &\quad + \frac{d}{dx} [U \,.\, \alpha + V \,.\, \beta + W \,.\, \gamma], \\ \mathfrak{Q} &= \alpha \left(\frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dy} \right) + \gamma \left(\frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy} \right) \\ &\quad + \frac{d}{dy} [U \,.\, \alpha + V \,.\, \beta + W \,.\, \gamma], \\ \mathfrak{R} &= \alpha \left(\frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz} \right) + \beta \left(\frac{dW}{dy} - \frac{dV}{dz} \right) \\ &\quad + \frac{d}{dz} [U \,.\, \alpha + V \,.\, \beta + W \,.\, \gamma]. \end{aligned}\right\} \tag{6g}$$

Damit die hier vorgenommene partielle Integration ausführbar sei, muss wieder vorausgesetzt werden, dass die Grössen $U\alpha$, $V\beta$ und $W\gamma$ continuirliche Functionen der Coordinaten seien. In dieser Beziehung müssen also Gleitstellen bei Berechnung der elektromotorischen Kräfte ebenso behandelt werden, wie bei Berechnung der ponderomotorischen Kräfte in § 17 geschehen ist. Die Grösse Φ_0 ist (wie die in (1a) und (1b) des § 2 [S. 568 oben] meiner ersten Abhandlung für U, V, W gegebenen Ausdrücke zeigen:

$$U = \iiint \left\{ \frac{u_1}{r} + \frac{1-k}{2} \cdot \left[u_1 \cdot \frac{d^2 r}{dx \,.\, d\xi} + v_1 \cdot \frac{d^2 r}{dx \,.\, d\eta} \right.\right.$$
$$\left.\left. + w_1 \cdot \frac{d^2 r}{dx \,.\, d\zeta} \right] \right\} d\xi \,.\, d\eta \,.\, d\zeta,$$

wo u_1, v_1, w_1 die Werthe von u, v, w im Punkte ξ, η, ζ sind) eine vollkommen symmetrisch gebaute Function der 314
Werthe u, v, w in x, y, z und der Werthe u_1, v_1, w_1 in ξ, η, ζ, und jedes Raumelement kommt darin einmal als influirtes in $dx.dy.dz$ und einmal als influirendes in $d\xi.d\eta.d\zeta$ vor; da demnach jedes Paar doppelt vorkommt, so ist der Factor $\frac{1}{2}$ vorgesetzt. Die Aenderung von Φ_0 wird also ganz gefunden, wenn wir jedes Leiterelement, sofern es als influirendes in ξ, η, ζ vorkommt, sich nach Lage und Stromintensität ändern, sofern es als influirtes in x, y, z vorkommt, unverändert beharren lassen und den Factor $\frac{1}{2}$ beseitigen. Dies giebt:

$$\frac{d\Phi_0}{dt} = A^2 \iiint \left[u \cdot \frac{dU}{dt} + v \cdot \frac{dV}{dt} + w \cdot \frac{dW}{dt}\right] dx.dy.dz. \tag{6h}$$

Setzt man in Gleichung (6e) die Werthe aus (6b), (6f), (6g) und (6h), so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} 0 = \iiint \Big\{ u \cdot \left[\mathfrak{X} + A^2.\mathfrak{P} + A^2 \cdot \frac{dU}{dt}\right] + v . \Big[\mathfrak{Y} + A^2 . \mathfrak{Q} \\ + A^2 \cdot \frac{dV}{dt}\Big] + w . \left[\mathfrak{Z} + A^2 . \mathfrak{R} + A^2 \cdot \frac{dW}{dt}\right]\Big\} \cdot dx.dy.dz. \end{aligned}\right\} \tag{6i}$$

Diese Gleichung ist durch die oben in (5d) gegebenen Werthe von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ wirklich erfüllt, und somit den Forderungen des Gesetzes von der Erhaltung der Energie Genüge geleistet.

Wir haben noch den Fall zu besprechen, dass ein Magnet sich relativ zum Strome bewege, sei es ein permanenter, sei es einer, der durch die Einwirkung elektromagnetischer Kräfte aus einer magnetisirbaren Substanz erst gebildet wird. Wir wollen der einfacheren Darstellung wegen annehmen, die magnetische Substanz selbst sei nichtleitend für die Elektricität. Die Fälle der Anwendung werden dadurch nicht eingeschränkt. Denn in leitenden magnetischen Substanzen würde man sich die Elementarmagnete nur mit leitenden Hüllen umgeben zu denken und die in diesen inducirten Ströme dem System der übrigen vorhandenen elektrischen Ströme zuzurechnen

brauchen. Nun ist bekannt, dass die ponderomotorischen und inducirenden Fernwirkungen eines jeden Elementarmagneten in der magnetisirten Masse genau dieselben sein würden, wenn an Stelle des kleinen Magneten ein elektrischer Kreisstrom gesetzt würde, dessen Intensität multiplicirt mit der Fläche, die er umfliesst, gleich dem magnetischen Momente des Elementarmagneten ist.

Nehmen wir an, dass diese Kreisströme existirten an
315 Stelle der Elementarmagneten, und dass in jedem von ihnen fortdauernd eine elektromotorische (etwa hydroelektrische) Kraft wirksam gehalten würde, welche genau der zu der betreffenden Zeit und an dem betreffenden Orte eintretenden Magnetisirung entspräche, so würden die sämmtlichen Theile der ponderomotorischen Arbeit genau dieselben sein, wie für die magnetische Substanz, und die inducirenden Wirkungen in den sämmtlichen elektrischen Leitern ebenfalls. Dagegen würde in den hypothetischen Kreisströmen noch hinzukommen die chemische und thermische Arbeit dieser Ströme selbst und die inducirten elektromotorischen Kräfte in ihren Bahnen; wegfallen würde die Arbeit der Magnetisirung der Elementarmagnete. In dem hypothetischen Systeme, welches statt der Magnete nur Ströme enthält, wäre nach dem von uns geführten Beweise das Gesetz von der Constanz der Energie gültig. Es fragt sich also nur, ob diejenigen Antheile der hier betrachteten Arbeitsgrössen, die auf die Kreisströme fallen, durch die auf die Elementarmagnete fallenden ersetzt werden können. Wenn in einem solchen Kreisstrome zur Zeit keine inducirte elektromotorische Kraft wirkt, so wird die in ihm geleistete thermische Arbeit ein genaues Aequivalent der in ihm verbrauchten chemischen Energie sein, und beide sich gegenseitig in der Berechnung aufheben. Wenn aber die elektromotorische Kraft $\mathfrak{R}$ inducirt wird und die Stromstärke i herrscht, so wird die Wärmeentwickelung $i\mathfrak{R}dt$ während des Zeittheilchens dt stattfinden, welche nicht durch die in dem Kreisstrome selbst wirkenden Arbeitsäquivalente gedeckt wird. Nennen wir andererseits die zur entsprechenden Magnetisirung erforderliche Arbeit S, so würde $(dS/dt).dt$ die in demselben Theilchen aufgewendete Arbeit sein, wenn der Kreisstrom durch den Elementarmag-

neten ersetzt würde. Wir würden also für jeden einzelnen Kreisstrom haben müssen:

$$\mathfrak{R} \, . \, i = \frac{dS}{dt},$$

da jeder einzelne Kreisstrom durch seinen Elementarmagneten müsste ersetzt werden können. Nun ist aber i dem magnetischen Momente proportional, und dieses ist eine Function der magnetisirenden Kraft, die wir mit σ bezeichnen wollen. Das magnetische Moment des betreffenden Elementarmagneten sei φ_o, und $d\omega$ die Fläche des Kreisstromes, so ist:

$$i \, . \, d\omega = \varphi_o .$$

Andererseits ist die inducirte Kraft $\mathfrak{R}$ nach dem am Schluss
von § 18 gegebenen Nachweise bestimmt durch die Gleichung: 316

$$\mathfrak{R} = \frac{d\sigma}{dt} \cdot d\omega .$$

Die obige Bedingungsgleichung wird also:

$$\varphi_o \cdot \frac{d\sigma}{dt} = \frac{dS}{dt} .$$

Da wir nun über S im allgemeinen nichts weiter wissen, als dass es eine Function der Magnetisirungsstärke φ_o, also auch eine Function von σ ist, so entspricht die letzte Gleichung dieser Anforderung, wenn wir setzen:

$$S = \int_0^\sigma \varphi \, . \, d\sigma .$$

Bei permanenten Magneten würden S, σ und φ gleich Constanten zu setzen sein.

Bei magnetischen Substanzen mit Coërcitivkraft geht beim Magnetisiren und Entmagnetisiren Arbeit verloren, deren Aequivalent sich wahrscheinlich als neu entwickelte Wärme in den Magneten vorfinden wird.

§ 20. Das Inductionsgesetz unter Voraussetzung ausschliesslicher Gültigkeit des Ampère'schen Gesetzes.

Es bleibt noch die Frage übrig, ob nicht noch andere Gesetze der ponderomotorischen und durch Bewegung indu-

cirten elektromotorischen Kräfte bestehen könnten, welche dem Gesetze von der Erhaltung der Kraft genügen, ohne dass dabei die Wirkung geschlossener Ströme auf geschlossene, deren Uebereinstimmung mit dem Potentialgesetz durch die Versuche genügend festgestellt erscheint, verändert würde, und ohne dass die Analogie zwischen permanenten Magneten und geschlossenen Strömen in Bezug auf ihre elektrodynamische Wirkung dabei aufgehoben würde.

Die Gleichung (6e), welche das Gesetz von der Erhaltung der Kraft ausdrückt, reducirt sich für zwei lineare Leiterstücke offenbar auf die Gleichung (4c).

Bezeichnen wir also wie dort die inducirte elektromotorische Kraft, welche das Leiterstück $D\sigma$ in Ds hervorbringt, mit $\mathfrak{R} . Ds . D\sigma$, diejenige dagegen, welche Ds in $D\sigma$ hervorbringt, mit $\mathfrak{R}_1 . D\sigma . Ds$ und die Arbeit, welche bei der Bewegung beider geleistet wird, mit $\delta\mathfrak{W} . Ds . D\sigma$, die actuelle Energie der elektrischen Bewegungen mit $P . Ds . D\sigma$, so muss sein:

317 $$\delta P = i . \mathfrak{R} . \delta t + j . \mathfrak{R}_1 . \delta t + \delta\mathfrak{W}. \qquad (4c)$$

Der Werth von P ist bestimmt durch die Energie, welche die in Ds und $D\sigma$ bestehenden Stromstärken durch die beim Schwinden ihrer Strömungen inducirten Ströme bei gegenseitiger Einwirkung noch hervorbringen können. Die allgemeine Form von P ist schon in meinem ersten Aufsatze (Bd. 72) discutirt worden. Zu P haben wir also keine Zusätze mehr zu machen; es enthält schon die bis jetzt unbestimmte Constante k. Die Zusätze zu $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{W}$, wollen wir beziehlich mit $j\mathfrak{r}$, $i\mathfrak{r}_1$ und $ij . \mathfrak{w}$ bezeichnen. Unsere Gleichung (4c) ergiebt alsdann:

$$0 = \mathfrak{r} . \delta t + \mathfrak{r}_1 . \delta t + \delta\mathfrak{w}. \qquad (7)$$

Diese Gleichung muss ungestört bleiben, wenn der Leiter s eine geschlossene Curve bildet, und seine Fernwirkung durch einen permanenten Magneten ersetzt wird. In einem solchen fällt die elektromotorische Kraft $\mathfrak{r}$ fort, während $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{w}$ unverändert bleiben. Daraus ergiebt sich, dass:

$$\int \mathfrak{r} . \mathrm{D}s = 0,$$

so oft es über einen geschlossenen Stromkreis genommen wird.

Einen solchen stellen wir her, wenn wir irgend zwei lineare Leiter s_1 und s_2 so zusammenlegen, dass ihre Endpunkte a und b zusammenfallen, und ein Strom von derselben Intensität i in s_1 von a nach b, in s_2 von b nach a fliesst.

Daraus folgt, dass die elektromotorische Zusatzkraft $\int\limits_a^b \mathfrak{r} \, . \, Ds$ in der Richtung von a nach b wirkend für beide die gleiche sein muss, wenn ihre Endpunkte zusammenfallen, wie auch übrigens der Verlauf der beiden Curven s_1 und s_2 sein mag, und dass also die Grösse dieser Zusatzkraft in einem ungeschlossenen linearen Leiter allein von der Lage und den Bewegungen seiner Endpunkte abhängt. Ferner, dass sie gleich Null ist, wenn diese Endpunkte unveränderte relative Lage gegen alle Theile des Leiters σ behalten, weil dann auch der Leiter s_2 als vollkommen ruhend gegen σ gewählt werden könnte, und unter diesen Umständen in ihm keine Induction vorginge.

Da nun der Werth der gesammten elektromotorischen Kraft in s durch eine Integration über die Längenelemente Ds gefunden wird, so muss der Werth dieses Integrals nur von der Lage der Endpunkte von s abhängen, nicht von dem Verlauf der Curve zwischen diesen Endpunkten, das heisst, die
zu integrirende Function muss der nach s genommene Diffe- 318
rentialquotient einer Function Φ sein, die nur von der relativen Lage der einzelnen Punkte von s gegen die Elemente $d\sigma$ abhängt. Da bei der Lagenänderung Aenderungen in der Länge von σ vorkommen können, so ist es zweckmässiger, wie in § 15, die einzelnen Punkte von s und σ wieder durch zwei bei der Bewegung unverändert bleibende Parameter p und ϖ zu bestimmen. Wir werden dann zu setzen haben:

$$\mathfrak{r} \, . \, Ds \, . \, D\sigma = \mathfrak{r} \cdot \frac{ds}{dp} \cdot \frac{d\sigma}{d\varpi} \cdot Dp \, . \, D\varpi = \frac{d\Phi}{dp} \cdot Dp \, . \, D\varpi. \tag{7a}$$

Die relative Lage von $D\sigma$ gegen einen Punkt von s ist gegeben, wenn die drei Seiten des Dreiecks zwischen diesem Punkte und den Endpunkten von $D\sigma$ gegeben sind. Diese sind:

$$r, \quad r + \frac{dr}{d\varpi} \cdot D\varpi, \quad \frac{d\sigma}{d\varpi} \cdot D\varpi.$$

Es muss also $\Phi . D\varpi$ eine Function dieser Grössen und ihrer Aenderungen sein, und zwar linear nach den letzteren, und selbst proportional $D\varpi$; es wird also von der Form sein:

$$\left.\begin{aligned}\Phi . D\varpi = \varphi \cdot \frac{d\sigma}{d\varpi} \cdot \delta r . D\varpi + \psi . \delta\left(\frac{dr}{d\varpi}\right) \cdot D\varpi \\ + \chi . \delta\left(\frac{d\sigma}{d\varpi}\right) \cdot D\varpi.\end{aligned}\right\} \qquad (7\,\mathrm{b})$$

Hierin können φ, ψ, χ Functionen sein von r und $dr/d\sigma$, da nur noch solche Verbindungen der Seiten des oben genannten Dreiecks vorkommen dürfen, deren Werthe frei von $D\varpi$ sind.

Wenn ψ nur von r abhängig ist, nicht von $dr/d\sigma$, wenn ferner f und g Functionen von r bezeichnen und:

$$\left.\begin{aligned}\varphi = f(r) \cdot \frac{dr}{d\sigma}, \\ \chi = g(r) \cdot \frac{dr}{d\sigma},\end{aligned}\right\} \qquad (7\,\mathrm{c})$$

so hätte jedes Glied in dem Werthe von $j . \Phi$ entweder den Factor:

$$j \cdot \frac{dr}{d\sigma} = -j . \cos[r, D\sigma]$$

oder:

$$j . \delta\left(\frac{dr}{d\sigma}\right) = -j . \delta \cos[r, D\sigma].$$

319 Es käme also von der Strömung j, die nach $D\sigma$ gerichtet ist, nur die in Richtung von r fallende Componente in Betracht. Da nun diese Projection gleich der Summe der Projectionen der nach beliebigen Richtungen genommenen Componenten von j ist, so kann in diesem Falle j in dem Leiterelement ersetzt werden durch eine beliebige Anzahl beliebig gerichteter Componenten, deren Resultante gleich j ist. Dies kann aber nicht geschehen, wenn φ, ψ und χ eine andere Art der Abhängigkeit von $dr/d\sigma$ hätten. Unter der genannten Annahme, deren Wahrscheinlichkeit wohl als sehr gross bezeichnet werden kann, und die auch von Hrn. C. Neumann seinen Deductionen zu Grunde gelegt wurde, würden also die Glei-

chungen (7a) bis (7c) die allgemeinste Form des Werthes von $\mathfrak{r}$ geben.[1])

Für die speciellere Aufgabe jedoch eine Form des Inductionsgesetzes zu finden, welche unter Voraussetzung des Ampère'schen Gesetzes für die ponderomotorischen Kräfte, mit Ausschluss der auf die Enden der Leiter wirkenden Kräfte, giltig ist, genügt die Form (7b). Zunächst werden wir aus denselben Gründen für die in dem Leiter σ inducirte elektromotorische Kraft $\mathfrak{r}_1$ analoge Ausdrücke aufstellen dürfen:

$$\mathfrak{r}_1 . Ds . D\sigma = \frac{d\Phi_1}{d\varpi} . Dp . D\varpi \tag{7d}$$

und

$$\Phi_1 = \varphi_1 . \frac{ds}{dp} . \delta r + \psi_1 . \delta\left(\frac{dr}{dp}\right) + \chi_1 . \delta\left(\frac{ds}{dp}\right), \tag{7e}$$

worin φ_1, ψ_1 und χ_1 Functionen von r und dr/ds sein müssen. Benutzen wir dann die Gleichung (7)

$$\delta\mathfrak{w} = -(\mathfrak{r} + \mathfrak{r}_1)\delta t, \tag{7}$$

so erhalten wir durch Integration über die Längen der beiden Leiter s und σ mit ähnlicher Bezeichnung, wie in § 15: 320

$$\left.\begin{aligned} i.j.\iint \delta\mathfrak{w} . Ds . D\sigma = & -\Sigma\Sigma\left[\frac{de}{dt} . \frac{d\mathfrak{e}}{dt} . (\psi + \psi_1)\delta r\right] \\ & -\Sigma\int\left[j . \frac{de}{dt} . \left(\varphi - \frac{d\psi}{d\varpi}\right)\delta r . D\varpi\right] \\ & -\Sigma\int\left[i . \frac{d\mathfrak{e}}{dt} . \left(\varphi_1 - \frac{d\psi_1}{dp}\right)\delta r . Dp\right] \\ & -\Sigma\int\left[j . \frac{de}{dt} . \chi . \frac{d\delta\sigma}{d\varpi} . D\varpi\right] \\ & -\Sigma\int\left[i . \frac{d\mathfrak{e}}{dt} . \chi_1 . \frac{d\delta s}{dp} . Dp\right]. \end{aligned}\right\} \tag{7f}$$

1) Die hier gemachte Annahme verbunden mit der, dass das Potential zweier Leiter mit der Formel von Hrn. Neumann senior übereinstimmen müsse, wenn beide geschlossen sind, genügt die im 72. Bande dieses Journals in § 1 meiner Arbeit ausgeführte Verallgemeinerung der Potentialformel zu rechtfertigen, an Stelle der dort gemachten Voraussetzung, dass die Uebereinstimmung stattfinden müsse, wenn auch nur einer von beiden Leitern geschlossen sei, deren experimentelle Begründung zur Zeit vielleicht zu mangelhaft erscheinen könnte.

Die Summen sind hier für die einzelnen Stromenden zu nehmen. Die drei ersten Glieder dieses Ausdrucks entsprechen anziehenden oder abstossenden Kräften zwischen je zwei Stromenden, oder zwischen Stromenden und Stromelementen, wie wir dergleichen ähnlich aus dem Potentialgesetze hergeleitet haben. Die beiden letzten Glieder geben Kräftepaare, welche die Stromelemente zu dehnen und zu verkürzen streben, und in den Kräften des Potentialgesetzes kein Analogon finden. Es lassen sich daher die sechs noch unbekannten Functionen φ, ψ, χ, φ_1, ψ_1, χ_1 so bestimmen, dass die Kräfte, welche von den Stromenden ausgehen, gleich Null werden. Zu dem Ende müssen wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} \chi = \chi_1 &= 0, \\ \psi + \psi_1 &= -\frac{1+k}{2} \cdot A^2, \\ \varphi &= -\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\varpi} \cdot A^2, \\ \varphi_1 &= -\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dp} \cdot A^2. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Die obige Gleichung (4a) für den Werth der nach dem Potentialgesetz inducirten Kraft lässt sich schreiben:

$$\mathfrak{R} \cdot \frac{ds}{dp} \cdot \frac{d\sigma}{d\varpi} \cdot \delta t = A^2 \delta \left\{ j \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dp} \cdot \frac{dr}{d\varpi} + \frac{1+k}{2} \cdot \frac{d^2 r}{dp \cdot d\varpi} \right) \right\},$$

und es wird also die gesammte Inductionskraft, welche das Element $D\sigma$ auf Ds ausübt, wenn nur die Ampère'schen Kräfte als ponderomotorische existiren:

$$\left.\begin{aligned} &(\mathfrak{R} + j \cdot \mathfrak{r})\, Ds \cdot D\sigma \cdot \delta t \\ &= A^2 \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dp} \cdot \frac{dr}{d\varpi} + \frac{1+k}{2} \cdot \frac{d^2 r}{dp \cdot d\varpi} \right) \cdot \delta j \cdot Dp \cdot D\varpi \\ &+ A^2 \cdot j \cdot \left[\frac{1+k}{4} \cdot \frac{d^2(\delta r)}{dp \cdot d\varpi} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{dp} \cdot \frac{d(\delta r)}{d\varpi} - \frac{\delta r}{r} \cdot \frac{d^2 r}{dp \cdot d\varpi} \right] Dp \cdot D\varpi. \end{aligned}\right\} \tag{8a}$$

321 Der erste mit δj multiplicirte Theil dieses Ausdrucks giebt die von der Stromesschwankung herrührende Induction, der zweite Theil dagegen die von der Bewegung herrührende. Wenn wir berücksichtigen, dass:

$$Dp.D\varpi.\delta\left[\frac{d^2r}{dp.d\varpi}\right] = \delta\left[\frac{d^2r}{ds.d\sigma}.Ds.D\sigma\right],$$

$$\frac{dr}{dp}.Dp.D\varpi.\delta\left[\frac{dr}{d\varpi}\right] = \frac{dr}{ds}.\delta\left[\frac{dr}{d\sigma}.D\sigma\right].Ds,$$

so ergiebt sich der Werth der durch Bewegung inducirten elektromotorischen Kraft P im Elemente Ds gleich:

$$\left.\begin{aligned} P.Ds.D\sigma.\delta t = A^2.j \Big\{ & -\frac{1}{r}.\cos\vartheta.\delta[\cos\vartheta_1.D\sigma]\,Ds \\ & -\frac{\delta r}{r^2}[\cos\vartheta.\cos\vartheta_1 - \cos\varepsilon]\,Ds.D\sigma \\ & +\frac{1+k}{4}\,\delta\left[\frac{1}{r}.(\cos\vartheta.\cos\vartheta_1 - \cos\varepsilon)\,Ds.D\sigma\right]\Big\}. \end{aligned}\right\} \quad (8b)$$

Dieser Ausdruck verwandelt sich in den von Hrn. C. Neumann gefundenen, wenn man $k = -1$ setzt, welche Annahme übrigens nach den in meinem früheren Aufsatze im 72. Bande gemachten Auseinandersetzungen unzulässig ist, da die Stabilität des Gleichgewichts der ruhenden Elektricität fordert, dass k keinen negativen Werth habe. Der hier gefundene Werth der inducirten elektromotorischen Kraft genügt übrigens, wie ich schon in der Einleitung bemerkt habe, den sämmtlichen von Hrn. C. Neumann an die Spitze seiner Deduction (Abh. der Königl. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. X. S. 419 u. 420, sowie S. 468—470) gestellten Forderungen. Er genügt aber nicht der Annahme, die derselbe auf S. 481 u. 482 seiner Arbeit eingeführt hat, wonach die Verlängerung eines Stromelements in der Weise inducirend wirken soll, als wenn in dem hinzukommenden Theile seiner Länge der Strom neu einsetzte, und die Induction nach dem Gesetze der durch Aenderungen der Intensität inducirten Ströme geschähe.

Ich habe in der vorliegenden Entwickelung keine einschränkende Hypothese über die Art, wie Verlängerung der Stromelemente wirkt, gemacht. Deshalb ist die Constante k mit unbestimmtem Werthe stehen geblieben, und es geht daher aus dieser Untersuchung hervor, dass das Ampère'sche Gesetz der ponderomotorischen Kräfte in der That mit dem Gesetze von der Erhaltung der Kraft, wie mit der Stabilität des elektrischen Gleichgewichts vereinbar wäre. Aber freilich

322 wird eine solche elektrodynamische Theorie viel complicirter, als die auf das einfache Potentialgesetz gegründete. Die Entscheidung kann also nur durch Versuche, nicht durch theoretische Betrachtungen gewonnen werden.

Der erwähnte Unterschied zwischen der Induction durch Stromsteigerung und der durch Bewegung bei Verlängerung eines Elementes hängt in dem von uns gegebenen Ausdrucke davon ab, dass das mit $1 + k$ multiplicirte Glied im ersteren Fall die Factoren $\frac{1}{2} . Ds . D\sigma . \delta j$, im letzteren aber $\frac{1}{4} j \delta (Ds . D\sigma)$ enthält.

Zu bemerken ist noch, dass, wenn wir $k = -1$ setzen, nach den hier entwickelten Formeln sich ergiebt:

$$(\mathfrak{R} + \mathfrak{r}) Ds . D\sigma . \delta t = - A^2 . \frac{\cos \vartheta}{r^2} . Ds . \delta [j r \cos \vartheta_1 . D\sigma]$$
$$+ A^2 . j . \cos \varepsilon . \frac{\delta r}{r^2} . Ds . D\sigma,$$

während nach der von Hrn. C. Neumann l. c. auf S. 503, Gleichung (132) gegebenen Formulirung das $D\sigma$ aus der mit δ behafteten Parenthese herausbleiben würde. Die letztere Formulirung nimmt keine Rücksicht auf Induction durch Verlängerung der Leiterelemente. Wenn sie diese nähme, so würde der letzterwähnte Unterschied verschwinden, falls ich den Sinn der Neumann'schen Deduction richtig verstehe.

Endlich ist hier noch zu bemerken, dass in dem mit dem Factor $1 - k$ behafteten Gliede bei allen diesen Entwickelungen statt $d^2 r / ds . d\sigma$ auch $d^2 \varphi(r) / ds . d\sigma$ gesetzt werden könnte, worin φ irgend eine eindeutige und continuirliche Function von r bedeutet. Diese ist in meinem Aufsatze im 72. Bande dieses Journals nur deshalb gleich r gesetzt worden, weil es wahrscheinlich erschien, dass die noch unbekannten Theile der Wirkung eines Stromelements dasselbe Gesetz der Wirkung in die Ferne zeigen würden, wie die bekannten. Dabei wäre aber noch besonders zu untersuchen, ob ein solches φ geeignet wäre, den Bedingungen der Stabilität des Gleichgewichts zu genügen.

Was die möglicher Weise experimentell zu beobachtenden Unterschiede zwischen den beiden Inductionsgesetzen betrifft, die aus dem Potentialgesetze einerseits und aus dem Ampère-

schen andererseits folgen, so zeigt unsere Darstellung, dass die in geschlossenen Kreisen inducirten Kräfte überhaupt keinen Unterschied zeigen werden, sondern nur die in geöffneten Kreisen. In letzteren werden verhältnissmässig die stärksten
Wirkungen hervorzubringen sein, wenn der inducirende Kreis σ 323
geschlossen ist. Er kann dann viele Windungen haben, oder durch starke Magnete ersetzt werden. In diesem Falle fällt das mit dem Factor $1+k$ behaftete Glied durch die Integration über den Leiter σ aus, und der Unterschied zwischen beiden Gesetzen reducirt sich auf das Glied:

$$j\mathfrak{r}.\delta t = -A^2.j.\frac{d}{ds}\left[\delta r.\frac{1}{r}.\frac{dr}{d\sigma}\right].$$

Bezeichnen wir die Längenelemente der Linien, in denen sich die Endpunkte des Leiters s bewegen, für den höchsten und niedersten Werth von s beziehlich mit $d\varrho_1$ und $d\varrho_2$, so können wir setzen:

$$\delta r = \frac{dr}{d\varrho_1}.\delta\varrho_1, \quad \text{beziehlich} \quad \delta r = \frac{dr}{d\varrho_2}.\delta\varrho_2.$$

Dann wird:

$$\delta t\int j\mathfrak{r}.ds = A^2.j\left[\delta\varrho_2.\frac{1}{r}.\frac{dr}{d\sigma}.\frac{dr}{d\varrho_2} - \delta\varrho_1.\frac{1}{r}.\frac{dr}{d\sigma}.\frac{dr}{d\varrho_1}\right],$$

worin für r und $dr/d\sigma$ die den entsprechenden Endpunkten des Leiters zugehörigen Werthe zu nehmen sind.

Die nach dem Potentialgesetze stattfindende elektrodynamische Kraft reducirt sich dagegen bei geschlossenem σ auf:

$$\delta t\int \mathfrak{R}.ds = A^2.j.\delta\int\left[\frac{1}{r}.\frac{dr}{ds}.\frac{dr}{d\sigma}\right]ds.$$

Denken wir uns also einen Stromkreis ϱ zusammengesetzt aus:

1) der zweiten Lage von s, positiv durchlaufen,

2) der Bahn $d\varrho_1$ des oberen Endpunktes von s, gegen die Richtung der Bewegung durchlaufen,

3) der ersten Lage von s, negativ durchlaufen,

4) der Bahn $d\varrho_2$ des unteren Endpunktes von s, in Richtung der Bewegung durchlaufen,

so würde die vom Element $j.d\sigma$ inducirte Kraft nach dem Ampère'schen Gesetze sein müssen:

$$\delta t\int(\mathfrak{R}+\mathfrak{r})\,ds = A^2.j\int\frac{1}{r}.\frac{dr}{d\sigma}.\frac{dr}{d\varrho}d\varrho.$$

Das wäre gleich der elektromotorischen Kraft, die der Strom j beim Entstehen in dem ganzen beschriebenen Umkreise ϱ erzeugen würde.

324 Diese Formulirung hatte Hr. Neumann sen.[1]) vor der Aufstellung des Potentialgesetzes aus dem Ampère'schen Gesetze abgeleitet.

Wenn das Potentialgesetz gilt, fallen dagegen diejenigen Theile des letzten Integrals fort, welche sich nicht auf die beiden Lagen des Leiters s, sondern auf die Bahn seiner Endpunkte beziehen.

Denken wir uns eine drehrunde Metallscheibe, schnell um ihre Axe rotirend, und von magnetischen Kraftlinien durchzogen, die der Axe parallel, und rings um die Axe symmetrisch vertheilt sind, so wird der Rand der Scheibe nach dem Ampère'schen Gesetze elektrisch werden, nach dem Potentialgesetze nicht.

Berlin, im April 1874.

1) Allgemeine Gesetze der inducirten elektrischen Ströme. Abhandl. d. Berliner Akademie d. Wiss. 1845.

XXXVIII.

Kritisches zur Elektrodynamik.

Aus: Poggendorff's Annalen Bd. CLIII. S. 545–556. (1874).

Auf S. 138 ff. dieses Bandes sind von Hrn. Zöllner, und 545
S. 262 von Hrn. Herwig elektrodynamische Versuche beschrieben worden, welche nach Ansicht ihrer Urheber geeignet sein sollen, das von Hrn. F. E. Neumann (dem Vater) aufgestellte und von mir in erweiterter Anwendung durchgeführte Grundgesetz der elektrodynamischen Erscheinungen als unvereinbar mit den experimentellen Erfahrungen darzustellen.
Dieses Gesetz, welches wir kurzweg als das elektrodyna- 546
mische Potentialgesetz, oder so weit es noch nicht durch die Versuche bestätigt ist, als die Potentialhypothese bezeichnen wollen, sagt aus, dass die elektrodynamischen Kräfte ein Potential haben, und dass dessen Werth derselbe sei, mögen die Kräfte nun als ponderomotorische (nach Hrn. C. Neumann's zweckmässiger Bezeichnung) die Leiter selbst bewegen, oder als elektromotorische die Elektricität in den Leitern bewegen.

Hr. Neumann senior hatte schon im Jahre 1848 [1]) zunächst für den Fall, dass die Stromleiter linear sind und unveränderliche starre Form besitzen, nachgewiesen, dass das von ihm aufgestellte Gesetz gerade dieselben ponderomotorischen Kräfte ergebe, wie das von Ampère. Ich habe diesen Be-

1) Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme. Berlin, Reimer.

weis neuerdings[1]) ausgedehnt auf beliebig geformte und nach drei Dimensionen ausgedehnte Leiter, deren einzelne Theile beliebige Arten von Dehnsamkeit, Biegsamkeit, elastischer oder flüssiger Nachgiebigkeit besitzen. Vorausgesetzt, dass wir es nur mit geschlossenen Strömen zu thun haben, ergeben beide, Ampère's Gesetz und das Potentialgesetz, genau dieselben Werthe der resultirenden Kräfte, welche jeden einzelnen Punkt des bewegten Leiters angreifen, wenn auch die Ansichten über die Componenten, aus denen diese Resultanten sich zusammensetzen, weit auseinander gehen.

Die Abweichung beider Theorien voneinander beginnt erst, wenn man es mit ungeschlossenen Strömen zu thun hat, und der Zweck meiner theoretischen Arbeiten war es eben, diejenigen Fälle herauszufinden, wo ein Unterschied beider Gesetze sich bei ausführbaren Versuchen zu erkennen geben würde. Uebrigens haben wir es bei den Versuchen meiner beiden Gegner durchaus nur mit geschlossenen Strömen zu thun, und es müssen also, wenn ich nicht einen Rechenfehler in meinen
547 theoretischen Untersuchungen begangen habe, die Ergebnisse dieser Versuche entweder mit beiden Gesetzen übereinstimmen oder mit beiden in Widerstreit sein. In Wirklichkeit tritt der erste Fall ein; sie stimmen mit beiden überein, wie ich zeigen werde.

Das elektrodynamische Potential p zweier linearen Stromelemente ds und $d\sigma$, welche von den Stromstärken i und j durchflossen werden, deren Richtungen miteinander den Winkel ε bilden, und deren Entfernung gleich r ist, hat nach der Neumann'schen Formulirung bei Festsetzung passender Einheiten der Stromstärke den Werth:

$$p = -i.j.ds.d\sigma \cdot \frac{\cos\varepsilon}{r}.$$

Die mechanische Bedeutung dieses Ausdruckes besteht darin, dass er die Grösse des Arbeitsvorrathes angiebt, den die ponderomotorischen Kräfte der beiden Elemente bei unveränderten Stromstärken i und j zu leisten im Stande sind.

1) Ueber die Theorie der Elektrodynamik. Borchardt's Journal für Mathematik. Bd. 78, S. 273.

wenn man beide entweder in unendliche Entfernung voneinander oder überhaupt in eine Lage überführt, wo $p = 0$ ist. Letzteres geschieht zum Beispiel auch, wenn man sie rechtwinkelig gegen einander richtet. Die Kräfte, welche die genannten beiden Elemente aufeinander ausüben, ergeben sich aus der Bedingung, dass diese Kräfte, ohne selbst von der Art der Bewegung der Elemente abhängig zu sein, bei jeder virtuellen Verschiebung der Elemente eine Arbeit leisten müssen, deren Betrag gleich $-dp$ ist.

Betrachten wir, wie oben geschehen, die Elemente ds und $d\sigma$ als linear, d. h. ihren Querschnitt als verschwindend klein gegen ihre Länge, sie selbst aber als geradlinig bleibend, wie es bei den unendlich kleinen Längenelementen einer Curve geschehen darf, so können sich in dem Ausdrucke von p ändern die Grössen ds, $d\sigma$, ε und r. Die entsprechenden Kräfte sind dem entsprechend:

1) ein Kräftepaar, welches die Enden von ds angreift, dessen Componenten parallel $d\sigma$ gerichtet sind, und die Intensität haben:

$$\frac{i \,.\, j \,.\, d\sigma}{r}.$$ 548

Dieses Kräftepaar strebt den Strom i in ds parallel und gleichgerichtet zu stellen dem Strome j in $d\sigma$.

2) ein entsprechendes Kräftepaar, welches $d\sigma$ parallel ds zu stellen sucht, dessen Componenten die Endpunkte von $d\sigma$ angreifen, parallel ds gerichtet sind, und die Intensität haben:

$$\frac{i \,.\, j \,.\, ds}{r}.$$

Beide Kräftepaare werden die Elemente auch zu dehnen streben, wenn $\cos \varepsilon$ positiv ist.

3) eine Anziehungskraft zwischen beiden Elementen in Richtung der Linie r, deren Grösse ist:

$$i \,.\, j \,.\, ds \,.\, d\sigma \frac{\cos \varepsilon}{r_2}.$$

Das heisst: wenn die Stromesrichtungen gleichnamiger Elektricität mit einander einen spitzen Winkel bilden, ziehen sich

die beiden Ströme an; bilden sie einen stumpfen Winkel, so stossen sie sich ab.

Das Drehungsmoment jener beiden Kräftepaare hat den Werth:

$$i.j.ds.d\sigma \frac{\sin}{r}.$$

Aus der Vergleichung dieses Werthes mit dem für die Anziehungskraft geht hervor, dass wie bei den Einwirkungen, welche eine kleine Magnetnadel von entfernten Magneten erleidet, in grösseren Entfernungen die drehenden Kräfte einen überwiegenden Einfluss den anziehenden gegenüber haben werden.

Will man ermitteln, ob die elektrodynamischen Kräfte eine gewisse Lagenänderung eines der Leiter oder seiner Theile unterstützen können, so hat man nur nachzusehen, ob durch die betreffende Lagenänderung der Werth des Potentials der beiden Stromleitungen aufeinander kleiner werde. Ist das der Fall, so unterstützen die elektrodynamischen Kräfte die Bewegung, oder streben sie hervorzubringen, wenn sie noch
549 nicht besteht. Natürlich muss aber eine solche Untersuchung sich auf alle bewegten Theile des Leiters erstrecken, und man muss nicht willkürlich einige berücksichtigen und andere ausser Betracht lassen.

Bei der gewöhnlichen Art die Rotation eines Leiters um einen vertical aufgestellten Magneten zu zeigen, lässt man einen starren Bügel um eine mit der Axe des Magneten zusammenfallende verticale Axe rotiren. Die Theile des Leiters können dabei keine andere Bewegung machen, als die Rotationsbewegung; folglich ist bei der Anwendung des Potentialgesetzes auf diesen besonderen Fall auch auf keine andere mögliche Bewegung des starren Leiters Rücksicht zu nehmen. Hr. Riecke[1]) hatte richtig hervorgehoben, dass in diesem Falle das elektrodynamische Potential auf die verschiedenen Theile des rotirenden Bügels keine Aenderung erleidet, und da dennoch Rotation desselben eintritt geglaubt daraus einen Einwand gegen das Potentialgesetz hernehmen zu können. Ich selbst hatte dagegen darauf aufmerksam gemacht, dass

1) Göttinger Nachrichten 14. August 1872.

rotirende Kräfte auf die stromleitenden Flüssigkeitsfäden des Quecksilbers oder der Elektrolyten einwirken, durch welche man dem peripherischen Ende des Bügels den Strom zuleiten muss. Dadurch werden die dem Leiter adhärirenden Theile dieser Flüssigkeitsfäden im Sinne der wirklich stattfindenden Rotation fortbewegt, und nehmen den festen Leiter mit.

Dies hindert nun natürlich nicht, dass wenn man irgend welche Theile des Bügels beweglich macht, diese ihrerseits durch die elektrodynamischen Kräfte, denen sie ausgesetzt sind, entsprechend gerichtet werden. Dies hat zum Beispiel Hr. Zöllner betreffs der seitlichen verticalen Theile des Bügels gethan, indem er sie aus Ketten oder dünnen frei herabhängenden Kupferdrähten bestehen liess. Da nun bekanntlich ein Magnet einen seiner Längsaxe parallel neben ihm herlaufenden Stromleiter nach dem Ampère'schen, wie nach dem Potential-
gesetze quer gegen seine Längsaxe, das heisst parallel den dem 550
Drahte zugewendeten Seiten seiner Kreisströme, zu stellen sucht, so geschieht dies auch in diesem Falle so, wie es der genannte Autor beobachtet hat. Da es die gleiche drehende Kraft ist, welche auf den beweglichen Draht und auf die stromleitenden Flüssigkeitsfäden wirkt, in die sich sein unteres Ende verlängert, so werden beide auch in gleichem Sinne gedreht, nur dass die Drehung des Drahtes ihre Grenzen findet an seiner Festigkeit und Schwere, die Drehung in der Flüssigkeit aber ohne Grenze vorwärts gehen kann. Darum geht das obere Ende des beweglichen Drahtes bei der Rotation voraus, oder neigt sich wenigstens im Sinne derselben vorwärts, wenn die Flüssigkeit zu zäh ist, um die Rotation zu gestatten.

Diese so einfache und bei folgerichtiger Anwendung des Princips sich nothwendig ergebende Erklärung der Zöllner-schen Versuche hat auch Hr. C. Neumann (Sohn) übersehen, indem er (Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wiss. 8. Aug. 1874, S. 145) die Erwartung ausspricht, dass diesen Versuchen gegenüber die Potentialtheorie nicht mehr zu halten sein würde.

Ich wende mich nun zu den von Hrn. Herwig beschriebenen Versuchen. Derselbe hat das Quecksilber beseitigt und dafür sehr biegsame Drähte angewendet. Der feste Bügel

ist aufgehängt an einem oberen verticalen Draht, der bei der Drehung torquirt wird, und dessen elektromagnetische Wirkung nicht in Betracht kommt, wie besonders zu diesem Zwecke angestellte Versuche gezeigt haben. Letzteres stimmt übrigens mit den Folgerungen aus der Theorie überein, wenn man die Dicke des Drahtes als verschwindend klein betrachtet. Der zweite Draht (*def* in der Figur S. 265 dieses Bandes), der den Strom zum unteren Ende des Bügels leitet, beschreibt einen horizontalen Halbkreis, dessen Mittelpunkt in der gemeinsamen Axe des Elektromagneten und der Rotation liegt. Dieser
551 Draht muss von den Kreisströmen des Elektromagneten angezogen und abgestossen werden, je nachdem in beiden die Ströme gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind. Im ersteren Falle wird er gegen *d* drücken, im zweiten Falle daran ziehen, und da der Bügel so aufgehängt ist, dass er nur im Sinne der Rotation merkliche Verschiebungen machen kann, wird er Drehbewegungen beginnen und so weit fortsetzen, bis die Elasticität der gebogenen Drähte *def* und *dgf* den elektromagnetischen Kräften das Gleichgewicht hält. Drehung in dem genannten Sinne ist es, die wirklich eintritt.

Alles dies ist in Uebereinstimmung mit dem Potentialgesetze. Auch dass Hr. Herwig bei Verschiebungen des Magneten durch Berechnung nach Ampère's Formel annähernd richtige Verhältnisse für die Grösse der Drehkräfte erhielt, ist kein Widerspruch gegen das Potentialgesetz, da die resultirenden Kräfte nach beiden Gesetzen immer die gleichen sein müssen. Ebenso hat der genannte Experimentator aus dem Potentialgesetze richtig geschlossen, dass die Drehkraft gleich gross sein müsse, wenn er den Draht *def* durch Heben und Senken des Magneten in symmetrische Lage zu beiden Polen brachte. Der Versuch bestätigte dies. Ich erlaube mir dabei zu bemerken, dass dies eines der Beispiele ist, welche zeigen, wie übersichtlich die Erscheinungen durch das Potentialgesetz werden. Um diese Folgerung bei der sehr asymmetrischen Beschaffenheit des Bügels direct aus dem Ampère'schen Gesetze zu ziehen, wären wohl ziemlich weitläuftige Rechnungen nöthig gewesen. Sich ableiten lassen muss sie schliesslich aus dem letzteren auch.

Was nun die Punkte betrifft, an denen Hr. Herwig Anstoss nimmt, so hat er erstens einen Versuch beschrieben, bei dessen Deutung ein ähnliches Uebersehen vorkommt, wie das oben besprochene. Er hat nämlich, um die nach Ampère direct auf den Bügel wirkenden Kräfte zu beseitigen, eine zweite Ableitung am unteren Ende des Bügels durch einen feinen in radialer Richtung geführten Draht (*ch* der Figur auf S. 265) angebracht. Geht nun der Strom durch *def* und *ch*, 552
so bleibt die Wirkung des Magneten auf *def* unverändert, die auf den Bügel *ca*, falls eine solche vorhanden ist, fällt weg. Der Versuch ergab ihm nun in der That, dass die Rotationskraft auf einen kleinen Bruchtheil ihrer früheren Grösse vermindert wurde, und Hr. Herwig schliesst daraus, dass die Wirkung auf den Draht *def* unerheblich sei, die hauptsächlichste Drehkraft dagegen auf den Bügel *abc* ausgeübt werde.

Unser Autor hat dabei übersehen, dass er durch Einführung des beweglichen Drahtes *ch* eine Gegenkraft einführte, die vorher nicht bestand. Das Potential des Drahtes *ch* ist Null, so lange er streng radiale Richtung hat. Es wird dagegen von Null verschieden, sowie der Punkt *e* der Drehung des Bügels folgt, während das entferntere Ende des Drahtes festgehalten wird; und zwar ist der Sinn dieser Wendung des Drahtes *ch* der Richtung entgegengesetzt, in welche die elektromagnetischen Kräfte ihn zu drehen streben. Hr. Herwig scheint die Wirkung dieses Drahtes für unbedeutend gehalten zu haben, da er sich auf kürzestem Wege vom Elektromagneten entfernt, und sehr dünn war. Eine leicht auszuführende Rechnung ergiebt dagegen, dass, wenn die Länge des Magneten sehr beträchtlich wäre im Vergleich mit der Länge dieser Drähte von *f* bis *h*, die elektromagnetischen Kräfte, die auf *def* und *ch* nach dem Potentialgesetze ausgeübt werden, sich gegenseitig vollständig im Gleichgewicht halten würden.

Rings um die Mitte eines sehr langen gleichmässig magnetisirten cylindrischen Magneten ist nämlich das elektromagnetische Potential eines Stromelements $i.ds$ von der Form:

$$M.i.\frac{ds.\cos\eta}{\varrho},$$

wo M eine von der Stärke der Magnetisirung abhängige Constante bedeutet, η den Winkel, den die Richtung von i in ds mit der Tangente eines durch ds gehenden Kreises vom Ra-
553 dius ϱ bildet, dessen Mittelpunkt in der Axe des Magneten liegt und dessen Ebene senkrecht zu dieser Axe ist. Denken wir uns durch die Axe des Magneten als Pollinie eine feste Meridianebene gelegt, und nennen ω den Winkel, welchen die Linie ϱ mit dieser festen Meridianebene bildet, so ist $\varrho . d\omega = ds . \cos\eta$. Somit wird der obige Ausdruck gleich:

$$Mi . d\omega$$

und der ganze Werth des Potentials des Drahtes:

$$Mi(\omega_1 - \omega_0),$$

wo ω_1 und ω_0 die Werthe des Winkels ω für Anfang und Ende der übrigens ganz beliebig zu führenden Drahtcurve bezeichnen. Sind also diese Endpunkte fest, wie in Hrn. Herwig's Versuch die Punkte f und h, so kann keinerlei Lagenänderung der dazwischen befindlichen Drahtleitung das Potential verändern, und also keine elektrodynamische Wirkung auf den Draht vorhanden sein. Dass Hr. Herwig doch noch einen kleinen Rest einer solchen gesehen hat, wird darauf zurückzuführen sein. dass die Länge seines Magneten verglichen mit den Längen der Drähte endlich war, und dadurch die nahen Theile des Drahtes in ein etwas günstigeres Verhältniss zum Magneten kamen als die entfernten.

Ausserdem aber spricht Hr. Herwig die Meinung aus, dass so dünne Drähte, wie er sie zur Ueberleitung des Stromes auf den Bügel angewendet hat, keine für die Bewegung des schwer belasteten Bügels in Betracht kommende Wirkung auf diesen zu übertragen im Stande seien. Eines ist ohne weitere Ueberlegung einzusehen, dass wenn der Draht def vom Magneten abgestossen wurde, er, weil er sehr dünn und vollkommen biegsam war, durch die Abstossung gespannt werden und dann den drehbaren Bügel nach sich ziehen musste, wie er auch wirklich that.

Zweifelhafter könnte die Sache aussehen, wenn der Draht angezogen wurde, wo er sich ohne erheblichen Widerstand in irgend eine Curve zusammenbiegen konnte. Wir dürfen aber

wohl annehmen, dass er immer noch steif genug war, um durch die Anziehung des Magneten nicht bis zur Berührung an diesen 554 herangezogen zu werden. Wäre letzteres eingetreten, würde es Hr. Herwig wohl erwähnt haben. Ueber einen solchen Fall nun giebt das Princip von den virtuellen Geschwindigkeiten ganz bestimmte Auskunft. Dieses sagt bekanntlich aus, dass, wenn ein System von Massenpunkten unter der gleichzeitigen Einwirkung von inneren und äusseren Kräften im Gleichgewicht ist, die äusseren Kräfte sich für sich im Gleichgewicht halten müssen, wenn man sich das System in seiner Gleichgewichtstellung erstarrt denkt. Das System ist hier der Draht, die inneren Kräfte sind diejenigen seiner Elasticität, die äusseren sind die elektrodynamischen Kräfte und diejenigen, welche an den Befestigungspunkten auf seine beiden Enden ausgeübt werden. Da möglichst grosse Beweglichkeit des Drahtes dem Zwecke des Versuches am besten entspricht, nehme ich an, der Draht sei um seine beiden Endpunkte vollkommen frei drehbar gewesen. Alsdann wird jedes der Enden längs der Horizontalebene nur von einer Kraft, nicht von einem Kräftepaar afficirt werden können. Da die Resultante der elektrodynamischen Kräfte in diesem Falle eine solche ist, die die Mitte des Bogens *def* zur Axe hintreibt, so wird an jedem Ende des Bogens eine halb so grosse Kraftcomponente in paralleler, aber entgegengesetzter Richtung angreifen müssen. Ist der Bogen ein Halbkreis, wie in den vorliegenden Versuchen, so ist diese Richtung die der Tangente an den Enden des Halbkreises, und es folgt daraus, dass der Draht seinerseits auf den drehbaren Bügel eine Kraft in Richtung der Rotation ausübt, welche dem halben Betrage sämmtlicher auf den Bogen *def* in Richtung dieser Tangente ausgeübten Kraftcomponenten gleich ist; und zwar ist der Bogen dabei in derjenigen Lage zu nehmen, die er unter der Anziehung des Magneten angenommen hat.

Da Ampère's Gesetz und das Potentialgesetz für alle ponderomotorischen Wirkungen geschlossener Ströme gleiche 555 Consequenzen ergeben, so könnte es gleichgültig erscheinen, welches von beiden man acceptiren will, wenigstens so lange

über die Frage, welches von ihnen bei ungeschlossenen Strömen gelte, noch nicht durch Versuche entschieden ist. Ich hoffe übrigens bald im Stande zu sein, Versuche dieser Art zu vollenden. Inzwischen spricht für das Potentialgesetz nur die grössere Einfachheit und das grössere Gebiet seiner Geltung. Das Potentialgesetz braucht einen und denselben, verhältnissmässig einfachen mathematischen Ausdruck, um das ganze bisher experimentell gekannte Gebiet der Elektrodynamik, ponderomotorische und elektromotorische Wirkungen, zu umfassen, und im Gebiete der ponderomotorischen Wirkungen bringt es dieselbe grosse Vereinfachung und Uebersichtlichkeit hervor, welche die Einführung des Potentialbegriffs in die Lehre von der Elektrostatik und vom Magnetismus gebracht hat. Ich selbst kann dafür Zeugniss ablegen, da ich seit nunmehr dreissig Jahren nie ein anderes Grundprincip als das Potentialgesetz angewendet und nie eines andern bedurft habe, um mich in ziemlich labyrinthischen Aufgaben der Elektrodynamik und zuweilen doch auch auf vorher unbetretenem Boden zurecht zu finden.

Und selbst, wenn man das wohlbekannte Gebiet der Wirkungen geschlossener Ströme verlässt, und die Consequenzen des Gesetzes auf die Wirkungen der ungeschlossenen Ströme ausdehnt, trifft man auf Ergebnisse, die den bekannten Thatsachen sich anschliessen und keinen allgemeinen Naturgesetzen widersprechen. Namentlich lassen sich ohne Hülfshypothesen verhältnissmässig einfache Differentialgleichungen für die Bewegung der Elektricität in Leitern ableiten, von denen das zuletzt Gesagte gilt.

Dagegen braucht Hr. C. Neumann ein besonderes, nämlich Ampère's Gesetz für die ponderomotorischen Wirkungen, ein zweites für die Induction durch Bewegung, ein drittes davon verschiedenes für die Induction durch Aenderung der Stromstärke; und versucht man Differentialgleichungen für die Be-
556 wegung der Elektricität aus diesen Gesetzen zu ziehen, so ergeben sie, wie Hrn. W. Weber's Hypothese, labiles Gleichgewicht der Elektricität in Leitern, das heisst, sie treten in Widerspruch mit der allerbekanntesten Thatsache, dass die Elektricität in Leitern ruhen kann, wenn keine bewegenden

Kräfte auf sie wirken. Günstigsten Falls (das giebt auch Hr. C. Neumann in seiner letzten, oben citirten Veröffentlichung der Hauptsache nach zu) wird durch Einführung von Molecularkräften (welche die Gleichungen viel verwickelter machen würden) die Stabilität des Gleichgewichts sich retten lassen für Leiter von mässigen Dimensionen, nicht für beliebig grosse. Das sind die Gründe, warum mir das Potentialgesetz eine überwiegend grosse Wahrscheinlichkeit für sich zu haben scheint, und ich es nach dem bisherigen Stande unserer Kenntnisse für den sichersten Führer im Gebiete der Elektrodynamik, seine Entdeckung aber durch Hrn. F. E. Neumann, den Vater, stets für einen der glücklichsten und fruchtbarsten Gedanken gehalten habe, welchen die neuere mathematische Physik aufzuweisen hat.

Zusatz 1881: Von Hrn. F. Zöllner ist noch eine weitere Erwiderung in Berichten der Sächs. Ges. der Wiss. Februar 1876 (auch in Poggendorff's Annalen Bd. 158. S. 106) gegeben worden, auf die ich nochmals zu antworten nicht nöthig gefunden habe. Wieder werden Experimente ähnlicher Art, wie die oben besprochenen, vorgeführt, deren Erfolg nicht nur in keinem Widerspruche mit der Potentialtheorie steht, sondern aus dieser sogar leicht vorausgesagt werden konnte. Ich habe vorausgesetzt, dass jeder hinreichend unterrichtete Leser, dem es um Einsicht in die Sache zu thun ist, dies von selbst erkennen würde, und sich auch über die damit zusammenhängende literarische Polemik sein Urtheil bilden würde.

XXXIX.

Versuche über die im ungeschlossenen Kreise durch Bewegung inducirten elektromotorischen Kräfte.

Aus: Poggendorff's Annalen Bd. CLVIII. S. 87—105. — Monatsberichte der Berliner Akademie Juni 1875.

---

87 Ich habe der Akademie zu wiederholten Malen Bericht erstattet über die Ergebnisse meiner Untersuchungen, die sich auf die Theorie der Elektrodynamik bezogen. Ich hatte bei diesen Untersuchungen das Ziel verfolgt zu ermitteln, in wie weit diejenigen der bekannteren Theorien, welche überhaupt bestimmte und genaue quantitative Rechenschaft von den elektrodynamischen Phänomenen geben, mit dem Gesetz von der Erhaltung der Kraft in Uebereinstimmung sind, und wie weit sie übereinstimmende Folgerungen betreffs der beobachtbaren Erscheinungen geben, beziehlich unter welchen Bedingungen Abweichungen zwischen ihnen auftreten. Es erschien namentlich wünschenswerth solche Fälle der Abweichung herauszufinden, bei denen ausführbare Versuche für oder gegen die Folgerungen aus der einen oder anderen Theorie entscheiden konnten, um so über die Zulässigkeit dieser Theorien selbst eine Entscheidung zu gewinnen.

Genau quantitativ ermittelt waren bisher fast nur die
88 Wirkungen der in geschlossenen leitenden Kreisen verlaufenden Ströme und der auf solche wirkenden elektromotorischen und ponderomotorischen Kräfte elektrodynamischen Ursprunges. Die Magnete wirken dabei ebenfalls wie Systeme geschlossener elektrischer Ströme. Die gegenseitigen Einwirkungen solcher Ströme sind verhältnissmässig stark und dauernd, und deshalb

mit den uns zu Gebote stehenden Hülfsmitteln leicht und genau zu beobachten. Auch war schon eine Reihe von solchen Fällen experimentell untersucht worden, wo die Stromleiter zwar unterbrochen waren durch die dünne isolirende Schicht eines Condensators oder einer Leydener Flasche, aber immer nur unter Bedingungen, wo die elektrodynamische Wirkung der Unterbrechungsstelle gegen die der übrigen Theile der Leitung verschwand.

Die Grundlage aller quantitativ bestimmten Formulirungen der elektrodynamischen Gesetze findet sich ursprünglich in Ampère's glücklichen Gedanken die Fernwirkung eines geschlossenen linearen Stromleiters gleichzusetzen den magnetischen Fernwirkungen einer imaginären durch den Stromleiter begrenzten Fläche, deren Flächeneinheiten ein der Stromstärke proportionales magnetisches Moment haben. Diese Darstellung des Wirkungsgesetzes fasste in der That nur beobachtete Erscheinungen zusammen, ohne hypothetische Elemente hinzuzufügen. Ihre Uebereinstimmung mit den Thatsachen können wir als vollkommen gewährleistet durch eine grosse Anzahl der mannigfaltigsten Versuche und Messungen betrachten. Da die magnetischen Anziehungen und Abstossungen auf ein Potential zurückgeführt werden können, so konnte dies auch für die ponderomotorischen Wirkungen geschlossener Ströme aufeinander geschehen.

Die Gesetze der inducirten Ströme bei Bewegung der Leiter ergaben sich aus denen der ponderomotorischen Kräfte mittels des von Lenz und Joule aufgestellten Gesetzes, wonach diese Ströme immer der Bewegung, durch welche sie hervorgerufen sind, entgegenwirken, und wonach ihre elektromotorische Kraft andererseits gleich Null ist bei solchen Be- 89
wegungen, wo die Arbeit der ponderomotorischen Kräfte zwischen dem inducirenden und dem von einem constanten Strome durchflossenen inducirten Leiter gleich Null wäre. Für die Induction durch Aenderung der Stromstärke liess sich der Werth herleiten aus der Beobachtung, dass der gesammte Inductionsstrom (sein Zeitintegral) bei Oeffnung des inducirenden Stromes ebenso gross ist, wie bei der Ueberführung seines Leiters in unendliche Entfernung.

Aus diesen Thatsachen, die durch alle Beobachtungen der Folgezeit nur bestätigt worden sind, leitete Hr. F. E. Neumann sein bekanntes Gesetz für die Grösse der inducirten elektromotorischen Kräfte her; indem er das Ampère'sche Gesetz als den quantitativen Ausdruck für die ponderomotorischen Kräfte zu Grunde legte. Soweit also dieses durch Beobachtungen wirklich bestätigt war, so weit galten auch die daraus abgeleiteten Gesetze der inducirten elektromotorischen Kräfte. Dieses durch Beobachtungen gesicherte Gebiet umfasste aber, wie gesagt, nur die gegenseitige Wirkung geschlossener Ströme.

Nun lag es aber in der Natur der Sache, dass man bei den Wirkungen, die ein so zusammengesetztes und variables Gebilde, wie ein elektrischer Stromkreis, hervorbringt, nicht stehen bleiben konnte. Man musste versuchen, die Wirkungen des Ganzen in die Wirkungen seiner einzelnen Elemente aufzulösen. Ausserdem existiren Bewegungen der Elektricität bekanntlich auch in nicht zum Kreise geschlossenen Leitern, und solche haben unzweifelhaft elektrodynamische Wirkungen. Festgestellt ist die Existenz solcher Wirkungen wenigstens schon für die beinahe zum Kreise geschlossenen Entladungsdrähte der Leydener Flaschen. Solche geben elektromagnetische Ablenkungen der Magnetnadel und inducirte Ströme, sogenannte Nebenströme. Aber schon an diesen gaben sich die grossen Schwierigkeiten, mit denen die Beobachtung der Wirkungen so flüchtiger Ströme verknüpft ist, zu erkennen.

90 Sobald man aber den Versuch macht aus der Wirkung der geschlossenen Stromkreise Rückschlüsse zu ziehen auf die Wirkungen, welche die einzelnen Theile dieser Stromkreise aufeinander ausüben, ist man gezwungen Hypothesen zu machen, für welche bisher die experimentelle Prüfung fehlte.

Von den verschiedenen elektrodynamischen Theorien, welche seit Ampère's Arbeiten aufgestellt worden sind, musste man vor allen Dingen verlangen, dass sie in Bezug auf die gegenseitigen Wirkungen geschlossener Ströme aufeinander Folgerungen geben, die mit Ampère's Theorie und den von Neumann sen. daraus hergeleiteten Inductionsgesetzen übereinstimmen, weil die Uebereinstimmung der letzteren mit den

Thatsachen hinreichend verbürgt erschien. Eine Theorie, welche das nicht leistete, konnte überhaupt nicht gebraucht werden. In der That entsprechen nun aber dieser Forderung Theorien sehr verschiedener Art, von denen ich hier nur 1) Ampère's Annahme anziehender oder abstossender Kräfte zwischen den Stromelementen, 2) Faraday's und Grassmann's Annahme von Kräften, welche immer senkrecht gegen das Stromelement wirken, 3) Hrn. F. E. Neumannn's Potentialgesetz, 4) Hrn. W. Weber's Annahme anziehender oder abstossender Kräfte zwischen den Elektricitäten selbst, deren Grösse nicht bloss von der Entfernung, sondern auch von der Geschwindigkeit und Beschleunigung abhängig ist, 5) eine ähnliche Annahme von Gauss, die nachher Riemann wieder aufgenommen hat, mit etwas abweichender Form des Gesetzes, ferner 6) Hrn. C. Neumann's Annahme eines sich mit messbarer Geschwindigkeit im Raum ausbreitenden Potentiales, und endlich 7) Hrn. Cl. Maxwell's Zurückführung der elektrodynamischen Wirkungen auf magnetische und diëlektrische Polarisation des raumfüllenden Aethers, welche eine mathematische Durcharbeitung Faraday'scher Ansichten giebt, als die bekannteren nennen will.

Diese verschiedenen Theorien unterscheiden sich durch
ihre verschiedenen Annahmen über die Art der Wirkung von 91
Stromelement zu Stromelement, oder auch von elektrischen Massentheilchen zu Massentheilchen, und es fallen deshalb ihre Folgerungen über die Wirkungen ungeschlossener Ströme zum Theil verschieden aus, während Uebereinstimmung herrscht, soweit nur geschlossene in Betracht kommen. Eben deshalb ist aber eine Entscheidung zwischen denselben nur zu gewinnen durch die experimentelle und theoretische Untersuchung ihrer Folgerungen für ungeschlossene Ströme, und alle Versuche, dies durch Untersuchungen an geschlossenen Strömen leisten zu wollen, sind principiell falsch angelegt.

Da die Schwierigkeiten der experimentellen Ausführung hauptsächlich durch die kurze Dauer der zu einem Ende der Leitung führenden Ströme bedingt sind, welche letztere nur so lange andauern, bis die zur Ladung der Oberfläche des betreffenden Leiters nöthige Elektricitätsmenge herbeigeführt ist, so war eher Aussicht über diejenigen Theile der Kräfte Auf-

schluss zu erhalten, welche der Wirkung von Stromelementen auf Stromenden entsprechen, als über diejenigen Theile, welche von Stromende auf Stromende wirken. Denn im ersteren Falle hat man es doch nur mit einem dieser sehr flüchtigen Stromendtheile zu thun, während die mitwirkenden Stromelemente einem starken dauernden Strome angehören oder auch durch einen starken Magneten vertreten werden können.

In der That besteht in dieser Beziehung eine Differenz zwischen dem von Hrn. F. E. Neumann[1]) für geschlossene Ströme aufgestellten Potentialgesetze, dessen unbeschränkter Anwendung auch auf ungeschlossene Ströme aber nach unserer bisherigen Kenntniss der Thatsachen nichts im Wege stand, wie ich mich nachzuweisen bemüht habe, und zwischen dem Ampère'schen Gesetze andererseits, und derjenigen Form des
92 Inductionsgesetzes, welches ebenfalls und schon früher von Hrn. F. E. Neumann[2]) direct aus dem Ampère'schen Gesetze abgeleitet worden war, und welches übrigens mit dem aus der Weber'schen Hypothese über das Grundgesetz der elektrischen Kräfte hergeleiteten übereinstimmt, sowie mit den Gesetzen, welche Hr. C. Neumann, Sohn, nach einander von verschiedenen Hypothesen ausgehend abgeleitet hat.

Wenn man aus dem Potentialgesetze die Kräfte herleitet, die von jedem Punkt des einen Leiters auf jeden Punkt des anderen wirken müssten, um den in dem Potential gegebenen Betrag der Arbeit zu leisten, so erhält man ausser den ponderomotorischen Kräften, welche von Stromelement zu Stromelement wirken, und die mit den von Ampère angenommenen vollkommen übereinstimmen, noch solche, die zwischen den Stromelementen und Stromenden wirken, deren Intensität der Geschwindigkeit proportional ist, mit der die Dichtigkeit der Elektricität an dem Stromende wächst, ferner proportional der nach der Verbindungslinie beider gerichteten Stromcomponente in dem Stromelemente, und umgekehrt proportional der

1) Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme (der Akademie vorgetragen am 9. August 1847). Berlin, Reimer 1848.

2) Die mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Ströme. Schriften der Berliner Akad. der Wiss. von 1845. Berlin, Reimer 1846.

Entfernung zwischen beiden. Die Kraft ist anziehend, wenn die in dem Stromende sich anhäufende Elektricität in dem Stromelemente von jenem wegfliesst.

Hrn. Grassmann's ponderomotorisches Gesetz enthält die Kraft, welche Stromenden auf Stromelemente, nicht aber die, welche die letzteren auf erstere ausüben. Darin ist also die Gleichheit der Action nicht gewahrt. Das Grassmann-sche Gesetz fällt übrigens seinem Resultat nach mit Faraday's Regel zusammen, wonach die ponderomotorische Kraft auf Stromelemente immer senkrecht zu ihnen selbst und zu den Magnetkraftlinien gerichtet ist. Nur sind in Faraday's Vorstellung und in der sich ihm anschliessenden von Cl. Maxwell die Stromenden durch die Annahme beseitigt, dass von jedem
Stromende aus sich elektrische Bewegungen in das isolirende 93
Medium hinein fortpflanzen, welches die Leiter voneinander trennt.

Ich habe in meiner, der Akademie im Februar 1873 gemachten Mittheilung schon erwähnt, dass man diese vom Potentialgesetze geforderten ponderomotorischen Wirkungen auf Stromenden von denen, welche die Stromelemente erleiden, würde isoliren können, wenn man als Vertreter der geschlossenen Stromsysteme starke in sich selbst zurücklaufende ringförmige Magnete ohne Pole anwendet. Diese wirken auf andere Magnete und geschlossene Ströme gar nicht ponderomotorisch ein, wohl aber würden sie nach dem Potentialgesetze auf Stromenden einwirken müssen, beziehlich letztere auf die ringförmigen Magnete, und zwar so, dass wenn der Magnet durch ein System von Kreisströmen ersetzt gedacht wird, er diejenige Seite des Ringes dem Stromende zuzuwenden streben wird, in welcher die dem Stromende zufliessende Elektricität von der Axe des Ringes wegfliesst.

Es erschien möglich auf einem von mir schon in Borchardt's Journal für Mathematik Bd. 78, S. 281 angedeuteten Wege Stromenden von hinreichender Wirksamkeit zu erhalten mittels elektrischer Convection. Ich verstehe hierunter entsprechend dem Gebrauche, der von diesem Worte in der Wärmelehre gemacht wird, die Fortführung der Elektricität mittels der Fortbewegung elektrisch geladener Körper. Das Potentialgesetz schreibt elektrodynamische Wirkungen nur der

in ponderablen Trägern sich bewegenden Elektricität zu, nicht aber der convectiv fortgeführten. Es war also zu versuchen, ob eine Elektricität ausströmende Spitze die Wirkung eines Stromendes zeige, da die durch die Fortbewegung der elektrisch abgestossenen Luft fortgeführte Elektricität möglicher Weise nicht als elektrodynamische Fortsetzung der durchströmten Leitung in Betracht kam.

Versuche dieser Art übernahm Hr. N. Schiller während
94 des vorigen Sommers im physikalischen Laboratorium der hiesigen Universität auszuführen. Ein geschlossener Stahlring wurde mit einem Leitungsdrahte umwickelt und magnetisirt. Die Stärke der entstandenen Magnetisirung des Ringes konnte durch den Inductionsstrom bestimmt werden, den derselbe in einer Anzahl anderer, vom ersten Drahte getrennter Drahtwindungen beim Magnetisiren gab. Der Ring wurde an einem langen Coconfaden aufgehängt in einem Gehäuse, welches äusserlich ganz mit Stanniol überdeckt wurde, um elektrostatische Anziehungskräfte auszuschliessen. Auch das Glas, durch welches ein am Magneten befestigter Spiegel beobachtet werden konnte, war durch ein Metallgitter bedeckt. Durch eine von aussen genäherte metallene Spitze strömte die gesammte durch eine schnell gedrehte Holtz'sche Maschine entwickelte Elektricität in die Luft aus. Die Spitze wurde derjenigen Seite des Kastens gegenübergestellt, wo sich innen der eine verticale Theil des Ringes befand. Der Ring hätte unter diesen Umständen eine Ablenkung erfahren müssen, wenn die Spitze als Stromende im Sinne der Potentialtheorie wirkte. Das Resultat der so angestellten Versuche war aber durchaus negativ. Hr. N. Schiller hat seitdem diese Versuche in Moskau mit vollkommeneren Apparaten fortgesetzt unter Bedingungen, wo die Grösse der Magnetisirung des Ringes und die Intensität des von der Elektrisirmaschine gelieferten Stromes genau bestimmt, und nachgewiesen werden konnte, dass die nach dem Potentialgesetz zu erwartende Ablenkung gross genug sein würde, um sicher beobachtet werden zu können, wenn sie existirte. Die Resultate waren ebenso rein negativ. Ich erlaube mir am Schlusse dieses Aufsatzes die darauf bezüglichen Mittheilungen aus einem an mich gerichteten

Briefe des genannten Beobachters beizufügen. Eine ausführlichere Beschreibung dieser Versuche behält sich derselbe selbst zu geben vor.[1])

Daraus ist also zu schliessen, dass entweder die vom Po- 95
tentialgesetze angezeigten Wirkungen der Stromenden nicht existiren, oder dass ausser den von diesem Gesetze angezeigten elektrodynamischen Wirkungen auch noch solche der convectiv fortgeführten Elektricität bestehen, dass das Potentialgesetz also unvollständig sei, wenn man in ihm nur Rücksicht nimmt auf Fernwirkungen der in den Leitern fortströmenden Elektricität.

Andererseits hängt mit dieser Differenz in der Bestimmung der ponderomotorischen Kräfte eine solche in der Bestimmung der inducirten elektromotorischen Kräfte in ungeschlossenen Leitern zusammen. Wenn ein Magnet oder ein System geschlossener Ströme inducirend einwirkt auf einen ungeschlossenen linearen Leiter ab, welcher in die Lage $\alpha\beta$ fortgerückt wird, so ist nach dem von Hrn. Neumann senior aus dem Ampère'schen hergeleiteten Inductionsgesetze die gesammte inducirte von α nach β treibende elektromotorische Kraft gleich dem Potential der inducirenden Ströme (oder Magnete) auf einen Stromkreis, in dem die Einheit des Stromes von α längs der Lage $\alpha\beta$ nach β, von β längs des vom Endpunkte b beschriebenen Weges nach der Anfangslage von b, von da längs der Anfangslage ab des Leiters nach a und endlich längs des vom Punkte a beschriebenen Weges nach α circulirt. Mit dieser Regel fällt in den Resultaten das Faraday'sche Gesetz zusammen, wonach die Stärke der Induction von der Anzahl der durchschnittenen Magnetkraftlinien abhängt.

Folgen dagegen die ponderomotorischen Wirkungen dem Potentialgesetze, so sind in der genannten Berechnung wegzulassen diejenigen Theile des Potentials, die sich auf die beiden Wege $a\alpha$ und βb beziehen; es ist vielmehr nur die Differenz des elektrodynamischen Potentials für die Endlage $\alpha\beta$ minus

1) Diese ist gegeben in Pogg. Annalen Bd. 159. S. 456 und 537.

dem für die Anfangslage *ab* zu nehmen. Es ergiebt sich hieraus, dass ein Unterschied des Inductionsgesetzes auch für ungeschlossene Leiter nur dann besteht, wenn mindestens das eine Leiterende selbst fortbewegt wird.

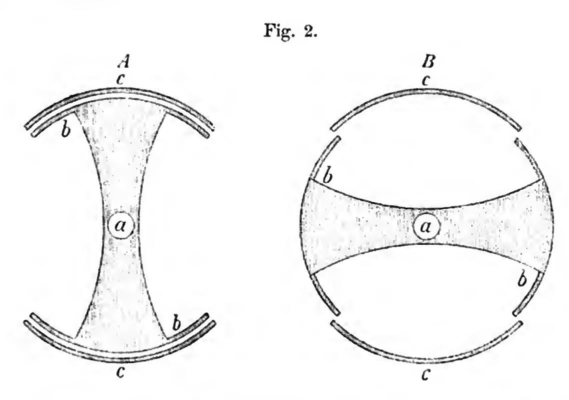
96 Denken wir uns den Endpunkt *a* des Leiters (*ab* Fig. 1) festliegend, *b* aber im Kreise um *a* drehbar, ferner die wirkenden Magnete und Stromtheile so angeordnet, dass die ersteren Rotationskörper bilden, deren magnetische Axe, wie die Axe ihrer Form mit der auf dem Mittelpunkte des Kreises errichteten Normale seiner Ebene zusammenfällt, während die Stromkreise zu dieser Axe concentrische Kreise bilden. Bei solcher Anordnung ist die relative Lage des Radius $a\beta$ zu den Magneten oder Strömen genau dieselbe wie *ab*; das elektrodynamische Potential hat in beiden Fällen den gleichen Werth, nämlich Null, und das Potentialgesetz würde die Folgerung ergeben, dass in diesem Falle keine elektromotorische Kraft während der Drehung des Radius *ab* in die Lage $a\beta$ längs desselben wirkt.

Fig. 1.

Dagegen ist klar, dass der Leiter *ab* bei seiner Fortbewegung Magnetkraftlinien, die der Axe des Kreises parallel gehen, durchschneidet. Und entsprechender Weise kommt nach der von Neumann gegebenen Regel auch derjenige Theil des Potentials in Betracht, der sich auf den vom Punkte *b* beschriebenen Weg, d. h. den Kreisbogen $b\beta$ bezieht. Dieser Theil des Potentials hat in der That einen von Null verschiedenen Werth; geschieht die Strömung der Kreisströme im Sinne des neben gesetzten Pfeiles und der Bewegung von *b* nach β, so würde das Potential positiv sein, also die Induc-
97 tionskraft von *a* nach β hin wirken müssen. Ein so gerichteter Strom würde nach Ampère's Gesetz der Bewegung entgegen wirken.

Tritt an dem Ende b des rotirenden Radius schleifende Berührung mit einem feststehenden Leiter ein, wie in der Lage $a\gamma$ mit c, so würde das Potentialgesetz genau dieselbe inducirte Kraft anzeigen, da dann die Leitung a über γ bis c geschlossen wäre. In diesem Falle wäre aber nach dem Potentialgesetze die ganze elektromotorische Kraft in den ihre Richtung schnell verändernden Stromfäden der Gleitstelle zu suchen. Die Einführung einer Gleitstelle giebt uns bei einem solchen Versuche also immer die Gelegenheit unabhängig von dem Streit der Theorien die durch die betreffende Bewegung im geschlossenen Kreise erzeugbare elektromotorische Kraft zu bestimmen.

Fig. 2.



Diesen Theil der Versuche habe ich selbst ausgeführt. Zu dem Ende habe ich das Ende b des rotirenden Leiters mit einer Condensatorplatte versehen, welche während seiner Rotation einer anderen ähnlichen nahe gegenübertrat. Schematisch ist dies dargestellt in der Fig. 2 *A*. Es ist a wieder der Durchschnitt der Axe, welche verticale Richtung hat, b sind die cylindrischen beweglichen Condensatorplatten, c die feststehenden. Fig. 2 *A* zeigt dieselben Theile nach einer 93
Drehung um einen rechten Winkel. Die Platten bb und cc sind Quadranten zweier mit der Rotationsaxe a coaxialen Cylinderflächen. Der radiale Träger bb liegt zwischen den Polen eines

starken Elektromagneten. Das untere Ende der Axe *a* ruht auf dem unteren Pole desselben, das obere Ende reicht durch eine Durchbohrung des oberen Theiles des Elektromagneten hinaus bis in einen von magnetischen Richtkräften verhältnissmässig freien Raum und trägt dort einen Commutator, mittels dessen die Platten *cc* während der Stellung *A* zur Erde abgeleitet, in der Stellung *B* aber mit der isolirten Platte eines Condensators nach Kohlrausch verbunden werden. Werden die Platten *bb* durch magnetische Induction positiv geladen, so laden sich die Platten *cc* in der Stellung *A* von der Erde aus negativ, und zwar wirkt der Apparat hierbei wie ein Condensator, sodass eine mässige elektromotorische Kraft ein verhältnissmässig bedeutendes Quantum Elektricität anhäuft. Gehen dann die Platten in die Stelle *B* über, so wird die gesammelte negative Elektricität, deren Potential durch die Entfernung der positiven Platten *bb* erheblich gesteigert ist, in Kohlrausch's Condensator übergeführt, und häuft sich in diesem an, bis dessen isolirte Platte selbst das Potential der Platten *cc* in der Stellung *B* angenommen hat.

Die Ladung von Kohlrausch's Condensator wird dann an einem Thomson'schen Quadrantelektrometer gemessen.

Ich übergehe hier die ausführliche Erörterung der Fehlerquellen, die sich geltend machen konnten und zum Theil gemacht haben, ehe ich die Mittel zu ihrer Beseitigung fand. Ich will nur kurz bemerken, dass nach jeder einzelnen Beobachtung die Pole des Magneten gewechselt wurden, wodurch der Einfluss aller Fehlerquellen von constanter Richtung beseitigt wird, dass ferner zwischen den Versuchen mit schneller Drehung immer solche mit langsamer Drehung angestellt wurden, um den Einfluss der durch den magnetisirenden Strom her-
39 vorgebrachten elektrostatischen Ladungen zu eliminiren. Da hier doppelte Condensation wirkt, so sind ausserordentliche kleine elektrische Einflüsse im Stande Ladungen hervorzubringen. Ich behalte die ausführliche Beschreibung der Versuche und Methoden einem anderen Orte vor.

Es gelang mir schliesslich bei grosser Rotationsgeschwindigkeit und mit starken magnetisirenden Strömen Ablenkungen am Elektrometer bis zu 67 Theilstrichen zu erzielen, welche

mit der Richtung der Magnetisirung und mit der Richtung der Bewegung ihr Zeichen wechselten, und an deren Entstehung aus elektrodynamischer Induction ich keinen Zweifel mehr hegen konnte. Die inducirte elektromotorische Kraft, welche den rotirenden Condensator lud, entspricht $\frac{1}{31}$ von der eines Daniell'schen Elementes.

Andererseits konnten die Verbindungen mit dem Commutator auch so hergestellt werden, dass die feststehenden Platten *c* in der Stellung *A* mit Kohlrausch's Condensator verbunden wurden, in der Stellung *B* mit der Erde. Dann wurde in der ersten Stellung dem grossen Condensator so lange Elektricität entzogen, und in der zweiten Stellung an die Erde abgegeben, bis seine Potentialfunction den Werth angenommen hatte, der den Platten *c* bei dem Elektricitätsquantum Null zukam, wenn sie der vertheilenden Wirkung der bewegten und elektrodynamisch inducirten Platten ausgesetzt waren. Die dabei entstehende Ladung ergab nach Entfernung der Platten des grossen Condensators voneinander am Elektrometer die Ablenkung 12,42, während 13,8 derjenige Werth gewesen wäre, der sich aus der bei der ersten Stellung des Commutators beobachteten Ablenkung von 67 nach der Capacität des Condensators hätte ergeben müssen. Letztere war durch Ladung des rotirenden Condensators mittels eines Daniell'schen Elementes bestimmt worden.

Die beschriebenen Versuche zeigen zunächst, dass die
Platten des rotirenden Condensators durch eine inducirte elek- 100
tromotorische Kraft geladen werden, auch wenn keine Gleitstelle vorhanden ist.

Es wäre nun noch zu fragen, ob die ganze elektromotorische Kraft, die in einem durch eine Gleitstelle geschlossenen Kreise wirkt, auch in dem ungeschlossenen Kreise thätig war. Diese Frage war bei der Anfertigung des Apparates vorgesehen worden, und ich hatte deshalb an dem oberen Rande der festen Platten *cc* verstellbare Federn anbringen lassen, welche bei passender Einstellung metallische Stifte, die am oberen Rande der beweglichen Platten *bb* angebracht waren, berühren konnten. Während dieser Berührung war die inducirte Leitung zwischen ruhenden Endpunkten, nämlich der Axe des rotirenden Theils und den festen Platten *c* geschlossen, für welchen

Fall die zweifelhaften Punkte der Theorie keinen Einfluss haben. Von *c* aus konnte direct der Kohlrausch-Condensator geladen werden. Die Ladung war unter übrigens gleichen Umständen etwas grösser, nämlich 18,71, als im letztbeschriebenen Falle, wo sie nur 13,42 betrug. Indessen berechtigt dies nicht auf eine entsprechende Grösse der elektromotorischen Kraft in der Contactstelle zu schliessen. Denn es ergab sich, dass die elektromotorische Kraft nicht dieselbe blieb, wenn die Gleitstelle in verschiedener Höhe der rotirenden Platten angebracht wurde, was geschehen konnte, nachdem man eine der Platten *c* entfernt hatte. In mittlerer Höhe der Gleitstelle, der Mitte beider Magnetpole gegenüber, war die elektromotorische Kraft am kleinsten, etwa nur $\frac{5}{7}$ derjenigen an der oberen Anschlagstelle, was sich dadurch erklärt, dass die magnetischen Kraftlinien am Orte der Condensatorplatten ein wenig nach aussen gebaucht waren, und deshalb zum Theil die Condensatorplatten selbst schnitten, und in ihnen schwache elektromotorische Kräfte von der Mitte zum oberen und unteren Rand hin inducirten. Der obige Ausschlag von 18,17 für die Gleitstelle am oberen Rande, reducirte sich also auf 13,36 für
101 eine Gleitung an der Mitte der beweglichen Platten. Bei den Versuchen ohne Gleitstelle kommt natürlich der Mittelwerth der elektromotorischen Kraft in Betracht, für die ganzen condensirenden Flächen berechnet. Dass nun hier die beobachtete Ablenkung 13,42 so wenig grösser ist, als die an der mittleren Gleitstelle wirkende Kraft 13,36 erklärt sich dadurch, dass im ersteren Falle das Potential der Flächen von *b* nur durch Vertheilung auf die Platten *c* wirkte, und die Zahl 13,36 deren Potentialwerth misst, während ihr Elektricitätsquantum gleich Null war. Unter diesen Umständen ist das durch Vertheilung erzeugte Potential nothwendig etwas kleiner, als das die Vertheilung erzeugende.

Bestätigt wurde diese Ansicht durch andere Versuche, bei denen ich nach Beseitigung der einen Platte *c* das Metallgestell des Magneten und die mit ihm verbundene Batterie isolirte und nur durch Drähte, die in der Mitte der unbedeckten rotirenden Platte *b* schleiften, die genannten Leiter mit der Erde verband. Die gebliebene eine Platte *c* wurde in der

Stellung *A*, wo sie durch *b* gedeckt war, mit der Erde, in der Stellung *B* ungedeckt mit dem Kohlrausch-Condensator verbunden. Sie erhielt eine schwache Ladung von der Grösse 5,3 und von derselben Art, als wäre die rotirende Axe nicht durch die Gleitstelle, sondern von ihren Spitzen aus zur Erde abgeleitet gewesen, wie in den erst beschriebenen Versuchen. Daraus ging unzweideutig hervor, dass die in der Gleitstelle selbst vielleicht vorhandene elektromotorische Kraft jedenfalls kleiner war, als die Differenz zwischen dem Mittelwerthe und dem Minimalwerthe der bei den verschiedenen Höhen der Gleitstelle in sämmtlichen bewegten Theilen wirkenden inducirten Kraft. Wenn also überhaupt ein endlicher Theil der elektromotorischen Kraft in der Gleitstelle seinen Sitz hat, so ist derselbe verhältnissmässig sehr klein ($\frac{1}{23}$ der Gesammtkraft) und bei der bisher erreichten Genauigkeit dieser Messungen den Fehlerquellen gegenüber noch nicht von solcher Grösse, dass ich seine Existenz verbürgen möchte.

Es folgt nun hieraus, dass die Potentialtheorie, wenn in 102
ihr nur die in den Leitern vorkommenden elektrischen Bewegungen und deren Fernwirkungen berücksichtigt werden, mit den Thatsachen in Widerspruch tritt. Die beschriebenen Versuche fügen sich dagegen hinreichend gut unter das von F. E. Neumann direct aus der Ampère'schen Hypothese abgeleitete Gesetz. Dass übrigens die Ampère'sche Hypothese auch für die Inductionen zwischen je zwei ungeschlossenen Leitern mit dem Gesetz von der Erhaltung der Kraft nach jeder Richtung hin in Uebereinstimmung gebracht werden kann, habe ich in meinem dritten Aufsatze über die Theorie der Elektrodynamik (Journal für Mathematik Bd. 78) nachgewiesen.[1])

1) Ich brauche hier wohl kaum daran zu erinnern, dass ich das Potentialgesetz bisher zwar gegen nichtige Einwände vertheidigt habe, aber doch immer nur als ein solches, über dessen Richtigkeit endgiltig nur neue Versuche entscheiden könnten. Die Punkte zu finden, wo das Experiment angreifen könne, war der ausgesprochene Zweck meiner früheren Arbeiten, der nun in einem wesentlichen Theile erreicht ist. So weit die einfachere Gesetzmässigkeit einer solchen Theorie bei Mangel entscheidender Thatsachen grössere Wahrscheinlichkeit giebt, schien diese mir allerdings auf Seiten des Potentialgesetzes zu liegen, und deshalb erschien letzteres mir besonders beachtenswerth.

Aber auch das Potentialgesetz kann den hier gewonnenen Resultaten entsprechend ergänzt werden, wenn man mit Faraday und Maxwell annimmt, dass auch in den Isolatoren elektrische Bewegungen mit elektrodynamischer Wirksamkeit eintreten können, wodurch dieselben diëlektrisch polarisirt werden. Ich habe diese Hypothese schon am Schluss meiner ersten elektrodynamischen Abhandlung im 72. Bande des Journals für Mathematik mit dem Potentialgesetz in Verbindung gebracht, mit Beziehung auf die elektrischen Bewegungen in ruhenden Leitern und Isolatoren. Die Theorie von Hrn. Cl. Maxwell ergiebt sich aus dieser Modification des Potentialgesetzes, wenn man die Constante der diëlektrischen Polarisation (ε in meiner Abhandlung) unendlich gross werden lässt.
103 Bei diesem Grenzfall würden überhaupt keine ungeschlossenen elektrischen Ströme mehr bestehen, wie auch Hr. Maxwell ausdrücklich hervorgehoben hat, indem jede elektrische Bewegung in Leitern, die zu einer Anhäufung der Elektricitäten an ihrer Oberfläche führt, sich in den umgebenden Isolatoren als äquivalente Bewegung entstehender oder vergehender diëlektrischer Polarisation fortsetzen würde.

Ich behalte mir vor, die vollständige mathematische Ausführung der Principien für die bei Bewegung der Leiter und Isolatoren eintretenden ponderomotorischen und elektromotorischen Wirkungen, auf Grundlage der oben bezeichneten Annahmen an einem anderen Orte zu geben und dadurch die Verbindung zwischen der Potentialtheorie und der Maxwell'schen vollständig herzustellen. Hier wird es genügen, in Bezug auf die vorbeschriebenen Versuche folgendes anzuführen.

Denkt man sich zwischen den beiden aneinander vorbeigleitenden Condensatorplatten die Schicht der isolirenden Luft (beziehlich des Aethers) in kleine Prismen zerschnitten, die in einem gegebenen Augenblicke senkrecht zu den Condensatorflächen stehen, dann aber sich mit den Luftschichten verschieben, so ist jedes dieser Prismen in einer Bewegung begriffen, durch welche es in tangentiale Richtung überzugehen und in dieser Richtung sich zu verlängern strebt, sodass es sich der zugewendeten Seite der um den Elektromagneten circulirenden Kreisströme parallel streckt. In einem Drahtstücke, was

diese Bewegung macht, würde nach dem Potentialgesetze eine elektromotorische Kraft wirken gleich derjenigen, die wir bei den Versuchen mit der Gleitstelle finden. Das Gleiche würde bei diëlektrischer Polarisationsfähigkeit der Luftprismen in diesen geschehen, es würden sämmtliche Molekeln der Prismen nach der einen Richtung hin positiv, nach der anderen Richtung hin negativ geladen werden, und dem entsprechend würde in der der positiven Seite der Molekeln gegenüberstehenden Condensatorfläche negative Elektricität angehäuft 104
werden, ihrer negativen Seite gegenüber positive. Somit würden die Metallflächen sich elektrisch laden können, ohne dass eine elektrodynamisch inducirte Kraft den metallischen Leiter selbst zu treffen brauchte.

Setzen wir das elektrische Moment in der Volumeneinheit der Luft in Richtung der x gleich $\mathfrak{x}$ und bezeichnen wir mit $\mathfrak{X}$ die in gleicher Richtung wirkende elektromotorische Kraft, und mit φ die elektrische Potentialfunction im Innern des Diëlektricum (wie in meiner Abhandlung im 72. Bande des Journals für Mathematik), so würde zwischen den Condensatorplatten, da wo die x Axe zu ihnen normal ist, zu setzen sein:

$$\mathfrak{x} = \varepsilon\left(\mathfrak{X} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right).$$

Dabei würde gegen die Grenzen der Luftschicht in Richtung der positiven x die elektrische Grenzschicht von der Dichte $+\mathfrak{x}$ hingeschoben sein, in der Richtung der negativen x die Schicht $-\mathfrak{x}$. Wenn nun an beiden Metallflächen selbst sich die elektrischen Dichtigkeiten $+e$ und $-e$ gesammelt haben, so ist nach bekannten Sätzen

1) an der Seite des positiven $\mathfrak{x}$:

$$-4\pi(\mathfrak{x} + e) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

oder

$$+4\pi e = (1 + 4\pi\varepsilon)\frac{\partial \varphi}{\partial x} - 4\pi\varepsilon\mathfrak{X};$$

2) an der Seite der negativen x ebenso:

$$+4\pi(\mathfrak{x} + e) = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

oder

$$-4\pi e = (1 + 4\pi\varepsilon)\frac{\partial \varphi}{\partial x} - 4\pi\varepsilon\mathfrak{X}.$$

Wenn nun die beiden Condensatorflächen übrigens durch eine nicht von inducirten Kräften getroffene metallische Leitung zusammenhingen, wie dies nach den Annahmen der Potentialtheorie in unseren Versuchen der Fall war, so wäre φ in
105 beiden Condensatoren gleich, folglich in ihrem engen Zwischenraume $\partial\varphi/\partial x = 0$, und die gebundene Elektricität:

$$e = -\varepsilon\mathfrak{X}.$$

Wenn dagegen nach den Annahmen der Ampère'schen Theorie die gesammte elektromotorische Kraft $\mathfrak{X}h$ in dem metallischen Kreise wirkte, so wäre der Unterschied der Potentiale an beiden Flächen gleich $-\mathfrak{X}h$ zu setzen, also im Zwischenraume:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\mathfrak{X},$$

wobei h den Abstand beider Flächen bezeichnet, und:

$$e = -\left(\frac{1}{4\pi} + \varepsilon\right)\mathfrak{X}.$$

Ist ε sehr gross, so werden beide Werthe merklich gleich, das heisst, dann würde auch unter Annahme des Potentialgesetzes die elektrische Ladung nahehin so gross werden, als sie es nach dem Ampère'schen sein müsste, sowie es in unseren Versuchen in der That der Fall war. Ist ε unendlich gross, so würde jeder Unterschied zwischen beiden Fällen schwinden. Dass daraus nicht geschlossen werden dürfte, dass auch die Ladungen unendlich gross werden, weil dann andere Bestimmungen der elektrischen Maasseinheiten nöthig werden, habe ich schon in meiner mehrerwähnten Abhandlung erörtert.

Die Entscheidung zwischen den beiden noch übrig bleibenden Theorien, deren eine aus der Ampère'schen Hypothese abgeleitet ist und nur Fernwirkungen von Leiter zu Leiter berücksichtigt, und andererseits der Maxwell'schen (beziehlich dem die Isolatoren mitberücksichtigenden Potentialgesetz) wird wohl zunächst durch Untersuchung der auf die Isolatoren ausgeübten elektrodynamischen Wirkungen gewonnen werden müssen.

XL.

Bericht betreffend Versuche über die elektromagnetische Wirkung elektrischer Convection,

ausgeführt von Hrn. **Henry A. Rowland.**

Aus: Poggendorff's Annalen Bd. CLVIII. S. 487—493. — Monatsberichte der Berliner Akademie März 1876.

Ich verstehe unter elektrischer Convection die Fortführung 487
von Elektricität durch Bewegung ihrer ponderablen Träger. Ich habe in meinen letzten Arbeiten über die Theorie der Elektrodynamik [1]) schon Versuche vorgeschlagen, die dann von Hrn. N. Schiller ausgeführt worden sind, bei denen die Frage in Betracht kam, ob elektrische Convection elektrodynamisch gleichwerthig sei der Strömung der Elektricität in einem Leiter, wie das die Theorie von Hrn. W. Weber annimmt. Die gedachten Versuche hätten möglicher Weise eine Entscheidung gegen die Existenz einer solchen Wirkung geben können; das thaten sie nicht, aber durch dieses negative Resultat wurde die Existenz der fraglichen Wirkung andererseits auch noch nicht erwiesen. Hr. Rowland hat nun eine Reihe directer Versuche im physikalischen Laboratorium der hiesigen Universität ausgeführt, welche den positiven Beweis geben, dass auch die Bewegung elektrisirter ponderabler Körper elektro- 488
magnetisch wirksam ist. Ich bemerke dabei, dass derselbe den Plan für seine Versuche schon gefasst und vollständig überlegt

---

1) Monatsberichte der Akademie vom 17. Juni 1875, S. 425. (Annal. Bd. 158, S. 94. — Siehe oben S. 779 ff.)

hatte, als er in Berlin ankam, ohne vorausgehende Einwirkung von meiner Seite.

Der bewegte Träger der Elektricität war eine Scheibe von Ebonit, 21,1 cm im Durchmesser und ein halbes Centimeter dick. Dieselbe konnte mit grosser Geschwindigkeit (bis zu 61 Mal in der Secunde) um eine in ihrer Mitte befestigte verticale Axe laufen. Die Ebonitscheibe war auf beiden Seiten vergoldet, die Vergoldung aber von der Axe isolirt. Nahe oberhalb und unterhalb derselben lagen Glasscheiben, 38,9 cm im Durchmesser, in der Mitte durchbohrt, um die Axe der Ebonitscheibe durchzulassen. Die Glasscheiben waren ebenfalls in einem ringförmigen Streifen (24 cm äusserer, 8,9 cm innerer Durchmesser) vergoldet. Meist war die vergoldete Seite der Ebonitscheibe zugekehrt. Die vergoldeten Flächen der Glasscheiben waren in der Regel zur Erde abgeleitet, während die Ebonitscheibe zwischen ihnen durch eine Spitze, die $\frac{1}{3}$ mm von ihrem Rande entfernt ihr zugekehrt war, mit einer der Belegungen einer grossen isolirten Leydener Batterie, die als Vorrathskammer für die Elektricität diente, elektrisch communicirte. Ein dazwischen geschalteter Commutator besonderer Construction erlaubte bald die eine, bald die andere Belegung entweder mit der Ebonitscheibe oder mit der Erde zu verbinden. Alles Eisen war in der Construction dieser Theile vermieden.

Dicht über der oberen Glasscheibe war eine höchst empfindliche astatische Nadel an einem in der Wand befestigten Arme aufgehängt, ganz eingeschlossen von einem zur Erde abgeleiteten Messinggehäuse. Die beiden Nadeln waren 1,5 cm lang, aber weit (17,98 cm) voneinander entfernt. Ihre Ablenkungen wurden durch Spiegel und Fernrohr abgelesen. Die Oeffnung vor dem Spiegel war durch einen metallischen Hohlkegel gegen äussere elektrische Einflüsse geschützt. In der That liess die elek-
489 trische Ladung der grossen Batterie und die Umkehr der Elektrisirung der Ebonitscheibe keine Spur von Einwirkung auf die Nadel erkennen, so lange die Ebonitscheibe still stand.

Dagegen zeigte sich bei schneller Rotation auch ohne Elektrisirung die Wirkung von Rotationsmagnetismus, welcher grösstentheils von der Messingaxe der rotirenden Scheibe herrührte, und durch Abdrehen derselben auf 0,9 cm Dicke er-

heblich vermindert wurde. Die Wirkung der Elektrisirung der Scheibe liess sich von der des Rotationsmagnetismus dadurch trennen, dass man mittels des erwähnten Commutators positive und negative Elektrisirung wechseln liess, während die Rotationsgeschwindigkeit unverändert erhalten wurde. Die Verrückung der Gleichgewichtslage der Nadel betrug 5 bis 7½ Scalentheile, ihr Schwingungsbogen beim Wechsel der Elektrisirung also 10 bis 15 Theile. Dieser Erfolg trat in Hunderten von Beobachtungen, die mit allmählig immer mehr verbessertem Apparate im Verlaufe mehrerer Wochen angestellt wurden, immer wieder in demselben Sinne ein. Der Sinn der Ablenkung der Nadel, deren Länge normal zum Radius der Scheibe stand, war immer ein solcher, wie ihn ein mit der Rotation der positiv geladenen Scheibe oder gegen die Rotation der negativ geladenen Scheibe fliessender positiver elektrischer Strom hervorgebracht haben würde.

An der Wirkung wurde nichts geändert, als die Vergoldung der Ebonitplatte in einer Reihe radialer Linien fortgenommen wurde, sodass ringförmige elektrische Ströme nicht mehr zu Stande kommen konnten. Auch wurde statt der vergoldeten Ebonitplatte eine dünne Glasplatte eingesetzt, die wie die Scheibe einer Holtz'schen Maschine durch Spitzen elektrisirt werden konnte, während nur eine vergoldete ruhende Platte, zur Erde abgeleitet, um möglichst viel Elektricität zu binden, sich dicht unter ihr befand. Der Sinn der Ablenkungen war derselbe wie bei den früheren Versuchen; sie waren aber kleiner, da die Bedingungen für starke Elektrisirung nicht so günstig waren.

Um die Wirkung der durch Convection fortgeführten Elek- 490
tricität mit der in Leitern strömenden zu vergleichen, wurden Versuche in folgender Weise angestellt.

Die Ebonitscheibe wurde neu vergoldet und der Goldüberzug durch eine Reihe feiner kreisförmiger Linien in Ringe getheilt, die voneinander isolirt waren. Der innerste Goldring war mit der Axe verbunden; die übrigen konnten sich wenigstens nicht erheblich laden, ohne sich durch sehr kurze Funken gegenseitig zu entladen. Zwei elektrisirte Platten, von der Form je eines Kreissectors, der aber nicht bis zur Axe reichte,

wurden oben und unten der rotirenden Platte gegenübergestellt. Unter diesen Umständen musste sich in dem von den letztgenannten Platten bedeckten Sector der Goldringe Elektricität durch elektrostatische Induction anhäufen und convectiv fortgeführt werden. Wenn dies positive Elektricität war, wurde dieselbe frei an dem in Richtung der Rotation vorderen Rande des inducirten Sectors, während am hinteren Rande desselben fortdauernd neue positive Elektricität gebunden, beziehlich negative Elektricität frei wurde.

Unter diesen Umständen musste die positive Elektricität vom vorderen bis zum hinteren Rande des Sectors überströmen, wozu ihr in jedem Ringe zwei Wege offen standen, zwischen denen sie sich nach dem umgekehrten Verhältniss ihres Widerstandes theilen musste. Umfasst der inducirende Sector $1/n$ des Kreisumfanges, so verhalten sich die Widerstände der im Sector und ausserhalb desselben liegenden Wege wie $1 : n - 1$, und es gehen deshalb $(n-1)/n$ des Stromes durch den Sector und $1/n$ ausserhalb desselben zurück. Durch Convection wird im Sector dem Strom entgegen ein der Summe beider Ströme entsprechendes Quantum fortgeführt. Wirkt also convective Bewegung der Elektricität wie geleitete, so ist auch im Sector die Gesammtbewegung:

$$1 - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

491 Wirkte dagegen convective Bewegung mehr oder weniger als geleitete, so würde dieser Ueberschuss sich in einem oder dem anderen Sinne an dem Sector zeigen müssen.

Die Versuche zeigten, dass wenn der Sector klein ist ($\frac{1}{8}$ des Umfanges), die kleine Differenz zwischen der Convection 1 und der Leitung $\frac{7}{8}$ überhaupt nicht oder wenigstens nicht sicher mehr beobachtet werden konnte, dass also bei naher Gleichheit der Convection und Conduction auch der elektrodynamische Effect der einen den der anderen merklich aufhob.

Wenn dagegen der Sector die Hälfte des Umfanges einnahm, konnte die hier vorausgesetzte Strömung auch in dem freien Theile der Scheibe beobachtet werden. Für eine sichere Messung war der Betrag aber zu klein.

Bei der Kleinheit der beobachteten elektrodynamischen Wirkung in den früheren Versuchen, wo die Scheibe elektrisirt und in ganzer Ausdehnung von den inducirten Platten gedeckt war, liess die theoretische Berechnung der Grösse der Wirkung aus den bekannten absoluten Werthen der elektrodynamischen Constanten nur angenähert übereinstimmende Werthe erwarten. Doch wurde dieselbe von Hrn. Rowland durchgeführt.

Das Verhältniss, in welchem die Wirkung des Erdmagnetismus auf das astatische Nadelpaar vermindert war, wurde ermittelt, indem man erst die Schwingungsdauer bei gleichgerichteten Nadeln und dann bei astatisch gestellten ermittelte.

Der Werth der elektrischen Potentialfunction in der Leydener Batterie und an der rotirenden Scheibe wurde nach dem von Sir W. Thomson gegebenen Gesetze der Funkenlänge bestimmt, was in diesem Falle ausreichend genau erschien. Vor und nach jedem Versuche wurde eine kleinere Flasche aus der Batterie von neun grossen Flaschen, die den Elektricitätsvorrath enthielt, geladen und an jener die Funkenlänge bestimmt.

Die Geschwindigkeit der Rotation wurde nach der Stellung der Kugeln eines Centrifugalregulators geregelt, der an einer 402
der langsamer rotirenden Axen angebracht war. Die Berechnung nach der Grösse der Rollen stimmte gut überein mit der Bestimmung durch den Ton einer Sirenenscheibe, die zeitweilig an der schnellsten Axe angebracht wurde.

Bei der Berechnung der Elektricitätsvertheilung auf der Scheibe und der elektromagnetischen Richtkraft wurde der am Rande der Scheibe befindliche Ueberschuss der Ladung nach dem für unendlich dünne Scheiben geltenden Werthe berechnet und als ein unendlich dünner Faden am Rande concentrirt gedacht, was beides allerdings nur annähernd richtig war, aber bei der Kleinheit dieses Theiles genügte.

Die Einwirkung auf die obere Nadel war ungefähr $\frac{1}{50}$ von der auf die untere.

Die horizontale Kraft des Erdmagnetismus wurde gleich 0,182 gesetzt, indem Centimeter, Gramm und Secunde als Einheiten gebraucht wurden; die elektrodynamische Constante ist von Hrn. Rowland nach Maxwell's Bestimmungen gleich

28800 Millionen gesetzt. W. Weber's Werth würde 31075 Millionen sein. Ich gebe unten unter *M* die mit dem ersteren Werth, unter *W* die mit dem letzteren berechneten Resultate an.

Ich gebe hier nur das Resultat der Berechnung von drei unter günstigen Umständen ausgeführten Versuchsreihen an:

1) Zehn Versuche mit abwechselnd entgegengesetzter Rotation, bei jedem drei Ablesungen, deren mittlere bei entgegengesetzter Elektrisirung der Scheibe gemacht wird, als die erste und die dritte.

Mittlerer Unterschied der Gleichgewichtslage in Scalentheilen 6,735
Funkenlänge 0,284 5
Elektrodynamische Kraft auf das astatische Paar wirkend, beobachtet 0,000 003 27
berechnet *M* 0,000 003 37
berechnet *W* 0,000 003 11

493 2) Vier Versuche ebenso:
Unterschied der Stellung 7,50
Funkenlänge 0,295 5
Elektr. Kraft beobachtet 0,000 003 17
berechnet *M* 0,000 003 49
berechnet *W* 0,000 003 22

3) Fünf Versuche ebenso:
Unterschied der Stellung 7,60
Funkenlänge 0,292 6
Elektr. Kraft beobachtet 0,000 003 39
berechnet *M* 0,000 003 55
berechnet *W* 0,000 003 28

Die Uebereinstimmung darf als genügend angesehen werden bei der Messung einer Kraft, die nur $\frac{1}{50000}$ von der Kraft des Erdmagnetismus beträgt, da in zwei dieser Versuchsreihen die beobachteten Werthe zwischen die den verschiedenen gemessenen Werthen der Weber'schen Constante entsprechenden hineinfallen.

Was die Bedeutung dieser Versuche für die Theorie der Elektrodynamik betrifft, so entsprechen sie den Voraussetzungen

der Theorie von Hrn. W. Weber, aber sie lassen sich auch aus der Maxwell'schen oder aus der die diëlektrische Polarisation der Isolatoren berücksichtigenden Potentialtheorie herleiten. Die Volumelemente der zwischen der bewegten und den ruhenden Platten liegenden Luftschicht erleiden fortdauernd Schiebungen im Sinne einer Rotation um radial gerichtete Drehungsaxen. Die bestehende diëlektrische Polarisation derselben wird sich in jedem materiellen Elemente also fortdauernd ändern, während sie im Raume dieselbe Richtung normal zur Fläche der elektrisirten Scheiben behält. Die entstehenden und vergehenden Componenten dieser Polarisation würden den Strom constituiren, der durch das astatische Nadelpaar angezeigt wird.

XLI.

Ueber die auf das Innere magnetisch oder diëlektrisch polarisirter Körper wirkenden Kräfte.

Aus: Wiedemann's Annalen Bd. XIII S. 385—406. — Monatsberichte der Berliner Akademie vom 17. Februar 1881.

---

385 Weiches Eisen, in die Nähe eines Magnets gebracht, zeigt selbst Abstossungen und Anziehungen kleiner magnetischer oder magnetisirbarer Körper, die es vorher nicht zeigte. Um diese zu erklären, nimmt man eine gewisse Vertheilung des Magnetismus in den Molecülen des Eisens an. Faraday zeigte später, dass Wirkungen dieser Art nicht blos im Eisen, sondern in fast allen bekannten Körpern in sehr viel geringerer Stärke und zum Theil auch in entgegengesetztem Sinne nachzuweisen sind, und dass genau ähnliche Erscheinungen, die auf eine Vertheilung entgegengesetzter Elektricitäten in den Molecülen elektrischer Isolatoren hindeuten, durch elektrische Anziehungskräfte hervorgerufen werden. Mathematisch wurden diese Erscheinungen von Poisson zuerst für das Gebiet des Magnetismus unter verhältnissmässig einfache Gesetze zusammengefasst, die wenigstens für mässige Stärken der Magnetisirung, und soweit sich nicht Wirkungen der reibungsähnlichen Coërcitivkraft einmischen, den Gang der Erscheinungen gut darstellen. Dieselben allgemeinen Gesetze lassen sich auch auf die schwächeren magnetischen Wirkungen in den paramagnetischen und diamagnetischen Substanzen anwenden, und ebenso auf die elektrische Polarisirung der Diëlektrica, soweit in letzteren nicht Leitung und die der Leitung verwandt

erscheinende Rückstandsbildung Zeit haben, sich zu entwickeln.

Die Erscheinungen, an denen Poisson seine Theorie aus-
bildete, waren Bewegungen starrer Magnete und magnetisir- 386
baren Eisens im Luftraume. Später ist die Theorie von Sir W. Thomson auch auf die Bewegungen starrer Körper in magnetisirbaren Flüssigkeiten ausgedehnt worden mit Beziehung auf Faraday's diamagnetische Versuche. Sobald sich die Molecüle magnetisch oder elektrisch polarisirter Medien gegeneinander verschieben können, wie in Flüssigkeiten oder in biegsamen elastischen Körpern, so kommen neben den ursprünglich angenommenen Fernkräften noch nothwendig moleculare Wirkungen in Betracht. Die in Richtung der Kraftlinien hintereinander liegenden Molecüle kehren einander befreundete Pole zu und müssen sich gegenseitig anziehen, die seitlich nebeneinander liegenden werden sich gegenseitig abstossen. Die bekannte Theorie der magnetischen Fernwirkung zeigt, dass parallel gerichtete kleine Magnete sich anziehen, wenn die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte einen spitzen Winkel mit der magnetischen Axe beider macht, der kleiner ist als $54^0\,44'$ (arc cos $1/\sqrt{3}$), sich abstossen, wenn der spitze Winkel grösser ist. Damit in Uebereinstimmung ist Faraday's Voraussetzung, dass in den magnetisch oder diëlektrisch polarisirten Medien ein Zustand von Spannung bestehe in Richtung der Kraftlinien, infolge dessen sich diese zu verkürzen streben, während quer gegen die genannten Linien ein Druck wirke, der die Substanz in dieser Richtung auseinander treibe. Sir W. Thomson[1]) hat schon 1843 den Beweis geführt, dass Kräfte dieser Art dieselben Wirkungen hervorbringen können, wie die directen Fernwirkungen nach der Theorie von Coulomb, und Cl. Maxwell hat diese Annahme von Faraday zur Grundlage seiner ganzen Theorie der Elektricität und des Magnetismus gemacht. Die jüngst veröffentlichten Versuche von Hrn. Quincke zeigen in sehr auffallender Weise das Bestreben elektrischer Isolatoren, sich quer

1) Thomson, Cambridge Mathem. Journ. May 1843. — Reprint. Art. VIII § 147.

gegen die Richtung der elektrischen Kraftlinien zu dehnen, wenn auch diese Versuche über das Verhalten in Richtung der Kraftlinien noch Zweifel bestehen lassen.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist zu zeigen, dass, wenn
367 die Consequenzen von Poisson's Theorie auch nur in der angegebenen Ausdehnung, d. h. in ihrer Anwendung auf die Bewegungen starrer Körper im Luftraume als thatsächlich richtige Beschreibung der beobachtbaren Erscheinungen angesehen werden, und das Gesetz von der Constanz der Energie für dieses Gebiet von Erscheinungen als gültig betrachtet wird, dieses Gesetz allein ohne alle Zuziehung von Hypothesen über die innere Constitution der elektrisch oder magnetisch polarisirten Körper es möglich macht, auch die ponderomotorischen Kräfte zu finden, welche auf die inneren Theile solcher Körper einwirken und bei Formänderungen derselben sich geltend machen. Es ergiebt sich dabei in der That, dass das von Faraday angenommene System von Spannungen längs der Kraftlinien und Drucken quer dagegen im Innern solcher Körper wirksam sein muss. Die einzige Abweichung, welche meine Analyse gegen die von den Herren W. Thomson und Cl. Maxwell aufgestellten Formeln zeigt, ist, dass sie noch eine zweite Constante eintreten macht, durch welche das Verhältniss zwischen den Grössen jener Drucke und Spannungen von der Art der Substanz abhängig gemacht wird.[1])

§ 1. Die Arbeit bei Bewegungen starrer polarisirter Körper im Luftraum.

Da die hierher gehörigen Probleme bei ihrer Anwendung auf Elektricität etwas allgemeinere Form erhalten als bei Poisson's ursprünglicher Anwendung derselben auf Magnetisirung, so will ich im Folgenden zunächst die Benennungen der Elektricitätslehre anwenden. Die Uebertragung auf Magnete erfordert nachher nur unerhebliche Aenderungen. Es mögen λ, μ, ν die Com-

1) Meine in Bd. 72 von Borchardt's Journal für reine u. angew. Mathematik gegebene Darstellung passt, dem dortigen Zwecke entsprechend, nur auf die innerhalb eines ponderabeln Trägers fortgleitende Elektricität.

ponenten der diëlektrischen Momente eines polarisirten Isolators sein, berechnet für die Volumeneinheit seiner Substanz, parallel den Axen der x, y, z genommen; ausserdem möge ε die Raumdichtigkeit, e die Flächendichtigkeit *von aussen zugeleiteter Elektricität* in seinem Innern oder an seiner Oberfläche 388
bedeuten, und φ die Potentialfunction aller *freien*, d. h. nicht durch die Polarisirung der Substanz neutralisirten Elektricität sein, so wären die nach *Poisson's* Vorgang zu bildenden Gleichungen, welche die Abhängigkeit der genannten Grössen voneinander ausdrücken:

$$\lambda = -\vartheta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mu = -\vartheta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \nu = -\vartheta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{1}$$

Die Raumdichtigkeit der freien Elektricität wird sein:

$$\mathfrak{e} = -\frac{1}{4\pi} \Delta \varphi = \varepsilon - \frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \nu}{\partial z}, \tag{1a}$$

und die Flächendichtigkeit, wenn N_1 und N_2 die auf der Fläche nach beiden Seiten hin errichteten Normalen sind, und N_1 mit den positiven Coordinatenaxen die Winkel a_1, b_1, c_1 macht:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E} &= -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial N_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial N_2}\right] \\ &= e - (\lambda_1 - \lambda_2)\cdot\cos a_1 - (\mu_1 - \mu_2)\cdot\cos b_1 - (\nu_1 - \nu_2)\cdot\cos c_1. \end{aligned}\right\} \tag{1b}$$

Die ponderomotorischen Kräfte, welche wirksam werden, wenn einer der elektrisirten Körper, den wir mit A bezeichnen wollen, bewegt wird, sind nach *Poisson's* Annahme gleich den Fernkräften, welche die gesammte vorhandene freie Elektricität der übrigen Körper auf die jedes einzelnen ausübt. Das virtuelle Moment dieser Kräfte bei wirklich eintretenden Verschiebungen oder die Arbeit, welche die genannten Kräfte bei solcher Verschiebung verrichten, wird infolge dessen gegeben durch die Aenderung, die durch die Verschiebung im Werthe des Potentials P aller freier Elektricität gegeneinander eintritt, während diese selbst in jedem Punkte des bewegten Körpers als unverändert betrachtet wird. Dieses Potential ist:

$$P = \tfrac{1}{2}\iiint \varphi \cdot \mathfrak{e} \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \tfrac{1}{2}\int \varphi \cdot \mathfrak{E} \cdot d\omega, \tag{1c}$$

und seine Aenderung bei eintretender Bewegung wird sein:

$$\left.\begin{aligned} \delta P &= \tfrac{1}{2}\iiint \mathfrak{e}\,.\,\delta\varphi\,.\,dx\,.\,dz + \tfrac{1}{2}\int \mathfrak{E}\,.\,\delta\varphi\,.\,d\omega, \\ &= -\frac{1}{8\pi}\iiint \Delta\varphi\,.\,\delta\varphi\,.\,dx\,.\,dy\,.\,dz - \frac{1}{8\pi}\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial N_2}\right)\delta\varphi\,.\,d\omega. \end{aligned}\right\} \quad (1\text{d})$$

Hierin bedeutet $\delta\varphi$ die Aenderung, welche in dem betreffenden Punkte des bewegten Körpers sowohl durch seine eigene
389 Bewegung wie durch die aller anderen Punkte eintritt, in deren jedem die freie Elektricität als unveränderlich betrachtet wird. Würde unter $\delta\varphi$ nur die durch die eigene Bewegung des betreffenden Punktes erzeugte Aenderung verstanden, so wäre der Factor $\frac{1}{2}$ wegzulassen.

Poisson's Theorie hat, wie schon bemerkt, als Grundlage nur die Erfahrungen, welche bei der Bewegung starrer magnetisirter Körper im Luftraume gemacht waren. Um nun auch in allgemeineren Fällen die Grösse der bei der Bewegung elektrisirter Körper aufzuwendenden Arbeit berechnen zu können, habe ich den Integralen, welche den Werth der Energie ausdrücken, eine besondere Form gegeben. Im allgemeinen kommt darin eine ganze Reihe verschiedener Grössen vor, Potentialfunctionen, Momente, Dichtigkeiten, die durch die Gleichgewichtsbedingungen voneinander abhängig sind, und man kann mittels der letzteren Bedingungen bald die eine, bald die andere der genannten Grössen aus dem Werthe der Energie eliminiren oder auch in ihn einführen. Unter allen diesen Formen giebt es nun eine, welche ich die Normalform nennen möchte, bei der die Variation ersten Grades des betreffenden Integrals, welche einer willkürlichen Variation der abhängigen und bei Herstellung des Gleichgewichts sich verändernden Grössen entspricht, gleich Null wird. Bei der Anwendung einer solchen Form hat man den Vortheil, dass bei Berechnung der Aenderung des Arbeitswerthes infolge irgend einer anderen Einwirkung die dabei eintretenden Aenderungen jener erstgenannten Grössen ausser Betracht gelassen werden können, eben weil die durch ihre Aenderung bewirkte Arbeit gleich Null ist.

In unserem Falle bilden wir das über den unendlichen Raum zu erstreckende Integral:

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{W} = \iiint \Big\{ \varphi \cdot \varepsilon + \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \nu \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{2\vartheta}(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) \\ \quad - \frac{1}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right]\Big\} dx \,.\, dy \,.\, dz + \int \varphi \,.\, e \,.\, d\omega \,,\end{array}\right\} \tag{2}$$

mit den Bedingungen, dass $\delta \mathfrak{W} = 0$, im Falle λ, μ, ν oder φ variirt werden. Ich will das hier und in der Folge so schreiben:

$$\delta_\lambda \mathfrak{W} = \delta_\mu \mathfrak{W} = \delta_\nu \mathfrak{W} = \delta_\varphi \mathfrak{W} = 0. \tag{2a}$$ 390

Führen wir diese Variationen aus, so erhalten wir in der That die oben unter (1), (1a) und (1b) aufgeführten Bedingungsgleichungen.

Um zu berechnen, welche Aenderung im Werthe von $\mathfrak{W}$ bei Lagenänderungen eines oder mehrerer der elektrisirten starren Körper eintritt, wollen wir zunächst annehmen, dass dabei nicht bloss die Grössen ε und e, sondern auch λ, μ, ν in jedem materiellen Punkte und Volumenelement der betreffenden Körper ihre Werthe unverändert behalten, dann würde auch überall der Werth der durch die Gleichungen (1a) und (1b) bestimmten freien Elektricität, beziehlich der Grössen $\Delta\varphi$ und $(\partial\varphi/\partial N_1 + \partial\varphi/\partial N_2)$ in jedem materiellen Punkte unverändert bleiben, φ aber sich ändern wegen der geänderten räumlichen Verhältnisse. Um die entsprechende Variation von $\mathfrak{W}$ zu finden, würden wir den Betrag der zu integrirenden Grössen für jedes Volumenelement der betreffenden Körper vor und nach der Verschiebung zu vergleichen haben, nachdem wir den Theil:

$$\iiint \frac{1}{8\pi}\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\} dx \,.\, dy \,.\, dz$$
$$= -\int \frac{1}{8\pi}\, \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N}\, d\omega - \int \frac{1}{8\pi}\, \varphi \,.\, \Delta\varphi \,.\, dx \,.\, dy \,.\, dz$$

aus der ersten in die zweite Form umgeschrieben haben. Dann sind die Integrale nur über das Innere der elektrisirten Körper zu erstrecken, da ε, λ, μ, ν, $\Delta\varphi$ in dem zwischen diesen liegenden Raum in Poisson's Theorie gleich Null gesetzt werden, und es wird:

$$\delta \mathfrak{W} = \iiint \delta\varphi \cdot \left\{ \varepsilon - \frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \nu}{\partial z} + \frac{1}{8\pi} \Delta \varphi \right\} dx . dy . dz$$

$$+ \int \delta\varphi \cdot \left\{ e - \lambda . \cos a - \mu . \cos b - \nu . \cos c + \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right\} d\omega.$$

Unter Anwendung der Gleichungen (1a) und (1b) führt dies auf die in (1d) gefundene Form:

$$\delta \mathfrak{W} = - \iiint \frac{1}{8\pi} \cdot \delta\varphi . \Delta\varphi . dx . dy . dz - \int \frac{\delta\varphi}{8\pi} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial N} \cdot d\omega = \delta P.$$

Das heisst die Zunahme des $\mathfrak{W}$ bei der vorausgesetzten Aenderung ist gleich der Zunahme, welche das Potential sämmt-
391 licher vorhandenen freien Elektricität durch dieselbe Lagenänderung erfahren würde, wenn diese an den ponderablen Theilen festhaftete. Wegen der besonderen Eigenschaften der Function $\mathfrak{W}$ ändert sich dieser Werth nicht mehr, wenn man nachträglich in der zweiten Lage die dem neuen Gleichgewichte entsprechende Grösse der Momente λ, μ, ν eintreten lässt. Also auch, wenn man für $\mathfrak{W}$ die den Gleichgewichtsbedingungen (2a) entsprechenden Werthe der abhängenden Veränderlichen λ, μ, ν, φ als fortdauernd gültig voraussetzt, wird bei Lagenänderungen der einzelnen starren Körper sein:

$$\mathfrak{W} - P = \text{Const.},$$

wobei P die Arbeit bedeutet, welche zur Ueberwindung der ponderomotorischen Kräfte der Elektricität bei Lagenänderungen der betreffenden starren Körper aufzuwenden ist. Es geht hieraus also auch hervor, dass diese Arbeit trotz der Veränderlichkeit der elektrischen Vertheilung nur abhängt von der Anfangs- und Endlage der betreffenden Körper, nicht von dem Wege, auf dem man sie aus der einen in die andere Lage geführt hat.

Uebrigens ist noch zu beachten, dass auch für Aenderungen in der Vertheilung der eingeleiteten Elektricität ε und e die Aenderung von $\mathfrak{W}$:

$$\delta \mathfrak{W} = \iiint \varphi . \delta\varepsilon . dx . dy . dz + \int \varphi . \delta e . d\omega$$

wiederum gleich ist der Arbeit, welche man hätte aufwenden müssen, um in leitenden Drähten durch passend angebrachte

elektromotorische Kräfte die bewegten Quanta $\delta\varepsilon$ und δe zwischen Orten von verschiedenen Potentialwerthen φ fortzuleiten.

Setzen wir die aus den Gleichungen (1), (1a) und (1b) sich ergebenden Werthe von λ, μ, ν, e, ε in die Gleichung (2), so erhalten wir die für den Fall des hergestellten Gleichgewichts geltenden Formen des Werthes von $\mathfrak{W}$:

$$\mathfrak{W}_b = \tfrac{1}{2}\iiint \varphi \,.\, \varepsilon \,.\, dx \,.\, dy \,.\, dz + \tfrac{1}{2}\int \varphi \,.\, e \,.\, d\omega. \qquad (2\text{b})$$

$$\mathfrak{W}_c = \iiint \frac{1 + 4\pi\vartheta}{8\pi} \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \right\} dx \,.\, dy \,.\, dz. \qquad (2\text{c})$$

Die Combination: 393

$$\mathfrak{W} = 2\,\mathfrak{W}_b - \mathfrak{W}_c \qquad \text{mit der Bedingung:} \qquad \delta_\varphi \mathfrak{W} = 0 \qquad (2\text{d})$$

ist wieder eine Normalform, aus der λ, μ, ν ausgeschieden sind.

Aus der Form (2b) folgt, dass $\mathfrak{W} = 0$ wird, wenn die Körperelemente, welche angesammelte Elektricität enthalten, voneinander und von den übrigen in unendliche Entfernung gebracht sind.

Die Grösse $\mathfrak{W}$ ist also das Maass der Arbeit, welche verwendet werden muss, um die entsprechende Anordnung der elektrisirten Körper herzustellen, wenn die Quanta freier Elektricität sich zuerst unter dem Potentialwerthe Null befunden haben. Dies ist anwendbar auf jede Art von Elektrisirung, welche durch beliebige Vertheilung zugeleiteter elektrischer Quanta im Innern oder an der Oberfläche der betreffenden Körper entstehen kann.

Im Falle unter den elektrisirten Körpern auch Leiter sind, wird innerhalb jedes Leiters auch ε, beziehlich e variabel, aber so, dass die in der ganzen Ausdehnung des Leiters enthaltene gesammte Quantität der Elektricität unverändert bleibt, d. h. es ist innerhalb des Leiters zu setzen:

$$\delta_{\varepsilon}\mathfrak{W} + C\iiint \delta\varepsilon \,.\, dx \,.\, dy \,.\, dz + C\int \delta e \,.\, d\omega = 0.$$

Die aus der Variation hierbei folgenden Bedingungen sind:

$$0 = \delta\varepsilon\{\varphi + C\}, \qquad 0 = \delta e\{\overline{\varphi} + C\},$$

die für die Ausdehnung jedes zusammenhängenden Leiters gelten. Für getrennte Leiter sind verschiedene voneinander unabhängige Constanten C anzuwenden.

Uebrigens kommt man genau zu demselben Resultate, wenn man die Quantität von Elektricität, die der Leiter enthalten soll, in ihm als festliegende Masse ε annimmt und dann $\vartheta = \infty$ setzt. Um den Werth von $\mathfrak{W}$ in (2c) zum Minimum zu machen, wird unter diesen Umständen, so weit $\vartheta = \infty$ ist, sein müssen:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 = 0, \quad \text{d. h.} \ \varphi = C,$$

393 und das Quantum der im Leiter enthaltenen Elektricität wird durch die eintretende diëlektrische Polarisation desselben nicht geändert. Wenn wir diese Form der Behandlung des Problems wählen, wird also der Fall der Leiter als Grenzfall in die bisherigen Rechnungsformen mit eingeschlossen.

Bei der Anwendung auf magnetische Vertheilung kann im Ganzen genau ebenso verfahren werden, nur würden die Quanta ε und e als festliegend in den Gegenden der Pole unveränderlicher Magnete angesehen werden müssen, und das Gesammtquantum derselben in jedem Magnet gleich Null zu setzen sein. Die aufgestellten Gleichungen würden den Fall mit umfassen, dass neben dem unveränderlichen Magnetismus, der den Quantis ε und e entspricht, in der Masse des Magneten sich durch Induction temporärer Magnetismus entwickelt.

Die Function $\mathfrak{W}$, berechnet für Gleichgewichtszustand in den polarisirten Körpern, kann auch auf die Form gebracht werden:

$$\mathfrak{W} = \iiint \frac{1 + 4\pi\vartheta}{8\pi\vartheta^2} \cdot [\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2] . dx . dy . dz, \tag{2e}$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{W} = & \iiint \left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\} dx . dy . dz \\ & + \iiint \frac{1}{2\vartheta}(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) . dx . dy . dz. \end{aligned}\right\} \tag{2f}$$

In der letzteren Form ist das erste Integral die Arbeit der freien Elektricität, nach ihrer Wirkung im Luftraume berechnet

das zweite der Betrag, den die Polarisirung der diëlektrischen Substanzen hinzufügt. Die Form (2e) entspricht der Theorie von Faraday, wonach auch im Luftraume Polarisation stattfindet. Soll sie auf den Luftraum mit der Annahme $\vartheta = \lambda = \mu = \nu = 0$ angewendet werden, so ist hier für λ/ϑ u. s. w. die elektrische Kraft $(-\partial\varphi/\partial x)$ zu setzen, um der Form $\left(\frac{0}{0}\right)$ zu entgehen, wie dies in (2f) geschehen ist.

Wenn wir annehmen, die durch die Gleichungen (1), (1a) und (1b) bestimmte Polarisation könnte unveränderlich gemacht werden, wie dies bei magnetischen Substanzen durch die Coërcitivkraft wirklich in gewissem Grade 394
geschieht, und es würden dann noch neue elektrische Quanta von der Dichtigkeit ε_1 und e_1 hinzugebracht, die, für sich genommen, die Potentialfunction ψ hervorbrächten, so würde deren Ansammlung zunächst gegen ihre eigenen Kräfte die Arbeit:

$$\frac{1}{8\pi}\iiint\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{dz}\right)^2\right\}dx\,.\,dy\,.\,dz$$

erfordern. Weiter wäre die Abstossung der früher vorhandenen elektrischen Quanta und Momente zu überwinden, deren Potentialfunction φ ist. Dies giebt:

$$\begin{aligned}&\iiint\varphi\,.\,\varepsilon_1\,.\,dx\,.\,dy\,.\,dz+\int\varphi\,.\,e_1\,.\,d\omega\\&=\iiint\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)dx\,.\,dy\,.\,dz.\end{aligned}$$

Wenn wir diese beiden Arbeitsbeträge unter der Bezeichnung $\mathfrak{B}$ zusammenfassen, so ergiebt sich die Gesammtarbeit mit Hinzufügung des Werthes von $\mathfrak{W}$ aus (2f):

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{B}+\mathfrak{W}=\frac{1}{8\pi}\cdot\iiint\left\{\left(\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial z}\right)^2dx\,.\,dy\,.\,dz\right.\\+\iiint\frac{1}{2\vartheta}\left\{\lambda^2+\mu^2+\nu^2\right\}dx\,.\,dy\,.\,dz,\end{aligned}\right\}\quad(2\text{g})$$

eine der Form (2f) vollkommen analoge Form. Daraus geht hervor, dass diese ihre Bedeutung auch dann behält, wenn die Momente λ, μ, ν zwar eine solche Anordnung haben, als wären sie durch die vertheilende Wirkung von eingeleiteter

Elektricität hervorgebracht, aber nicht der zur Zeit bestehenden elektrischen Vertheilung entsprechen.

Man findet diese Form z. B. in der Gleichung für die Constanz der Energie (20k) meiner ersten Abhandlung über Theorie der Elektrodynamik[1]) für die elektrostatische Arbeit wieder, obgleich dort noch inducirte elektromotorische Kräfte mitwirken. Für die magnetischen Kräfte findet sich ebenda die einer Gleichgewichtslage entsprechende Form (2e). Diese Gleichgewichtslage ist aber dort unter dem Einflusse elektrischer Ströme zu Stande gekommen. Letztere wirken nach Ampère's Darstellung festen Magneten analog, aber sie machen die Potentialfunktion φ mehrdeutig. Eindeutig wird
395 diese nur, wenn wir den Raum, der um die Stromleiter herum mehrfach zusammenhängend ist, durch passend gelegte Schnittflächen einfach zusammenhängend machen. An jeder solchen Schnittfläche muss die Potentialfunction φ einen Sprung machen, sodass:

$$\varphi_1 - \varphi_0 = -4\pi J,$$

wo J die Stromintensität bedeutet. Die Schnittflächen dürfen nicht die unveränderlichen Magnete schneiden, die in den bisher angewendeten Gleichungen nur durch die magnetischen Quanta ihrer Pole e und ε repräsentirt sind, da es nicht gleichgültig ist, ob der die Pole verbindende Magnetstab auf der einen oder anderen Seite des Stromleiters vorbeigeht. Es dürfen also auch bei Verschiebungen der verschiedenen Körper die Quanta ε und e nie durch die genannten Schnittflächen hindurchgehen.

Wenn dies festgehalten wird, so ist zunächst ersichtlich, dass der Werth von $\mathfrak{W}$, wie er in Gleichung (2) gegeben ist, nicht von der Lage der genannten Schnittflächen abhängig ist. Denn wenn wir sie verschieben, ändert sich nur der Werth von φ, nicht aber der seiner Differentialquotienten, in denjenigen Stellen des Raumes, durch welche die Fläche passirt ist. Da nun φ nur mit ε oder e multiplicirt in Gleichung (2) vorkommt, und die Pole der Magnete nicht durch die Fläche

1) Helmholtz, Borchardt's Journal für reine und angew. Mathematik. Bd. 72. S. 125. 1870. (Oben S. 624).

gehen sollen, so ändert sich nichts im Werthe von $\mathfrak{W}$ durch eine Verschiebung der Schnittfläche innerhalb des Bereiches der nur temporär magnetisirten Körper, und die Function $\mathfrak{W}$ wird also auch in diesem Falle die ponderomotorische Arbeit auszudrücken geeignet sein, welche bei constant erhaltener Stromintensität aufgewendet werden muss, um die verschiedenen magnetisirten oder magnetisirbaren Körper in der Nähe des Stromleiters zu bewegen. Nur ist dabei die in den obigen Ausdruck von $\mathfrak{W}$ nicht mit aufgenommene Bedingung festzuhalten, dass φ beim Umlauf um den Stromleiter, wenn dessen Stromintensität J ist, um die Grösse $4\pi J$ zunehme.

Zu bemerken ist, dass der Werth von $\mathfrak{W}$ in (2e), der hier nur durch Betrachtung der zur Herstellung der Magnetisirung aufgewendeten Arbeit gewonnen ist, sich
in meiner ersten Abhandlung über Elektrodynamik in der 398
schon citirten Gleichung (20k) als vollständiger Werth der elektrokinetischen Energie galvanischer Ströme gefunden hat. Die dortigen Werthe von λ, μ, ν beziehen sich aber nur auf die durch die Ströme selbst hervorgerufene Magnetisirung, da sie nur den mit den Strömen verschwindenden Theil derselben berücksichtigen. Die Herleitung des Werthes beruht dort auf ganz anderen Principien, nämlich auf Berechnung der Wärmeentwickelung durch die Inductionsströme; sie kann für ungeschlossene Ströme problematisch erscheinen, für geschlossene aber hat sie sichere Grundlagen. Wenn im Luftraum $\vartheta = 0$ genommen wird, muss ebenda λ/ϑ durch den Werth der magnetischen Kraft ersetzt werden.

§ 2. Die auf das Innere diëlektrisch polarisirter Körper wirkenden Kräfte.

Um eine Anzahl elektrischer und entweder leitender oder diëlektrisch polarisirbarer Körper aus unendlicher Ferne in eine durch den Index 0 zu bezeichnende Lage zu bringen, brauchen wir die vom Wege unabhängige Arbeit $\mathfrak{W}_0$; um sie in irgend eine andere, durch den Index 1 bezeichnete Lage zu bringen, dagegen die Arbeit W_1; folglich, um sie aus der Lage 0 im elektrisirten Zustande in die Lage 1 zu bringen, die Arbeit $\mathfrak{W}_1 - \mathfrak{W}_0$. Diese Verschiedenheit beider

Lagen kann auch verschiedene Formen der diëlektrischen Körper umfassen, da diese fern von den elektrisirten Körpern, ehe man sie in die Lage 1 überführt, beliebige Formänderungen erleiden können, ohne dass Arbeit gegen elektrische Kräfte zu leisten wäre. Elektrisirte Körper müsste man vorher in kleine Theile zerlegt denken, oder durch Leitung geladen. Beides giebt schliesslich, wie oben gezeigt wurde, denselben Betrag an Arbeit.

Als die zu variirende Normalform von $\mathfrak{W}$ können wir hier die einfachere in (2d) gegebene benutzen, welche nur die Grössen ε, e und φ enthält, nämlich:

$$\mathfrak{W} = \iiint \left\{ \varphi . \varepsilon - \frac{1+4\pi\vartheta}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right] \right\} dx.dy.dz. \quad (2d)$$

97 Wenn sich die diëlektrischen Massen bewegen, so ändert sich an den einzelnen Stellen des Raumes durch die Bewegung zunächst der Werth von ϑ. Bezeichnen wir beziehlich mit ξ, η, ζ die Verschiebungen, welche der Punkt x, y, z in Richtung dieser Coordinaten erleidet, und betrachten wir vorläufig ξ, η, ζ und ϑ als continuirliche Functionen der Coordinaten mit dem Vorbehalt, Fälle von sprungweiser Aenderung dieser Grössen an einzelnen Flächen nach gefundener Lösung als Grenzen einer immer jäher werdenden continuirlichen Aenderung zu betrachten: so würde nach der Verschiebung die durch dieselbe eingetretene Aenderung des Werthes von ϑ im Raumpunkte x, y, z, wenn wir mit σ die Dichtigkeit der Substanz bezeichnen, sein:

$$\delta\vartheta = -\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\cdot\xi - \frac{\partial\vartheta}{\partial y}\cdot\eta - \frac{\partial\vartheta}{\partial z}\cdot\zeta + \frac{\partial\vartheta}{\partial \log\sigma} d.\log\sigma.$$

Es ist aber nach bekannten Sätzen:

$$d\log\sigma = -\frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\zeta}{\partial z}.$$

Bezeichnen wir die von der Art der Substanz abhängige Constante:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\log\sigma} = \theta,$$

so wird also:

$$\delta\vartheta = -\xi \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \eta \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y} - \zeta \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \theta \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right]. \tag{3}$$

Ebenso wird sein, wenn sich ε mit den Körpern bewegt:

$$\delta\varepsilon = -\xi \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \eta \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} - \zeta \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \varepsilon \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right],$$

oder: (3a)

$$-\delta\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon\xi) + \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon\eta) + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon\zeta).$$

Wenn wir nun die Variation von $\mathfrak{W}$ zunächst so vollziehen, dass an jeder Stelle des Raumes die Werthe von φ ungeändert bleiben, so sind im Werthe von $\mathfrak{W}$ nur ϑ und ε in dem angegebenen Betrage zu variiren. Variiren wir nachher die Werthe von φ so, dass diese in die von dem neuen Gleichgewichtszustande verlangten Werthe übergehen, so ändert dies unter den gemachten Voraussetzungen nicht mehr den Betrag der gesammten Variation, da:

$$\delta_\varphi \mathfrak{W} = 0.$$

Der Energievorrath also wächst auch bei erhaltenem 398
Gleichgewichtszustande um den durch Variirung von ϑ und ε erhaltenen Betrag von $\delta\mathfrak{W}$, während gleichzeitig die durch die Magnetisirung hervorgebrachten ponderomotorischen Kräfte X, Y, Z ihre Arbeit leisten. Das Princip von der Constanz der Energie verlangt:

$$\delta\mathfrak{W} + \iiint [X.\xi + Y.\eta + Z.\zeta]\, dx\,.\,dy\,.\,dz = 0. \tag{3b}$$

Berechnen wir $\delta\mathfrak{W}$ aus (2d), so kann die Gleichung (3b) nicht erfüllt sein, wenn nicht zusammengefasst unter ein Integralzeichen die mit ξ, η, ζ multiplicirten Factoren einzeln gleich Null sind. Also die erste dieser Gleichungen ist:

$$\left.\begin{aligned} 0 = X + \varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] \\ - \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\theta\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right]\right. . \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die analogen Ausdrücke für Y und Z sind leicht zu bilden. Der hier gefundene Werth dieser Componenten umfasst nun alle die elektrischen Einflüsse zusammengenommen, welche auf

die Volumeneinheit der Substanz am Orte x, y, z einwirken. Diese können zum Theil directe Wirkungen entfernter Theile, zum Theil Wirkungen aus nächster Nähe sein. Wie man die Theilung zwischen beiden ausführt, ist einigermaassen willkürlich. Die Molecularkräfte müssen den Bedingungen unterworfen sein, welche das Princip von der Gleichheit der Action und Reaction stellt, und die aus der Theorie der elastischen Körper bekannt sind. Bezeichnen wir nämlich mit A Kräfte, die in Richtung der x, mit B solche, die in Richtung der y, mit C solche, die in Richtung der z fallen; mit dem Index x solche, die auf die Einheit einer der yz Ebene parallelen Fläche von Seite der positiven x wirken u. s. w., so muss sein:

$$A_y = B_x, \qquad B_z = C_y, \qquad C_x = A_z. \tag{4a}$$

Die auf die Flächeneinheit einer Ebene, deren Normale die Winkel a, b, c mit den positiven Coordinatenaxen macht, auf Seite dieser Normale wirkenden Kräfte, müssen eben deshalb sein:

309
$$\begin{aligned} A_n &= A_x . \cos a + A_y . \cos b + A_z . \cos c, \\ B_n &= B_x . \cos a + B_y . \cos b + B_z . \cos c, \\ C_n &= C_x . \cos a + C_y . \cos b + C_z . \cos c. \end{aligned}$$

Die auf die Volumeneinheit des inneren Raumes wirkenden Kräfte ergeben sich dann in der Form:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot A_x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot A_y + \frac{\partial}{\partial z} \cdot A_z \\ Y &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot B_x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot B_y + \frac{\partial}{\partial z} \cdot B_z \\ Z &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot C_x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot C_y + \frac{\partial}{\partial z} \cdot C_z . \end{aligned}\right\} \tag{4b}$$

Die Frage der Rückführung auf Molecularkräfte gestaltet sich also dahin, ob es möglich ist, die gefundenen Werthe von X, Y, Z in die Form (4b) mit Einhaltung der Bedingungen (4a) zu bringen, wobei die Grössen A, B, C nur von dem örtlichen Zustande der diëlektrischen Polarisation abhängen dürfen.

Nun kann man in der That die in (4) gegebenen Kräfte gänzlich auflösen in Molecularkräfte von der Form (4b).

Um diese Reduction auszuführen, dient folgende Umformung: Gleichungen (1) und (1a) ergeben:

$$\left.\begin{aligned} -4\pi\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x}\left[(1+4\pi\vartheta)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(1+4\pi\vartheta)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] \\ + \frac{\partial}{\partial z}\left[(1+4\pi\vartheta)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right], \end{aligned}\right\} \quad (4\,c)$$

daraus folgt, dass:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\varepsilon\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+4\pi\vartheta)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right] \\ -\frac{\partial}{\partial y}\left[(1+4\pi\vartheta)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right] - \frac{\partial}{\partial z}\left[(1+4\pi\vartheta)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right] \\ +\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{(1+4\pi\vartheta)\cdot\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\right\} \\ -2\pi\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\cdot\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]. \end{aligned}\right\} \quad (4\,d)$$

Drückt man die Differentialquotienten von φ mittels der Gleichungen (1) durch λ, μ, ν aus, so lassen sich die Kräfte 400
X, Y, Z in die Form (4b) bringen, wenn man setzt:

$$\left.\begin{aligned} A_x &= \frac{1+4\pi\vartheta}{8\pi\vartheta^2}[\lambda^2-\mu^2-\nu^2] + \frac{\theta}{2\vartheta^2}[\lambda^2+\mu^2+\nu^2] \\ B_y &= \frac{1+4\pi\vartheta}{8\pi\vartheta^2}[-\lambda^2+\mu^2-\nu^2] + \frac{\theta}{2\vartheta^2}[\lambda^2+\mu^2+\nu^2] \\ C_z &= \frac{1+4\pi\vartheta}{8\pi\vartheta^2}[-\lambda^2-\mu^2+\nu^2] + \frac{\theta}{2\vartheta^2}[\lambda^2+\mu^2+\nu^2] \\ A_y = B_x &= \frac{1+4\pi\vartheta}{4\pi\vartheta^2}\cdot\lambda\mu \qquad B_z = C_y = \frac{1+4\pi\vartheta}{4\pi\vartheta^2}\cdot\mu\nu \\ C_x = A_z &= \frac{1+4\pi\vartheta}{4\pi\vartheta^2}\cdot\nu\lambda, \end{aligned}\right\} \quad (4\,e)$$

oder auch:

$$A_x = \frac{1+4\pi\vartheta}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{\theta}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$A_y = B_x = \frac{1+4\pi\vartheta}{4\pi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

u. s. w.

Man kann diese Kräfte auch zusammengefasst denken in

1) einen Druck, der überall in Richtung der nach aussen gewendeten Normale jeder Grenzfläche wirkt im Betrage von:

$$\frac{1 + 4\pi(\vartheta - \theta)}{8\pi\vartheta^2}[\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2],$$

2) einer in Richtung der Kraftlinien wirkenden Spannung im Betrage von:

$$\frac{1 + 4\pi\vartheta}{4\pi\vartheta^2} \cdot [\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2] \, . \cos\eta \, ,$$

wobei mit η der spitze Winkel bezeichnet ist, den die Richtung der elektrischen Kraft mit der Normale der Oberfläche macht.

Bezeichnen wir die Resultante der elektrischen Kraft mit R:

$$R^2 = \frac{1}{\vartheta^2}(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2),$$

so ist die hier erwähnte Spannung auch zu setzen gleich:

$$\frac{1 + 4\pi\vartheta}{4\pi} \cdot R \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial N}$$

und fällt in die Richtung der in das Innere eintretenden Kraftlinie.

In der Form, wie die Werthe der Kräfte hier gefunden
401 sind, passen sie auch ohne Schwierigkeit für den Fall, dass an Grenzflächen der Körper der Uebergang in den Werthen der ϑ discontinuirlich wird, oder daselbst zusammengedrängte Flächenschichten von Elektricität liegen, da in den Werthen der A, B, C weder die Grösse ε, noch Differentialquotienten von ϑ nach den Coordinaten vorkommen. Will man jedoch zur Controle der Richtigkeit des Verfahrens die an der Grenze verschiedener Substanzen eintretenden Discontinuitäten im Werthe von ϑ gleich von vornherein als solche berücksichtigen, so ist bei der Ausführung der Rechnung zu beachten, dass die oben gebildete Gleichung:

$$\delta_\varphi \mathfrak{W} = 0$$

sich nur auf die Variation ersten Grades bezieht. Dem gesammten Betrage der Veränderung von W entspricht dieser Werth von δW aber nur, wenn die Quadrate und Producte der variirten Grössen gegen die Glieder ersten Grades ver-

nachlässigt werden dürfen. Wenn nun eine Körpergrenze, wo zwei Medien zusammenstossen, deren diëlektrische Constanten ϑ_1 und ϑ_0 sind, und die mit der Flächendichtigkeit e belegt ist, in Richtung der Normale N_0 so weit vorrückt, dass eine Schicht von der Dicke dN, welche bisher die Constante ϑ_0 hatte, den Werth ϑ_1 bekommt, so entsteht zunächst bei unveränderten Werthen von φ dadurch eine Aenderung von $\mathfrak{W}$, welche beträgt:

$$-\int d\omega \,.\, dN \left\{ \frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right] - e \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N_0} \right\}.$$

Bezeichnen wir den grössten Differentialquotienten, den φ in Richtung der Fläche hat, mit $\partial \varphi / \partial s$, so lässt sich dies auch schreiben:

$$-\int d\omega \,.\, dN \left\{ \frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N_0}\right)^2 \right] - e \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N_0} \right\}.$$

Denn zunächst, ehe die Werthe von φ auf den neuen Gleichgewichtszustand zurückgeführt sind, herrscht in der betreffenden Schicht noch der alte Werth des dortigen $\partial \varphi / \partial N_0$. Wenn nun dieser Uebergang in den Gleichgewichtszustand vor sich geht, tritt in dieser Schicht der Werth des Differentialquotienten $\partial \varphi / \partial N_1$ ein, der der anderen Seite der Fläche entspricht und von jenem wegen der Gleichung:

$$-4\pi e = (1 + 4\pi \vartheta_0) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N_0} + (1 + \pi \vartheta_1) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N_1} \qquad (4\text{f})$$ 402

endlich unterschieden ist. Setzen wir nun:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial N_0}\right)^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial N_1}\right)^2 - 2\, \frac{\partial \varphi}{\partial N_1} \cdot \frac{\delta \partial \varphi}{\partial N} + \left(\frac{\delta \partial \varphi}{\partial N}\right)^2,$$

wo annähernd:

$$\frac{\delta \partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi}{\partial N_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial N_1},$$

so ist diese Variation des Differentialquotienten in der Schicht von der Dicke dN endlich, und also ihr Quadrat nicht zu vernachlässigen. Die Glieder ersten Grades werden, wenn man von einer Gleichgewichtslage ausgeht, natürlich auch in diesem Falle gleich Null, ob die $\delta \varphi$ verschwindend klein oder end-

lich sind. Wenn wir aber das quadratische Glied der Variation fortnehmen, wird der Werth der Variation von $\mathfrak{W}$, der von dieser Lagenänderung der Fläche herrührt, nunmehr verändert in:

$$-\int d\omega . dN \left\{ \frac{\vartheta_1-\vartheta_0}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N_0}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2\right] - \frac{1+4\pi\vartheta_1}{8\pi}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial N_0}+\frac{\partial\varphi}{\partial N_1}\right]^2 - e\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial N_0}\right\}.$$

Mit Benutzung der Gleichung (4f) für den Werth von e reducirt sich dies auf:

$$\int d\omega . dN \left\{\frac{1+4\pi\vartheta_1}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N_1}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2\right]-\frac{1+4\pi\vartheta_0}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N_0}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2\right]\right\}.$$

Der von θ unabhängige Theil der nach dem Innern hin normal zur Grenzfläche wirkenden Kraft ergiebt sich hieraus gleich:

$$\frac{1+4\pi\vartheta}{8\pi}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2\right\}$$

übereinstimmend mit den in (4e) für die Coordinatenebenen gegebenen Werthen. Tangentiale Kräfte ergeben sich ebenfalls, wenn man nachträglich auch noch Verschiebungen der Schicht e in Richtung der Fläche voraussetzt.

In der von Cl. Maxwell gegebenen Darstellung[1]) dieses Kraftsystems fehlt das mit θ multiplicirte Glied. Es ist in unsere von Poisson's Voraussetzungen ausgehende Analyse eingetreten, da wir die Möglichkeit der Dehnung ponderabler
403 Diëlectrica mit in Betracht zogen. Für das zwischen den bewegten Körpern liegende Vacuum aber, beziehlich den Luftraum, ist ϑ nach Poisson's Voraussetzungen, denen wir hier gefolgt sind, überhaupt gleich Null und bleibt gleich Null, wie auch die Form und das Volumen des Vacuums sich verändern möge. Diese Voraussetzungen impliciren also für das Vacuum auch den Werth $\theta = 0$. In der That ergiebt sich bei Untersuchung dieses Punktes, dass nur in Medien, in denen entweder $\theta = 0$, oder die incompressibel sind, die ponderomotorischen Kräfte genau dieselbe Vertheilung zeigen, wie sie es im Vacuum nach Coulomb's Hypothese thun würden.

---

1) Cl. Maxwell, Electricity and Magnetism. Bd. 1. §§ 104—107. Oxford 1873.

Wenn wir nämlich das Medium als eine homogene Flüssigkeit betrachten, die kein eingeleitetes ε enthält, deren Druck p, deren Dichtigkeit σ sei, während P das Potential der äusseren auf die Masseneinheit der Flüssigkeit wirkenden ponderomotorischen Kräfte (z. B. Schwere) darstellt, so sind die Bedingungen des Gleichgewichts:

$$X = \frac{\partial p}{\partial x} + \sigma \cdot \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial p}{\partial y} + \sigma \cdot \frac{\partial P}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial p}{\partial z} + \sigma \cdot \frac{\partial P}{\partial z}.$$

In einer homogenen Flüssigkeit werden ϑ und σ nur vom Drucke p abhängen, und da:

$$\theta = \frac{\partial \vartheta}{\partial \, . \log \sigma},$$

so können wir die erste jener Gleichungen mit Berücksichtigung von (4) schreiben:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \sigma \cdot \frac{\partial P}{\partial x} = - \frac{\theta}{2 \vartheta^2} (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\theta}{\vartheta^2} (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) \right\},$$

oder wenn wir statt des Druckes p die Function ψ von σ einführen, für welche:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial p}{\partial \sigma},$$

so erhalten wir aus den drei obigen Gleichungen des Gleichgewichts die eine Integralgleichung:

$$\psi + P + C = \frac{\theta}{2 \sigma} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right], \qquad (4f)$$

welche anzeigt, dass unter Einwirkung der gefundenen Kräfte
auch flüssige Medien im Gleichgewicht sein können; ferner,
dass wenn $\theta = 0$, Druckunterschiede innerhalb der Flüssig- 404
keit durch die elektrischen Kräfte überhaupt nicht hervor-
gebracht werden.

Ist die Flüssigkeit incompressibel, so ist:

$$\psi = \frac{p}{\sigma},$$

und die elektrische Polarisirung bringt dann also neben den sonst schon bestehenden Druckunterschieden den Druck:

$$p_\iota = \frac{\theta}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right]$$

hervor. An der Grenze des Mediums tritt diesem aber der ebenso grosse, von θ abhängige Theil der Oberflächenkraft entgegen, den die Gleichungen (4c) anzeigen. Auf die jenseits der Grenze gelegenen Körper hat der von θ abhängende Druck also unter diesen Bedingungen gar keinen Einfluss. Es ist dies das folgerichtige Ergebniss der Betrachtung, durch welche θ eingeführt wurde. Dies geschah in der Voraussetzung, dass die Substanz durch Dichtigkeitsänderungen Aenderungen ihrer dielektrischen Constante erleiden könnte. Ist sie incompressibel, so ist diese Möglichkeit wirkungslos.

Nur in einem Medium, in welchem ϑ constant, in welchem also entweder $\theta = 0$ oder σ constant ist, ergiebt die Gleichung (4c) für $\varepsilon = 0$ auch:

$$\Delta \varphi = 0,$$

wie es nach Coulomb's Theorie im leeren Raume stattfinden muss. In einem anders beschaffenen Medium, für welches beide genannte Annahmen nicht zuträfen, würde auch die Differentialgleichung für φ sich ändern.

Auf temporär magnetisirte Substanzen sind die hier vorgetragenen Sätze ebenfalls zu übertragen, aber mit Ausschluss der Formänderungen permanenter Magnete, da wir nicht wissen, ob die Gleichung (3a) auf das Verhalten von solchen anwendbar ist.

In der Form (4c) sind die Fernkräfte ganz verschwunden und ersetzt durch die Reactionen des polarisirten Mediums. Es ist dies die Anschauungsweise von Faraday und Cl. Maxwell, die auch in dem von ponderabler Substanz
405 leeren Raume den Aether als Träger dieser Spannungen betrachten.

Man kann aber auch die zweierlei Ursachen nebeneinander bestehen lassen, wenn man die directen Fernwirkungen nicht aufgeben will. Da nämlich die Dichtigkeit der freien Elektricität im Raume dargestellt werden kann durch:

$$-\frac{1}{4\pi}\Delta \varphi,$$

und wir die identische Gleichung bilden können:

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \Delta \varphi - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\},$$

so können wir diesen Ausdruck mit 4π dividirt zum Werthe von X addiren, ohne diesen zu verändern. Dann ist:

$$X = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\Delta \varphi}{4\pi} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{A}_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{A}_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{A}_z). \qquad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}_x &= \frac{1}{2\vartheta}(\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2) + \frac{\theta}{2\vartheta^2}(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) \\ \mathfrak{A}_y &= \mathfrak{B}_x = \frac{1}{\vartheta}\lambda\mu \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{a})$$

u. s. w.

und da $\lambda^2/\vartheta = \vartheta.(\partial\varphi/\partial x)^2$ etc., so fallen im Raume, wo $\vartheta = 0$, die molecularen Spannungen fort. Diese wirken nur in den ponderablen Diëlectricis, und neben ihnen die Fernwirkungen der freien Elektricität, welche in dem ersten Gliede des Werthes von X angezeigt werden. Dass die von der Theorie angezeigten dehnenden Kräfte quer gegen die Kraftlinien bestehen, ist durch die von Hrn. G. Quincke kürzlich veröffentlichten Versuche für eine Reihe von Substanzen erwiesen worden.[1])

Eine Prüfung des Gesetzes der Anziehungen im Inneren einer diëlektrischen Flüssigkeit (Terpentinöl) ist von Hrn. P. Silow schon im Jahre 1875 im hiesigen physikalischen Institute ausgeführt worden.[2])

Schliesslich mache ich noch darauf aufmerksam, dass die 406
in (2d) gegebene einfachere Normalform von $\mathfrak{W}$ unverändert bleibt, wenn wir in ihr alle Coëfficienten $(1 + 4\pi\vartheta)$ sowie θ mit derselben Zahl N^2 multipliciren, dagegen alle Werthe von φ durch N dividiren, ε und e dagegen mit N multipliciren. Da nun aus dem Werthe von $\mathfrak{W}$ sowohl die Gesetze der Vertheilung der Potentialwerthe im Raume, wie die Werthe der ponderomotorischen Kräfte hergeleitet werden, so bleiben diese alle unverändert, wie übrigens auch die oben in (4c)

1) Quincke, Pogg. Ann. 1875. Bd. 156. S. 389.
2) Silow, Wied. Ann. 1880. Bd. 10. S. 161. 374. 513.

aufgestellte Gleichung für ε und die Werthe für die Kräfte [S. 813 hinter (4e)] erkennen lassen. Dadurch reducirt sich aber in den Gleichungen (5) der auf directe Fernwirkung der Elektricität zurückgeführte erste Theil der Kraft auf $1/N^2$, sodass in dem Maasse, wie N^2 grösser wird, die directe Fernwirkung immer mehr gegen den von den diëlektrischen Medien übertragenen Theil verschwindet. Das Quantum der freien Elektricität, gemessen durch $\Delta\varphi$, reducirt sich ebenfalls auf $1/N$ seines früheren Werthes. Für grosse Werthe von N verschwindet also freie Elektricität und Fernwirkung, was zu Maxwell's Theorie hinüberführt. Diese Sätze, die ich schon am Schlusse meiner ersten Abhandlung über Elektrodynamik aufgeführt habe, bestätigen sich also hier auch der vollständigeren Analyse der ponderomotorischen Kräfte gegenüber.

Galvanismus.

Digitized by Google

XLII.

Ueber galvanische Polarisation in gasfreien Flüssigkeiten.

Aus: Poggendorff's Annalen Bd. CL. S. 483—495. — Monatsberichte der Berliner Akademie 1873. S. 587—597.

Ich will mir erlauben, der Akademie Mittheilung zu machen 483
von den Ergebnissen einer Reihe von Versuchen, die ich über die galvanische Polarisation des Platins angestellt habe. Diese Versuche erforderten meist sehr lange Zeit, und ich bitte deshalb um Verzeihung, wenn ich eine Anzahl weiterer Fragen, die sich dabei aufdrängen, vorläufig unbeantwortet lassen muss.

Es ist bekannt, dass, wenn ein Daniell'sches Zinkkupferelement durch eine Wasserzersetzungszelle mit Platinelektroden geschlossen wird, ein Strom entsteht von schnell abnehmender Stärke, der bei der gewöhnlichen Art den Versuch anzustellen, nach kurzer Zeit zwar sehr schwach wird, aber selbst nach sehr langer Zeit nicht ganz aufhört. Wir wollen diesen Strom den 494
polarisirenden nennen. Wenn wir nachher die Zersetzungszelle von dem Daniell'schen Elemente trennen, und ihre Platinplatten mit dem Voltameter verbinden, so erhalten wir einen anderen Strom, den depolarisirenden, der in der Zersetzungszelle entgegengesetzte Richtung hat, als der polarisirende, und ebenfalls anfangs stark ist, unter den gewöhnlichen Bedingungen der Beobachtung aber meist bald bis zum Unwahrnehmbaren schwindet.

Es ist im Wesentlichen dieser einfache Versuch, auf den sich meine Untersuchungen beziehen. Die zu lösende Frage war: Worauf beruht die, wie es scheint, unbegrenzt lange Fort-

dauer des polarisirenden Stromes? In einer Kette von der angegebenen Zusammensetzung kann nämlich, wenn nicht noch andere Veränderungen darin vorgehen, die nach dem Faraday'schen Gesetze erfolgende elektrolytische Leitung in den Flüssigkeiten nicht zu Stande kommen ohne eine Verletzung des Gesetzes von der Erhaltung der Kraft. Wenn nämlich keine anderen Aequivalente potenzieller Energie verbraucht werden, müsste in einer solchen Kette das mechanische Aequivalent der in dem Stromkreise erzeugten Wärme gleich sein dem Arbeitsäquivalent der bei der Elektrolyse wirksam gewordenen und verbrauchten chemischen Kräfte. Letzteres ist aber, wenn die Zersetzung nach dem Gesetze der elektrolytischen Aequivalente vor sich geht, negativ[1]), und kann also nicht einer durch den Strom zu erzeugenden positiven Wärmearbeit gleich sein. Wasserzersetzung kann also, wenn das
485 Faraday'sche Gesetz ausschliesslich gültig ist, durch ein Daniell'sches Element auch in der minimalsten Menge nicht dauernd unterhalten werden. In der That wird ein Freiwerden der Gase, welche das Wasser zusammensetzen, bei dem oben beschriebenen Versuche nicht beobachtet, wenn auch der Strom noch so lange fortdauert.

Dabei ist es wohl zu bemerken, dass auch nicht durch Diffusion oder irgend einen der Diffusion ähnlichen Process die bei der Polarisation der Platten gegen diese hingedrängten Molekeln von Wasserstoff und Sauerstoff frei werden und sich etwa wieder unelektrisch von den Platten entfernen könnten. Ein solcher Vorgang würde schliesslich immer wieder als Arbeitsresultat eine Wasserzersetzung ergeben, für welche keine äquivalente treibende Kraft in dem Daniell'schen Ele-

---

1) Nach Andrews giebt 1 grm Wasserstoff, zu Wasser verbrennend, 33808 Wärmeeinheiten, nach Favre und Silbermann 34462. Für jedes Gramm Wasserstoff werden in dem Daniell'schen Elemente 32,5 grm Zink aufgelöst und dafür die äquivalente Menge Kupfer niedergeschlagen. Diese Menge Zink, wenn sie Kupfer aus der Verbindung mit Schwefelsäure scheidet, erzeugt nach Favre nur 23205 Wärmeeinheiten. Dem entsprechend ist auch eine elektromotorische Kraft von mindestens anderthalb Daniell's nöthig, um die schwächste dauernde Wasserzersetzung zu unterhalten.

mente gegeben wäre. Wenn, wie es wahrscheinlich ist, bei der galvanischen Polarisation der Elektroden eine veränderte Anordnung der Wasserstoff- und Sauerstoff-Atome, sei es im Innern, sei es an den Grenzflächen der Flüssigkeit, eintritt, so werden diese Theilchen jedenfalls durch (chemische oder elektrische) Anziehungskräfte an ihrer Stelle festgehalten, bis neue hinreichend starke Kräfte zu Hülfe kommen, um sie frei zu machen. Welche Beziehungen zwischen elektrischen und chemischen Anziehungskräften man auch annehmen möge, so wird, wenn das Gesetz von der Erhaltung der Kraft gilt, eine elektrische Anziehung auf eins der Elemente, deren Potential gross genug ist, um die chemische Verwandtschaft zu überwinden, eben selbst wiederum nur durch eine Kraft von gleichem oder grösserem Arbeitsäquivalent überwunden werden können, um das angezogene Theilchen frei beweglich in der Flüssigkeit zu machen.

Wenn nun die elektromotorische Kraft des Daniell'schen Elementes in unserem Falle keine sichtbare Wasserzersetzung hervorbringt, so bringt sie doch Polarisation der Elektroden hervor, und diese ist selbst ein Arbeitsäquivalent. Denn die polarisirten Platten sind nachher, von dem polarisirenden galvanischen Elemente getrennt, im Stande selbstständig für eine gewisse Zeit einen elektrischen Strom hervorzubringen, also 496
Wärme im Leitungsdrahte zu entwickeln, beziehlich bei passender Anordnung alle anderen Formen der Arbeit zu leisten, welche galvanische Ströme leisten können. Im Zustande der Polarisation haben wir es offenbar mit einer veränderten Anordnung der ponderablen Atome und der Elektricitäten in der Zersetzungszelle und an ihren Elektroden zu thun, über deren besondere Beschaffenheit wir hier weiter keine specielleren Annahmen zu machen oder Vermuthungen aufzustellen nöthig haben, so lange es sich nur um Berücksichtigung der Arbeitswerthe handelt. Der Zustand der Polarisation ist zu betrachten als ein neuer Gleichgewichtszustand, dem die Zersetzungszelle unter dem Einflusse der Elektrisirung der Elektroden zustrebt, und der, wenn die in den Elektroden angehäufte Elektricität sich entladen kann, wieder in den Zustand elektrisch-neutralen Gleichgewichts zurückstrebt. Da aber zur Herstellung eines

veränderten Gleichgewichts in einem begrenzten Systeme von Körpern, wie die Zersetzungszelle ist, immer nur ein endlicher Betrag von Arbeit nöthig ist, so kann die Herstellung der Polarisation immer nur einen Strom von endlicher Dauer geben, oder einen solchen, dessen Intensität sich asymptotisch der Null nähert, und der polarisirende Strom könnte im Ganzen nur eben so viel Elektricität in der einen Richtung strömen machen, als der depolarisirende in der entgegengesetzten Richtung.

Insoweit dies der Fall ist, — und meine Versuche zeigen, dass man in gasfreien Flüssigkeiten und bei gasfreien Elektroden einem solchen Zustande wenigstens sehr nahe kommen kann, — wirkt die Zersetzungszelle wie ein Condensator von sehr grosser Capacität. In der That, wenn man nach der gewöhnlichen Vorstellungsweise negativ geladenen Sauerstoff der einen Elektrode, positiv geladenen Wasserstoff der anderen Elektrode genähert denkt, aber so, dass ein Austausch der Elektricität zwischen der Elektrode und den genannten Bestandtheilen des Wassers nicht möglich ist, so wird sich auf der Elektrode
487 selbst die entsprechende Menge der entgegengesetzten Elektricität anhäufen können, und jede Elektrode würde dann mit der Flüssigkeit einen Condensator von verschwindend kleiner Dicke der isolirenden Schicht, und eben deshalb von ungeheurer Capacität bilden. Diese Analogie ist neuerdings von den Herren Varley[1]) und Maxwell[2]) betont worden.

In der That entsprechen die Erscheinungen, die bei Einschaltung eines polarisirbaren Plattenpaares in einen Stromkreis entstehen, in ihren Hauptzügen denen, welche ein Condensator von sehr grosser Capacität darbieten würde. Der polarisirende Strom ist der Strom, welcher den Condensator ladet, der depolarisirende der, welcher ihn entladet. Man muss sich die Capacität des Condensators nur so gross vorstellen, dass seine Ladung und Entladung wahrnehmbare Zeiträume, Secunden oder Minuten, in Anspruch nimmt. Herr Varley hat ver-

---

1) Proceed. Roy. Society. Jan. 12. 1881.

2) A Treatise on Electricity and Magnetism. Oxford 1873. Vol. I, pag. 322.

sucht, die Capacität eines solchen Condensators zu messen; indessen wird das Folgende zeigen, dass, wenn nicht ganz besondere Vorsichtsmaassregeln bei den Versuchen gebraucht werden, noch andere Vorgänge eine wesentliche Rolle spielen und das Endergebniss in hohem Grade beeinflussen können.

Die Vorgänge bei wirklichen Versuchen mit polarisirbaren Elektroden unterscheiden sich nun von denen, die an einem gut isolirten Condensator vorgehen, dadurch, dass der ladende Strom viel länger dauert als der entladende, langsamer abnimmt als der letzte und eigentlich nie aufhört. In dieser Beziehung erscheint eine Zelle mit polarisirbaren Platinplatten einem Condensator mit schlecht isolirender Zwischenschicht ähnlich, und selbst die Erscheinungen des elektrischen Rückstandes finden ihr Analogon in der nach jeder Unterbrechung des Stromes neu hervortretenden Verstärkung der Polarisation.

Es läge nahe, bei einer polarisirten Zersetzungszelle den- 488
selben Grund für die Fortdauer des ladenden Stromes anzunehmen, wie für einen schlecht isolirenden Condensator, nämlich die Existenz einer geringen metallischen Leitungsfähigkeit in den elektrolysirbaren Flüssigkeiten; was eine Beschränkung der Gültigkeit von Faraday's Gesetz einschliessen würde. Ehe wir indessen einen solchen Schluss ziehen, ist zu untersuchen, ob nicht noch andere Veränderungen in der Flüssigkeit und in den Elektroden vor sich gehen, welche ähnliche Erfolge haben könnten. Und zwar wäre hier hauptsächlich an die Rolle zu denken, welche die in der Flüssigkeit aufgelösten oder nach Graham's Entdeckung in dem Metall der Elektroden occludirten Gase spielen können.

Es ist bekannt, dass die galvanische Polarisation einer Platinplatte, welche als Wasserstoffelektrode in einer Zersetzungszelle dient, durch directe Berührung mit dem Sauerstoff der Luft, durch Zuleiten lufthaltigen Wassers und durch Berührung von solchen Flüssigkeiten, welche Sauerstoff chemisch gebunden enthalten, ihn aber an den ausscheidenden Wasserstoff abgeben können, vermindert oder aufgehoben wird.

Dasselbe gilt für die Sauerstoffpolarisation einer Platinplatte, wenn sie mit im Wasser gelöstem Wasserstoff oder

anderen chemischen Verbindungen in Berührung ist, welche Sauerstoff aufnehmen können.

Ausserdem wissen wir, dass das Platin nach Graham's Entdeckung, wenn auch in geringerem Maasse als das Palladium, die Fähigkeit hat, Wasserstoff in seine Masse aufzunehmen. Die Aufnahme von Sauerstoff, welche wir beim geschmolzenen Silber kennen, konnte für das Platin auf chemischem Wege allerdings durch Graham nicht direct nachgewiesen werden; doch scheinen die im Folgenden zu beschreibenden Polarisations-Erscheinungen anzuzeigen, dass für den Sauerstoff ganz ähnliche Verhältnisse wie für den Wasserstoff bestehen, und dass nur die Menge des vom Platin zu occludirenden Sauerstoffes viel geringer ist als die des Wasserstoffes.

489 Wenn nun ein elektrischer Strom durch eine Wasserzersetzungszelle geht, deren Flüssigkeit Wasserstoff gelöst enthält, oder deren Platinelektroden ihn occludirt haben, so wird an derjenigen Elektrode, zu welcher der Strom den Sauerstoff hindrängt, dieser wieder zu Wasser werden können, indem eine entsprechende Menge gelösten Wasserstoffes aus der Flüssigkeit, oder occludirten Wasserstoffes aus der Elektrode dazu verbraucht wird. Andererseits wird statt dieses bisher freien (wenigstens nicht mit Sauerstoff chemisch vereinigten) Wasserstoffes eine gleiche Menge elektrolytisch ausgeschiedenen Wasserstoffes an der anderen Elektrode wiedererscheinen, und entweder in der Flüssigkeit sich lösen, oder wenn Zeit und Raum dazu ist, in die Platinelektrode selbst hineingedrängt werden. Obgleich hierbei also Elektrolyse in der Flüssigkeit stattfindet, so kommen doch schliesslich die beiden Producte der Elektrolyse nicht zum Vorschein; sondern das Endresultat ist, dass freier Wasserstoff an oder in der einen Elektrode verschwindet und an oder in der anderen in vermehrter Menge auftritt. Ich möchte mir erlauben, für diesen Vorgang, der bei den Polarisationsströmen eine hervorragende Rolle spielt, den Namen der elektrolytischen Convection vorzuschlagen. Es ist bei diesem Processe daher auch von der den Strom treibenden elektromotorischen Kraft nicht die Arbeit gegen die chemischen Verwandtschaftskräfte des Wasserstoffs und Sauerstoffs zu leisten, welche geleistet werden muss, wenn Wasser in diese

seine beiden Elemente endgültig getrennt werden soll, und elektrolytische Convection kann deshalb durch eine schwache elektromotorische Kraft unterhalten werden, welche durchaus nicht im Stande ist, Wasser wirklich zu zersetzen, wie z. B. durch die Kraft von einem Daniell'schen Elemente.

Das Gleiche gilt, wenn die Flüssigkeit sauerstoffhaltig ist, oder die Platinplatten Sauerstoff occludirt enthalten sollten. Dann verschwindet durch die elektrolytische Convection freier Sauerstoff auf der einen Seite, während die gleiche Menge auf 490
der anderen Seite zum Vorschein kommt.

Der auf solche Weise bei dem Vorgange der Convection an der einen Elektrode frei gewordene Wasserstoff oder Sauerstoff ist, so weit er nicht in die Elektrode occludirt wird, offenbar ebenso frei, in der Flüssigkeit zu diffundiren, durch Strömungen derselben fortgeführt zu werden, beziehlich sich als Gas zu entwickeln, wenn die Flüssigkeit gesättigt ist, wie die bei der gewöhnlichen Elektrolyse entwickelten Gase. Indem er in der Flüssigkeit diffundirt, wird er auch wieder zur anderen Elektrode gelangen können, um wieder der elektrolytischen Convection zu verfallen, und auf diese Weise in fortdauerndem Kreislaufe einen gewissen Grad elektrischer Strömung unterhalten können.

Ein Daniell'sches Element kann also in einer Wasserzersetzungszelle mit Platinelektroden nicht bloss dann, wenn die Flüssigkeit mit der Luft in Berührung ist, einen nie aufhörenden schwachen Strom unterhalten, sondern auch in einem vollkommen abgeschlossenen Gefässe, wenn dessen Elektroden mit Sauerstoff gesättigt sind und seine Flüssigkeit Sauerstoff aufgelöst enthält.

Der Apparat, mit dem ich Versuche in dieser Richtung angestellt habe, war ein mit einer Quecksilber-Luftpumpe verbundenes und hermetisch geschlossenes Voltameter, welches zwei grosse cylindrisch zusammengebogene Platinplatten von annähernd 180 und 300 Quadratcentimeter Fläche enthält, die durch eingeschmolzene Platindrähte nach aussen hin Ableitung hatten. Die Flüssigkeit in diesem Voltameter reichte nach unten bis an das Quecksilber der Pumpe, mit dem sie gehoben und gesenkt wurde, während die über der Flüssigkeit sich an-

sammelnden Gase durch einen besonderen Hahn immer wieder entfernt werden konnten. So war es möglich, über der Flüssigkeit immer wieder ein nur Wasserdämpfe enthaltendes Vacuum herzustellen und die Flüssigkeit allmählig von jeder Spur aufgelösten Gases zu befreien.

491 Sauerstoffsättigung der Platten erreicht man dadurch, dass man mehrere Tage lang an ihnen beiden durch einen schwachen Strom, der durch einen eingeschobenen Platindraht als Wasserstoffelektrode eingeleitet wird, Sauerstoff entwickelt. Ich habe Wochen lang einen nur durch elektrolytische Convection unterhaltenen Strom unter dem Einfluss eines begrenzten Sauerstoffvorrathes in hermetisch abgesperrter Flüssigkeit bestehen sehen. Charakteristisch für den Einfluss der Flüssigkeit ist hierbei, dass jede mechanische Bewegung derselben, namentlich aber auch circulirende Bewegungen, die durch Temperaturänderungen hervorgerufen werden, den Strom erheblich verstärken. Dies fällt in gasfreien Flüssigkeiten so gut wie ganz fort.

Viel wirksamer als Sauerstoff ist in dieser Beziehung Wasserstoff, weil er sich in sehr grosser Menge in den Platten ansammeln kann. Bei reichlicher Sättigung der Platten und der Flüssigkeit mit elektrolytisch entwickeltem Wasserstoff verhält sich eine solche Zersetzungszelle gegen schwächere Ströme Stunden lang oder selbst Tage lang wie ein unpolarisirbares Element, ähnlich einer Silberlösung zwischen Silberelektroden. Man kann, trotzdem sie eingeschaltet ist, Widerstandsmessungen in ihrem Kreise mit der vollkommensten Genauigkeit ausführen, und sie zeigt nach Unterbrechung des Batteriestromes kaum eine Spur von Polarisation. Bisher ist es mir besser gelungen, diesen Zustand der Wasserstoffsättigung unter Anwendung von verdünnter Schwefelsäure als elektrolytischer Flüssigkeit hervorzurufen, denn mit destillirtem Wasser.

Die Constanz des Stromes findet aber ihr Ende, wenn durch die Convection des Wasserstoffes der Vorrath desselben in der einen Platte anfängt sparsam zu werden.

Unter diesen Bedingungen kann man auch zuweilen bei Anwendung nur eines, aber gut leitenden Daniell'schen Ele-

mentes Entwickelung von Wasserstoff als Gas an der Platte beobachten, zu der er hingeführt wird, also scheinbare Wasserzersetzung. Dass dies vorkommt, ist schon von früheren Beobachtern gesehen worden, aber ohne nähere Feststellung der Bedingungen.

Nur wenig anders verlaufen die Dinge, wenn ohne Ver- 492
änderung des Zustandes der Elektroden die elektrolytische Flüssigkeit gasleer gemacht wird dadurch, dass man sie Wochen lang im Vacuum der Quecksilberpumpe erhält. Stark verdünnte Schwefelsäure gelang es mir so frei von Gas zu machen, dass sie beim Auspumpen sich nicht mehr vom Gefässe loslöste, sondern unter dem negativen Drucke einer Quecksilbersäule von 60 mm noch nicht zerriss. Aber auch bei Anwendung von destillirtem Wasser habe ich es stets dahin bringen können, dass die aus dem Wasser etwa noch entweichenden Spuren von Luft im Laufe von drei bis vier Tagen den Druck in dem Vacuum, dessen Volumen etwa ein Sechstel von dem der Flüssigkeit betrug, und welches nur Wasserdampf enthielt, nicht mehr in wahrnehmbarer Weise steigerten.

Auch noch unter diesen Umständen traten, wenn die Platten mit einem der beiden Gase reichlich beladen waren, Ströme ein, welche mehrere Tage dauern konnten, aber doch schliesslich bis zu nicht mehr wahrnehmbarer Stärke herabsanken. Der hierbei gebrauchte Multiplicator zeigte einen Grad Ablenkung, wenn ihn ein Strom durchfloss, der in 24 Stunden 0,03 ccm Wasserstoff zu entwickeln im Stande war. Ein zweiter Unterschied besteht darin, dass, wie schon bemerkt, die Verstärkung des Stromes durch Bewegung der Flüssigkeit fortfiel.

Dagegen zeigte sich in diesen Fällen der Einfluss der in den Platinplatten occludirten Gase sehr deutlich, wenn ich die Grösse des in ihnen beiden enthaltenen Gasvorraths veränderte. Zu dem Ende führte ich bei anfänglicher Sauerstoffbeladung der Platten an beide leitend verbundene Platten auf elektrolytischem Wege kleine Mengen Wasserstoff. Die zweite Elektrode war das mit ein wenig Zink versetzte Quecksilber, die elektrolytische Flüssigkeit war destillirtes Wasser. Je

öfter ich das that, desto kürzer wurde sowohl der Strom, den ein Daniell'sches Element in dem Voltameter hervorrief, als auch der Depolarisationsstrom nach Ausschaltung des Daniell's.
493 Dieselben Stadien der Stromstärke, die anfangs bei reichlicher Sauerstoffbeladung in 24 Stunden durchlaufen waren, wurden schliesslich bei möglichst gereinigten Platten in 18 Minuten durchlaufen. Führte ich aber, nachdem dieses Stadium eingetreten war, noch weiteren Wasserstoff an die Platten, so stieg wieder die Stromesdauer, weil nun Wasserstoffbeladung der Platten eintrat. Uebrigens glaube ich hierbei noch nicht das Minimum der Gasbeladung der Platten erreicht zu haben, weil auch bei dem Minimum der Stromesdauer, das ich erreichte, ein kleiner Unterschied in der Zeitdauer zu Gunsten des polarisirenden Stromes im Vergleich mit dem depolarisirenden bestehen blieb. Es ist aber eine sehr langwierige Arbeit, dieses Minimum herzustellen, weil die Gase sich im Metall ausserordentlich langsam vorwärts bewegen, wenn sie durch keine äussere elektromotorische Kraft gedrängt werden; die letzten Reste derselben fortzuschaffen ist deshalb äusserst zeitraubend.

Und diese Langsamkeit der Gasbewegung zu zeigen, will ich nur noch Folgendes anführen: Polarisirte Platinplatten, in den gewöhnlichen lufthaltigen Flüssigkeiten stehend, verlieren ihre Polarisation anscheinend in wenigen Stunden oder selbst Minuten, wenn sie miteinander leitend verbunden werden. Auf diesem Umstande beruhte ja z. B. die Brauchbarkeit der von Hrn. du Bois-Reymond früher gebrauchten polarisirbaren Elektroden für thierisch-elektrische Versuche. Dagegen in gasfreier Flüssigkeit schwindet die Polarisation anfangs zwar schnell, später aber sehr langsam. Ich habe in einem solchen Falle den depolarisirenden Strom 16 Tage lang am Multiplicator beobachtet. Aus den elektrolytischen Aequivalenten des vorher zur Polarisirung der Platten gebrauchten Stromes und des nachher noch bestehenden Depolarisationsstromes ergab sich, dass noch Monate vergehen mussten, ehe ein so schwacher Strom, wie der letztgenannte, den Rest der noch vorhandenen Gasbeladungen hätte beseitigen können.

Die Erscheinungen, welche bei der Polarisation denen des Rückstandes in einer Leydener Flasche ähnlich sind, er- 494
klären sich durch die Occlusion der Gase. Wenn Wasserstoff in eine Platinplatte hineingedrängt wird, und man den Strom einige Secunden unterbricht, so hat das Gas während dieser Unterbrechung Zeit, sich weiter in das Innere vorzuschieben und dadurch seine Dichtigkeit in den oberflächlichen Schichten zu vermindern. Schliesst man den Stromkreis wieder, so ist der Widerstand gegen das Eindringen neuen Wasserstoffes dadurch vermindert worden, der Strom wird stärker sein können. Umgekehrt kann der Depolarisationsstrom das bis zur Oberfläche vorgedrungene Gas beseitigen: unterbricht man ihn, so wird der von innen langsam herandrängende Wasserstoff sich an der Oberfläche anhäufen und deren Polarisation verstärken können. Es ist bekannt, dass hinter einer Sauerstoffpolarisation in einer Platinplatte noch gleichzeitig eine ältere Wasserstoffpolarisation bestehen kann, welche letztere zum Vorschein kommt, wenn erstere geschwunden ist, und umgekehrt.

Soweit ich sehe, erklären sich die hierher gehörigen Erscheinungen ohne Schwierigkeit, wenn man für die Fortbewegung der in den Metallen occludirten Gase dieselben Gesetze wie für die Wärmeleitung annimmt.

Endlich ist zu bemerken, dass in diesen Fällen, nachdem der condensatorische Strom verlaufen ist, d. h. die nur an der Oberfläche der Platten gebundenen Elektricitätsmengen entladen sind, weitere Strömung nur noch eintreten kann in dem Maasse, als noch Gasquanta aus dem Innern des Metalls an die Oberfläche dringen. Wenn dies nur noch sehr langsam geschieht, so wird die Stromstärke in dem Kreise so gut wie unabhängig von seinem Widerstande, sodass in meinen Versuchen Einschaltungen von 20 bis 60 Meilen Telegraphendraht zwar für einige Secunden die Nadel des Multiplicators zurückweichen machten, sie dann aber bald wieder auf ihre frühere Ablenkung kommen liessen. Der Widerstand des übrigen Stromkreises betrug dabei etwa nur zwei Meilen desselben Drahtes;
das Verhalten der bei wechselndem Widerstande im Kreise 495
eintretenden dauernden Stromstärken war ebenso, als bestände

an der Oberfläche der Platten ein Uebergangswiderstand, gegen den 40 bis 60 Meilen Draht verschwindend klein waren. Dieser ungeheuere scheinbare Uebergangswiderstand bestand aber nur für die gerade vorhandene Stromrichtung; sowie man einen Strom von entgegengesetzter Richtung hervorrief, war nichts von einem solchen Widerstande vorhanden. Dies gilt nicht nur für Platinelektroden, die durch ein Daniell'sches Element nahehin bis zum Maximum polarisirt sind, sondern auch für solche, die sich bis beinahe zum Verschwinden der Polarisation wieder depolarisirt haben und also ihrem natürlichen Zustande möglichst nahe gekommen sind.

XLIII.

Bericht über Versuche des Hrn. Dr. E. Root aus Boston, die Durchdringung des Platins mit elektrolytischen Gasen betreffend.

Aus: Poggendorff's Annalen Bd. CLIX. S. 416—420. — Monatsberichte der Berliner Akademie 1876, 16. März.

Die von mir unter dem 21. Juli 1873 der Akademie vor- 416
gelegten Versuche hatten mich zu der Ansicht geführt, dass bei der galvanischen Polarisation nicht nur oberflächlich haftende, sondern auch tiefer in das Platin eingedrungene Theile der Gase eine Rolle spielen müssten, wovon die Möglichkeit durch die von Graham am Palladium und Platin ausgeführten Versuche schon angezeigt war. Um das Eindringen der Gase in das Platin bei der galvanischen Polarisation wirklich zu erweisen, veranlasste ich Hrn. Dr. Elihu Root im Physikalischen Laboratorium der hiesigen Universität durch Versuche zu ermitteln, ob der durch Elektrolyse gegen die eine Seite einer dünnen Platinplatte geführte Wasserstoff nach einiger Zeit sich auch an der entgegengesetzten Seite dadurch bemerkbar machen werde, dass er auch dort galvanische Polarisation hervorbringe. Diese Versuche haben in der That den erwarteten Erfolg ergeben.

An die beiden entgegengesetzten Seiten eines 0,02 mm dicken und vertical gestellten Platinbleches wurden mit Siegellack die ebenen Ränder zweier Glasgefässe angekittet, welche die Gestalt von tubulirten Retortenvorlagen hatten. Die eine Oeffnung eines jeden war an die genannte Platinplatte mit Siegellack angekittet, die zweite nach oben gewendet. Die

Ränder der Platinplatte ragten nach allen Seiten über die Schicht des Kittes hinaus, sodass sicher keine leitende Flüssigkeitsbrücke zwischen der einen und anderen Seite des Platins bestand. Die Glasgefässe wurden mit destillirtem Wasser gefüllt, dem einige Tropfen reiner Schwefelsäure zugesetzt waren.
417 Durch die oberen Oeffnungen der Gefässe ragten zwei andere Platinplatten in dieselbe hinein. Vor der Zusammensetzung des Apparates waren die drei Platinplatten durch Ausglühen und Waschen möglichst gereinigt. Um zu prüfen, ob das Platin vollkommen dicht sei, wurde eine Probe des angewendeten Platinbleches als Verschluss des einen Schenkels eines in beiden Schenkeln luftleer gemachten Manometers aufgeschmolzen. Es fand sich, dass keine merkliche Spur Luft im Laufe von zwei Monaten eingedrungen war.

Da die Fortbewegung der Gase im Platin jedenfalls nur äusserst langsam geschieht, und der kleine Vorrath, der bis zur jenseitigen Oberfläche gedrungen ist, leicht erschöpft werden kann, so wurde der ganze Apparat dauernd unter der ausgepumpten Glocke einer Luftpumpe gehalten, sodass nur die Zuleitungsdrähte zu den drei Platinplatten nach aussen reichten. Ferner musste vermieden werden, einen auch nur kurz dauernden depolarisirenden Strom zu Stande kommen zu lassen. Es musste deshalb statt des Galvanometers ein Instrument angewendet werden, was ohne dauernden Strom den bestehenden Potentialunterschied anzeigen konnte. Hierzu erwies sich das Lippmann'sche Capillarelektrometer[1]) als sehr brauchbar. Es wurde bei den Beobachtungen das Mikroskop auf eine bestimmte Stelle der capillaren Glasröhre eingestellt erhalten, und der Unterschied der Drucke bestimmt, welche nöthig waren, um bei alternirender Verbindung der beiden Pole des Elektrometers mit den beiden Platinplatten die Quecksilbersäule in der capillaren Röhre bis an denselben Theilstrich zu führen. Positive Druckdifferenz zeigt im Folgenden ein positiveres Potential in der Platte *B* als in der Platte *C* an. Der Druckunterschied 1 entspricht etwa dem von $\frac{1}{300}$ eines Daniell'schen Elementes.

---

1) Pogg. Ann. Bd. CXXXXIX. S. 551.

Nachdem der Apparat zusammengesetzt war, liess man die drei Platinplatten zunächst 18 Stunden lang unter sich und mit der Erde in leitender Verbindung, um die Reste älterer 413
Polarisation zu beseitigen. Dann wurden sie voneinander und von der Erde isolirt, und es wurde nun 14 Tage lang täglich die elektromotorische Kraft zwischen der mittleren *B* und einer der äusseren *C* untersucht, um zu ermitteln, ob aus anderen Ursachen schnelle Aenderungen der Polarisation zu erwarten wären. Die Kraft fiel während der ersten Hälfte dieser Zeit von 4,83 bis 0,40 und stieg dann allmählig auf 1,37, um gegen den Schluss der genannten Periode wieder zu sinken; die Aenderungen geschahen aber langsam und ohne schnelle Sprünge.

Es zeigte sich nun, dass, wenn auch nur fünf Minuten lang zwei Daniell'sche Elemente zwischen der einen äusseren Platte *A* und der mittleren *B* geschlossen wurden, welche Wasserstoff gegen die Platte *B* führten, eine Aenderung im elektromotorischen Verhalten der anderen Seite von *B* gegen die zweite äussere Platte *C* eintrat.

So war z. B. in einer Versuchsreihe unmittelbar vor dem Schluss des Stromes durch *A* und *B* die Druckdifferenz zwischen *B* und *C* — 0,6 gewesen. Nach einer Durchströmung von 5 Minuten Dauer, wobei die Platte *C* elektrisch isolirt blieb, war die Druckdifferenz + 5,2, stieg dann bei isolirten Platten im Laufe der nächsten drei Stunden auf 17,1, und war 18 Stunden später wieder — 3.

In anderen Versuchen wurde der Strom zwischen *A* und *B* 12 oder 18 Stunden lang geschlossen. Dann war der Potentialunterschied zwischen *B* und *C* gleich nach Unterbrechung jenes Stromes am grössten und nahm in den darauf folgenden Stunden allmählig ab.

Wenn der Strom zwischen *A* und *B* die entgegengesetzte Richtung erhielt, sodass er den Sauerstoff gegen *B* drängte, so trat auch auf der anderen Seite von *B* mit derselben Schnelligkeit und zum Theil mit derselben, zum Theil selbst mit grösserer Intensität der entgegengesetzte Erfolg ein als bei der früheren Wasserstoffpolarisation. Ob dieser Unterschied in der Grösse der beobachteten Wirkung nicht durch die vorausgegangene

419 Wasserstoffpolarisation bedingt sei, lässt sich aus den bisher vorliegenden Versuchen nicht entscheiden. Da zuweilen der Zustand der Platten *B* und *C* durch Schliessung derselben zum Kreise ausgeglichen worden ist, kann eine merkliche Menge Wasserstoffes dabei auch auf *C* übertragen worden sein, und davon die stärkere Wirkung des mit Sauerstoff polarisirten *B* herrühren. Ueberhaupt scheiterten quantitative Bestimmungen der Wirkung zunächst daran, dass die einmal in die Platte hineingetriebenen Gasmengen in deren Innerem sich nur sehr langsam ausgleichen, und auch nur langsam wieder entfernt werden können. Uebrigens zeigt sich die Wirkung auch ganz deutlich bei Anwendung von nur einem Daniell'schen Elemente zwischen *A* und *B*, und andererseits war die Wirkung von zwei Bunsen'schen Elementen nur unbedeutend grösser als von zwei Daniell's. Das letztere kann seinen Grund darin finden, dass bei eintretender elektrolytischer Gasentwickelung die entweichenden Theile der Gase sich der Kraft entziehen, welche sie in das Platin hineindrängt, und daher weitere Verstärkung der elektromotorischen Kraft wohl die Wasserzersetzung vermehrt, aber nicht oder nur wenig die Eindrängung der Gase in das Platin steigert, wie ja auch bekannt ist, dass die Polarisation der Platten, sobald es einmal bis zur Gasentwickelung gekommen ist, nur wenig höher gesteigert werden kann.

Wurden die Platten *B* und *C* für kurze Zeit leitend verbunden, nachdem *B* von *A* her mit Gas beladen war, so war unmittelbar nach Unterbrechung dieser Leitung der Potentialunterschied zwischen beiden gleich Null, stieg dann aber wieder an nach derselben Seite, nach welcher er vor der leitenden Verbindung bestanden hatte, in ganz ähnlicher Weise, wie dies zu geschehen pflegt, wenn die beiden Platten durch einen direct durch sie geleiteten elektrischen Strom polarisirt worden sind.

Dieses Wiedererscheinen einer vorher bestandenen Polarisation habe ich schon früher dadurch zu erklären gesucht, dass
420 der depolarisirende Strom nur aus der oberflächlichsten Schicht des Platins die Gase wegnimmt, und später neue Gasvorräthe aus der Tiefe zur Oberfläche dringen. Dies geschieht also in

derselben Weise, wenn der ganze Gasvorrath von der anderen Seite hergekommen ist.

Versuche, welche Hr. Dr. Root mit einem passend abgeänderten Apparate anstellte über die Frage, ob freier Wasserstoff, der mit der abgewendeten Seite von *B* in Berührung war, während freier Sauerstoff an der abgewendeten Seite von *C* sich befand, die Platten durchdringe und auf der anderen Seite polarisire, gaben keine hinreichend deutlichen Resultate. In diesen Fällen fehlt eben die elektrische Kraft, welche die positiven Wasserstoffmolekeln in das Platin hineinpresst.

XLIV.

Ueber galvanische Ströme, verursacht durch Concentrationsunterschiede; Folgerungen aus der mechanischen Wärmetheorie.[1])

Aus: Wiedemann's Annalen Bd. III. S 201—216. — Monatsberichte der Berliner Akademie 1877. 26. November

201 Als elektrochemisches Aequivalent eines Ions wollen wir diejenige Menge desselben betrachten, die durch die gewählte Stromeinheit in der Zeiteinheit an der entsprechenden Elektrode ausgeschieden wird.

202 Die Ueberführungszahl n, auf das Kation bezogen (Hittorf's $1/n$), giebt, wie in G. Wiedemann's „Galvanismus", denjenigen Bruchtheil des Aequivalents des betreffenden Kations, der von der Stromeinheit während der Zeiteinheit durch jeden Querschnitt der Strombahn in der betreffenden Lösung nach der Kathode hingeführt wird. Andererseits wandert in entgegengesetzter Richtung das Quantum $(1 - n)$ des Anions, wodurch $(1 - n)$ des Kations an der Kathode frei wird, was mit der Menge n nach dieser Seite geführten Kations vereinigt, die an der Kathode frei werdende Menge 1 giebt. Ebenso ist auf der anderen Seite das Quantum n des Kations weggeführt, dadurch n des Anions frei geworden. Dazu kommt $(1 - n)$ des zugeführten Anions. Wenn nun das Kation ein Metall ist, welches sich an die Elektrode ablagern kann, so schwindet

1) Die nachfolgenden Betrachtungen sind in ihren wesentlichen Theilen der Berliner Akademie (Monatsber. 26. Nov. 1877) mitgetheilt worden. Der Schluss ist umgearbeitet, da inzwischen neue experimentelle Data gewonnen waren.

dort $(1 - n)$ des Metalles aus der Lösung und $(1 - n)$ des salzbildenden sauren Körpers ist weggeführt worden, also wird ebenda $(1 - n)$ des Salzes weggenommen. Andererseits verbindet sich das frei werdende Anion mit dem Metall der Elektrode, und es tritt also 1 Aequivalent Metall hier neu in die Lösung, während n des Metalles fortgeführt und $(1 - n)$ des Anions zugeführt ist. Dies giebt hier eine Vermehrung der Salzmenge um $(1 - n)$ des Aequivalentes für Zeiteinheit und Stromeinheit. Ist das Metall der Elektrode gleich demjenigen, welches in der Lösung enthalten ist, so ist das ganze Resultat der Elektrolyse dasselbe, als wenn ein Aequivalent Metall von der Anode an die Kathode, und $(1 - n)$ Aequivalent Salz in der Lösung von der Kathode zur Anode geführt wäre.

Wenn nun die Salzlösung an der Kathode concentrirter ist als an der Anode, so werden durch diese Ueberführung die Unterschiede der Concentration ausgeglichen. Die Flüssigkeit nähert sich dabei dem Gleichgewichtszustande, dem die Anziehungskräfte zwischen Wasser und Salz auch in den Vorgängen der Diffusion zustreben, nämlich dem Zustande gleichmässiger Vertheilung des Salzes. Also werden die in dieser Richtung wirkenden chemischen Kräfte ihrerseits auch wieder- 203
um den elektrischen Strom, der in ihrem Sinne wirkt, unterstützen können.

Dass nun die hierbei eintretende Arbeit der chemischen Kräfte in diesem Falle nach demselben Gesetze wie andere elektrolytische chemische Processe als elektromotorische Kraft wirkt, lässt sich aus der mechanischen Wärmetheorie herleiten.

Einen reversibeln Process ohne Temperaturänderungen, wie er zur Anwendung des Carnot'schen Gesetzes gefordert wird, können wir in folgender Weise herstellen.

1. Wir lassen in die Anode das Quantum positiver Elektricität E langsam in constantem Strome eintreten, nehmen aus der Kathode dagegen das Quantum $+E$ weg, oder, was zu demselben Resultat führt, wir lassen $+\frac{1}{2}E$ in die Anode ein-, $-\frac{1}{2}E$ austreten, umgekehrt an der Kathode. Wenn P_k und P_a die Werthe der elektrostatischen Potentialfunction für die beiden Elektroden sind, so ist:

$$E\{P_a - P_k\}$$

die Arbeit, welche geleistet werden muss, um diese Durchströmung zu bewerkstelligen. Ist die Dauer der Durchströmung gleich t, so ist die Stromintensität nach elektrostatischem Maasse gegeben durch die Gleichung:

$$Jt = E.$$

2. Unter Einfluss dieser Durchströmung kommt in der elektrolytischen Zelle, die wir mit zwei gleichartigen Metallelektroden versehen und mit einer Lösung desselben Metalles von ungleichmässiger Concentration gefüllt denken, eine Ueberführung des Salzes im Elektrolyten zu Stande. Die Veränderung, die hierdurch im Zustande der Flüssigkeit entsteht, können wir aber dadurch beseitigen, dass wir aus allen Schichten der Flüssigkeit, wo der Strom die Flüssigkeit verdünnt, so viel Wasser, als zugeführt wird, verdampfen lassen; umgekehrt, wo der Strom die Flüssigkeit concentrirt, die entsprechende Menge Wasser durch Niederschlag von Dämpfen zuführen. Wenn man in dieser Weise den Zustand innerhalb der Flüssigkeit voll-
204 kommen constant erhält, so muss das Anion ganz an seiner Stelle bleiben, weil sich von diesem an keinem Ende etwas ausscheidet und nichts dazukommt. Vom Kation dagegen muss durch jeden Querschnitt der Strombahn eine der Stromstärke vollkommen äquivalente Menge gehen, da an der Anode ein volles Aequivalent aufgelöst, an der Kathode niedergeschlagen wird. Da nun die Verschiebung des Anions gegen das Wasser sich zu der des Kations gegen das Wasser wie $(1 - n) : n$ verhält, so muss das Wasser mit einer Geschwindigkeit vorwärts gehen, welche $(1 - n)$ von der des Kations beträgt. Wenn also ein elektrolytisches Aequivalent des Salzes verbunden ist mit q Gewichtstheilen Wasser, und durch ein Flächenstück $d\omega$ der Strom von der Dichtigkeit i die Quantität $id\omega$ des Kations, in Aequivalenten ausgedrückt, führen soll, so müssen durch dasselbe $q(1 - n)id\omega$ Gewichtstheile Wasser gehen, um die Theile des Anions an ihrer Stelle zu erhalten.

Diese $q(1 - n)i.d\omega$ betragende Menge Wasser führt mit sich als aufgelöste Bestandtheile $(1 - n)i.d\omega$ Aequivalente des Kations sowohl als des Anions. Die Elektrolyse treibt durch denselben Querschnitt $n.i.d\omega$ des Kations vorwärts und $(1 - n)i.d\omega$ des Anions rückwärts, daher in Summa ein

Aequivalent des Kations vorwärts geht und das Anion an seiner Stelle bleibt.

Wenn wir also mit u, v, w die Componenten der elektrischen Strömung parallel den x, y, z bezeichnen, berechnet nach der Menge Elektricität, die in der Zeiteinheit die Einheit der Fläche passirt: so ist die Zunahme der Wassermenge in dem Volumenelemente $dx\,dy\,dz$ nach bekannten hydrostatischen Gesetzen für die Zeiteinheit:

$$\left.\begin{aligned} &-\left\{\frac{\partial}{\partial x}[q(1-n)u] + \frac{\partial}{\partial y}[q(1-n)v] + \frac{\partial}{\partial z}[q(1-n)w]\right\} dx.dy.dz \\ &= -\left\{u\frac{\partial}{\partial x}[q(1-n)] + v\frac{\partial}{\partial y}[q(1-n)] + w\frac{\partial}{\partial z}[q(1-n)]\right\} dx.dy.dz, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

da im stationären Strome:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \qquad (1\,a)$$ 205

An der Oberfläche der Elektroden dagegen würde durch das Flächenelement $d\omega$ die Einströmung des Wassers verlangt werden:

$$q(1-n)\,[u\cos a + v\cos b + w\cos c]\,d\omega, \qquad (1\,b)$$

wenn a, b, c die Winkel zwischen der gegen die Flüssigkeit gerichteten Normale des Elementes $d\omega$ und den positiven Coordinatenaxen bezeichnen.

Wenn wir den obigen mit $dx\,dy\,dz$ multiplicirten Ausdruck über das ganze Volumen der Flüssigkeit integriren, so erhalten wir durch bekannte Methoden partieller Integration denselben Werth, den der letzte mit $d\omega$ multiplicirte Ausdruck giebt, wenn wir ihn über die Oberfläche integriren.

Das Wasser also, welches sich im ganzen Innern sammelt, und nach unserer Voraussetzung durch Verdampfung entfernt werden soll, wird gerade genügen, um an den Elektrodenflächen wieder niedergeschlagen die dort verlangte Zufuhr zu geben. Hierbei kann natürlich sowohl die Ansammlung des Wassers im Innern, wie der Niederschlag an der Oberfläche stellenweise auch negative Werthe haben.

3. Die Verdampfung, beziehlich, wo sie negativ ist, Niederschlag des Dampfes, kann so geführt werden, dass man

durch Zuleitung von Wärme zu jedem der Volumenelemente die Temperatur während der Verdampfung constant erhält. So lange Wasser aus einem Volumenelemente der Flüssigkeit entfernt werden soll, lässt man den Dampf damit in Berührung. Schliesslich trennt man beide und lässt den Dampf unter weiterer Zuführung von Wärme bei constanter Temperatur sich so weit dehnen, bis er einen bestimmten constanten Druck p_1 erreicht hat. Wo die Verdampfung negativ sein soll, wird der Dampf natürlich aus dem Drucke p_1 entnommen und unter Abgabe von Wärme bei constanter Temperatur zunächst ohne,
206 nachher mit Berührung der Flüssigkeit comprimirt, bis er Wasser geworden ist. Da der Dampf, der mit den concentrirteren Theilen der Flüssigkeit in Berührung ist, geringeren Druck hat, als der mit verdünnteren Theilen in Berührung stehende, so wird bei dieser Verdampfung Arbeit gewonnen, wenn das Wasser aus den verdünnten Theilen in die concentrirten übertragen wird; verloren, wenn umgekehrt.

4. Die elektrische Strömung kann so langsam gemacht werden, dass die dem Quadrat ihrer Intensität proportionale Wärmeentwickelung wegen Widerstandes der Leitung verschwindend klein wird im Vergleiche mit denjenigen Wirkungen, die wir bisher besprochen haben und die der ersten Potenz der Intensität proportional sind.

Ebenso könnte die Diffusion, welche zwischen verschieden concentrirten Theilen der Lösung vor sich geht, durch Einschaltung enger Verbindungsröhren auf ein Minimum zurückgeführt werden, ohne dass die elektromotorische Kraft des Apparates, die wir berechnen wollen, dadurch geändert wird.

Wir können deshalb diese beiden irreversibeln Processe vernachlässigen und das Carnot-Clausius'sche Gesetz auf die reversibeln anwenden. Da alle an dem Processe theilnehmenden Körper dauernd gleiche Temperatur haben sollen und alle dieselbe, so kann keine Wärme in Arbeit, und durch die reversibeln Processe auch keine Arbeit in Wärme verwandelt werden. Es muss also die Summe der gewonnenen und verlorenen Arbeit für sich genommen gleich Null sein, und ebenso die Summe der ab- und zugeführten Wärme. Daraus gehen zwei Gleichungen hervor.

Die eine, welche sich auf die Wärme bezieht, sagt nichts anderes aus, als was schon ohne Betrachtung des elektrolytischen Vorganges gewonnen werden kann, nämlich dass die gleiche Wärmemenge erzeugt wird, wenn das Metall der Elektroden in eine concentrirte Salzlösung eintritt, die stufenweise verdünnt wird, als wenn es direct in die verdünnte Lösung eintritt.

Die zweite Gleichung sagt aus, dass bei dem oben 207
beschriebenen reversibeln Processe die mechanische Arbeit gleich Null sein müsse. Arbeit ist theils

1) für Eintreibung der Elektricität verwendet. Wenn P_a und P_k die Werthe der Potentialfunction in der Anode und Kathode sind, und in der Zeit t die Elektricitätsmenge $+ E$ in P_a eingetrieben, aus P_k weggenommen wird, so ist die Arbeit für die Zeiteinheit, wie schon oben bemerkt:

$$\frac{E}{t}(P_a - P_k) = J(P_a - P_k);$$

2) theils wird Arbeit durch den sich dehnenden Dampf geleistet. Dieser Dampf entwickelt sich zunächst unter dem Drucke p, der dem Sättigungsgrade der Flüssigkeit mit Salz entspricht; dann dehnt er sich bei constanter Temperatur bis zum Drucke p_1. Nennen wir die Arbeit für die Masseneinheit W und das Volumen der Masseneinheit V, beide immer auf die gleichbleibend gegebene Temperatur bezogen, so ist:

$$W = p \,.\, V + \int_V^{V_1} p \,.\, d \,.\, V \tag{1c}$$

Die Gesammtgrösse dieser Arbeit $\mathfrak{W}$ ergiebt sich mittels der in (1) und (1b) aufgestellten Werthe der Strömung gleich:

$$\left.\begin{aligned} -\iiint dx \,.\, dy \,.\, dz \,.\, W \Big\{ u \frac{\partial}{\partial x}[q(1-n)] + v \frac{\partial}{\partial y}[q(1-n)] \\ + w \frac{\partial}{\partial z}[q(1-n)] \Big\} \\ - \int d\omega \,.\, W \,.\, q(1-n) \,\{u \cos a + v \cos b + w \cos c\} = \mathfrak{W}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Durch partielle Integration des dreifachen Integrals und mit Berücksichtigung der Gleichung (1a) finden wir:

$$\mathfrak{W} = \iiint dx \,.\, dy \,.\, dz \,.\, q \,.\, (1-n) \left\{ u \cdot \frac{\partial W}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial W}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial W}{\partial z} \right\}. \qquad (2a)$$

Hierin sind n und W Functionen von q. Wenn man also setzt:

$$q(1-n)\, d\, W = d\, \Phi, \qquad (2b)$$

208 wo Φ eine neue Function von q bedeutet, oder auch:

$$\Phi = \int_{p_0}^{p} q\,(1-n)\, \frac{d\, W}{d\, p}\, d p, \qquad (2c)$$

worin p, der Dampfdruck über der betreffenden Salzlösung, ebenfalls Function von q ist, so erhält man:

$$\mathfrak{W} = -\int d\omega \,.\, \Phi \{u \cos a + v \cos b + w \cos c\}. \qquad (2d)$$

Die Parenthese in diesem Ausdrucke bedeutet die zur Grenzfläche des Elektrolyten senkrechte Stromcomponente. Diese ist nur an den den Elektroden zugewendeten Theilen der Grenzfläche von Null verschieden. Ist die Concentration der Flüssigkeit, also auch q, n, p und Φ, längs jeder einzelnen Elektrode constant, so wird:

$$\mathfrak{W} = J\,(\Phi_k - \Phi_a) \qquad (3)$$

und die Gleichung der Arbeit:

$$\left.\begin{aligned} P_k - P_a &= \Phi_a - \Phi_k \\ &= \int_k^a q \,.\, (1-n) \cdot \frac{d\, W}{d\, p} \cdot d p \,. \end{aligned}\right\} \qquad (3a)$$

$P_k - P_a$ ist aber der Werth der elektromotorischen Kraft, den die elektrolytische Zelle in der Richtung von der Anode zur Kathode, also in Richtung des von uns angenommenen Stromes wirkend, hervorbringt.

Diese Gleichung zeigt also die Existenz einer elektromotorischen Kraft an, deren Grösse nur von der Concentration der Flüssigkeit an den beiden Elektroden abhängt, nicht von der Vertheilung concentrirterer und verdünnterer Schichten im

Innern der Flüssigkeit, ein Schluss, der in den neulich der Akademie mitgetheilten Versuchen von Hrn. Dr. J. Moser[1]) seine Bestätigung findet.

Nach Wüllner's Versuchen ist die Verminderung des
Dampfdruckes der in constant bleibender Wassermenge ge-
lösten Salzmenge direct, also unserem q umgekehrt propor- 209
tional. Bezeichnen wir den Dampfdruck des reinen Wassers
bei der Temperatur des Versuches mit dem bisher unbestimmt
gelassenen p_0, so ist also zu setzen:

$$p_0 - p = \frac{b}{q}, \tag{4}$$

wo b eine von der Art des Salzes abhängige Constante bezeichnet. Also:

$$P_k - P_a = b \int_{p_k}^{p_a} \frac{\partial W}{dp}(1-n)\frac{dp}{p_0 - p}. \tag{4a}$$

Wenn man für die geringen Dichtigkeiten, welche die Wasserdämpfe bei Zimmertemperatur haben, das Mariotte'sche Gesetz als gültig voraussetzt, und das Volumen der Masseneinheit des Dampfes unter dem Drucke p mit V bezeichnet, so ist, wie oben in Gleichung (1c) bemerkt:

$$W = p \,.\, V + \int_V^{V_1} p \,.\, dV.$$

Nach Mariotte's Gesetz ist:

$$V = \frac{V_1 p_1}{p} \qquad dV = -V_1 p_1 \cdot \frac{dp}{p^2} \tag{4b}$$

$$\left.\begin{aligned} \int_V^{V_1} p\,dV = V_1 \,.\, p_1 \,.\, \log .\left(\frac{p}{p_1}\right) \text{ und } W = p_1 V_1 \left\{1 + \log . \frac{p}{p_1}\right\} \\ \frac{\partial W}{\partial p} = \frac{p_1 V_1}{p} = V \end{aligned}\right\} \tag{4c}$$

als angenähert richtiger Werth.

---

1) Siehe Wiedemann's Annalen Bd. III. S. 216.

Setzt man diesen Werth von $\partial W / \partial p$ in die Gleichung (4a) mit Anwendung von (4b), so erhält man:

$$P_k - P_a = b p_0 \, V_0 \int\limits_k^a \frac{(1-n)\,dp}{p\,(p_0 - p)}, \tag{4d}$$

210 oder wenn man statt der Variabeln p unter dem Integrationszeichen mittels der Gleichung (4) die Variabele q einführt:

$$P - P_a = b p_0 \, V_0 \int\limits_k^a \frac{(1-n)\,dq}{q p_0 - b}. \tag{4e}$$

Daraus ergiebt sich, dass die elektromotorische Kraft der Zelle positiv ist, wenn an der Kathode die Flüssigkeit concentrirter, und also $q_k < q_a$ und $p_k < p_a$ ist, was ebenfalls durch eine grosse Anzahl von Beobachtungen des Hrn. J. Moser bestätigt ist.

Wenn wir die Fortführungszahl $(1-n)$ innerhalb der Grenzen der Versuche als constant betrachten dürfen, so kann dieselbe als Factor vor das Integrationszeichen gesetzt werden.

Wir setzen zugleich zur Abkürzung die Grösse:

$$\frac{b}{p_0} = q_0.$$

Es bezeichnet alsdann q_0 diejenige Wassermenge, bei deren Zusatz zu einem Aequivalent des Salzes die Dampfspannung Null werden würde, wenn das Wüllner'sche Gesetz bis zu dieser Grenze hin Gültigkeit behielte. Dann wird:

$$P_k - P_a = b \,.\, V_0 (1-n) \,.\, \log . \left[\frac{q_a - q_0}{q - q_0}\right]. \tag{5}$$

Die Grösse q_0 muss um so kleiner sein, je weniger das betreffende Salz den Dampfdruck vermindert. Der Einfluss von q_0 verschwindet um so mehr, je verdünnter die dem Versuche unterworfenen Lösungen sind. Da auch gerade für verdünntere Lösungen der Werth von $(1-n)$ nach Hittorf's Versuchen nahe constant ist, so lässt sich für solche die angenähert richtige Formel aufstellen:

$$P_k - P_a = b \,.\, V_0 \,.\, (1-n) \,.\, \log . \left[\frac{q_a}{q_k}\right], \tag{5a}$$

in welcher die Constante der Dampfspannung nur vorn als Factor vorkommt, und welche Formel das Verhältniss der 211
elektromotorischen Kräfte bei verschiedenen Concentrationen unter den genannten Beschränkungen ergiebt, auch wenn man den Werth von b nicht kennt.

Da nach Wüllner's Versuchen die Grösse b bei wechselnden Temperaturen nahehin proportional dem Drucke p_0 über reinem Wasser bleibt, und $p_0 V_0$ nahehin proportional der absoluten Temperatur wächst, was innerhalb der Grenzen der Zimmertemperaturen nicht viel ausmacht, so folgt geringes Anwachsen der elektromotorischen Kraft mit der Temperatur, was die Versuche bestätigen.

Das S der folgenden Tabellen ist die q proportionale Wassermenge, die mit einem Gewichtstheil des wasserfreien Salzes vereinigt in der Lösung vorkommt, A die elektromotorische Kraft nach den Beobachtungen von Hrn. J. Moser in Tausendtheilen eines Daniell'schen Elementes (Cu, $CuSO_4$, $ZnSO_4$, Zn) angegeben. Die Grösse:

$$\eta = \frac{1}{A} \cdot \log \cdot \frac{S_a}{S_k}$$

sollte constant sein nach Gleichung (5a).

Für eine Zelle mit Kupfervitriollösung und Kupferelektroden ergeben sich folgende Werthe:

Kupfersulfat.

S_a	S_k	A beobachtet	A berechnet	η	Werth von $(1 - n)$ nach Hittorf
128,5	4,208	27	27,4	0,0550	0,724 für $S = 6,35$.
—	6,352	25	23,8	0,0525	
—	8,496	21	21,4	0,0562	
—	17,07	16	15,8	0,0548	
—	34,22	10	10,3	0,0575	0,644 für $S > 39,67$.

Die bei der Berechnung von η gebrauchten Logarithmen sind Briggische. Bei diesem Salze ist nach einer unten fol- 212
genden Berechnung in Uebereinstimmung mit neueren Bestimmungen der Dampfdichte durch Hrn. J. Moser das dem

q_0 entsprechende S_0 ungefähr gleich 0,082, also so klein, dass es kaum einen Einfluss hat. Die Werthe von η steigen im allgemeinen gegen die stärkeren Verdünnungen hin, was mit dem Fallen von $(1 - n)$ in derselben Richtung zusammenhängt.

Als eine für die Rechnung bequeme Interpolationsformel, die das Steigen des $(1 - n)$ bei höheren Concentrationen ausdrückt und bei starken Verdünnungen es sich einem constanten Werthe nähern lässt, habe ich gebraucht:

$$(1 - n) = B \cdot \frac{S - S_0}{S - \sigma}. \tag{6}$$

Setzt man $S_0 = 0{,}082$, so ergibt sich σ aus den obigen beiden aus Hittorf's Untersuchungen citirten Werthen gleich 0,7745; B ist gleich 0,644, und die Einsetzung dieses Werthes von $(1 - n)$ in die Gleichung (4e) ergiebt, dass:

$$\eta_1 = \frac{1}{A} \log\left(\frac{S_a - \sigma}{S_k - \sigma}\right) \tag{6a}$$

constant sein müsste. Die Rechnung giebt für η_1 eine Reihe von Werthen, die das Steigen bei den stärkeren Verdünnungen nicht mehr zeigen, nämlich:

$\eta_1 = 0{,}05816 \quad 0{,}05438 \quad 0{,}05802 \quad 0{,}05588 \quad 0{,}05818$

Mittel 0,0556 93.[1])

Mit diesem Mittelwerthe von η_1 sind dann die in der Tabelle als berechnet angegebenen Werthe von A gefunden, welche, wie man sieht, verhältnissmässig gut mit den beobachteten übereinstimmen.

Für den Zinkvitriol liegen drei Beobachtungen von Hittorf für den Werth von $(1 - n)$ vor, nämlich:

$$\begin{aligned} 1 - n &= 0{,}778 \text{ für } S = 2{,}524 \\ \text{„} \quad &= 0{,}760 \quad \text{„} \quad \text{„} = 4{,}052 \\ \text{„} \quad &= 0{,}636 \quad \text{„} \quad \text{„} = 267{,}16. \end{aligned}$$

213 Daraus lässt sich eine Interpolationsformel mit drei Constanten construiren, nämlich:

$$1 - n = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \,.\, S^{-\alpha}$$

1) In diesen und den folgenden Rechnungen sind Rechenfehler corrigirt (1881).

worin:

$$\mathfrak{A} = 0{,}636 \qquad \mathfrak{B} = 0{,}18511 \qquad \alpha = 0{,}28636.$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung (4e), indem man $q = m\,S$ setzt, und $\frac{b}{p_0}$ als unerheblich vernachlässigt, so erhält man:

$$A = b\,V_0 \,.\, \mathfrak{A} \left\{ \log \frac{S_a}{S_k} - \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\,.\,\alpha} \left[S_a^{-\alpha} - S_k^{-\alpha} \right] \right\}.$$

Wenn man den Ausdruck in der Parenthese durch A dividirt, müsste man einen constanten Werth von $b\,.\,V_0\,.\,\mathfrak{A} = 1/\eta_2$ erhalten, was innerhalb der Grenzen, für die $(1 - n)$ beobachtet ist, auch einigermaassen zutrifft.

Zinksulfat.

S_a	S_k	A beobachtet	A berechnet	η_2
163	1,972	36	30,9	0,139
	2,963	28	27,8	0,161
	4,944	22	24,7	0,183
	10,889	18	18,4	0,166
			Mittel:	0,162

Die beobachteten Werthe von A sind die von Hrn. J. Moser gefundenen, die berechneten die aus obiger Formel mit dem Mittelwerthe von η_2 gefundenen.

Für das Zinkchlorid sind die bisher vorliegenden Beobachtungen noch nicht zu verwenden, da die Unterschiede des $(1 - n)$ sehr beträchtlich sind, und die Verminderung des Dampfdruckes in den concentrirten Lösungen sehr gross.

Für die Berechnung des absoluten Werthes der elektromotorischen Kraft ist noch Folgendes zu bemerken. Die bisher gebrauchte Stromstärke J ist nach elektrostatischem Maasse gemessen; ebenso ist die elektromotorische Kraft 214
$(P_k - P_a)$ nach elektrostatischen Einheiten bestimmt. Nach elektromagnetischem Maasse gemessen wird die Stromstärke J übergehen in:

$$J = \frac{1}{\mathfrak{E}} \cdot J$$

und die elektromotorische Kraft:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C} . (P_k - P_a),$$

wo $\mathfrak{C}$ die von Hrn. W. Weber bestimmte Geschwindigkeit ist. Nach den Bestimmungen von Hrn. Friedrich Weber ist für ein Daniell'sches Element (Cu, $CuSO_4$, $ZnSO_4$, Zn) die elektromotorische Kraft in elektromagnetischem Maasse:

$$\mathfrak{A}_D = 109\,540\,000 \cdot \frac{cm^{\frac{3}{2}} . g^{\frac{1}{2}}}{sec^2} .$$

Das in den obigen Tabellen gebrauchte A ist in Einheiten von 0,001 Daniell ausgedrückt, also:

$$\mathfrak{A} = \frac{A . \mathfrak{A}_D}{1000} .$$

Nun zersetzt die elektromagnetische Stromeinheit Weber's, deren Einheit ist:

$$\frac{\sqrt{mg . mm}}{sec} = 0{,}01 \cdot \frac{\sqrt{g . cm}}{sec}$$

in der Secunde nach R. Bunsen:

0,009 270 5 mg Wasser

und $\frac{159{,}5}{18}$ mal so viel Kupfersulfat ($CuSO_4$), d. h.:

0,082 147 mg.

Wenn wir also, wie in den Zahlentabellen, mit S die Menge Wasser bezeichnen, die mit einem Gewichtstheil des wasserfreien Salzes in der Auflösung enthalten ist, so ist für die Versuche mit Kupfervitriol:

$$\mathfrak{C} q : S = 0{,}008\,214\,7 \cdot \sqrt{\frac{g}{cm}} : 1 .$$

215 Ist nun die Verminderung des Dampfdruckes durch die angewendete Salzlösung bekannt, so ergiebt sich die Constante b aus der Gleichung:

$$p_0 - p = \frac{\mathfrak{C} b}{\mathfrak{C} q},$$

worin der Druck p auch nach absolutem Kraftmaasse als $\frac{g}{cm . sec^2}$ zu berechnen ist.

Unsere Gleichung (4e) wird mit Hülfe von (6):

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{E}\,(P_k - P_a) = (\mathfrak{E}b) \cdot V_0\, B \cdot \log\left[\frac{S_a - \sigma}{S_k - \sigma}\right].$$

Der Werth der Constante $\mathfrak{E}$ braucht also nicht bekannt zu sein für die Berechnung des $\mathfrak{A}$ nach elektromagnetischem Maasse, da im Obigen der Werth des $\mathfrak{E}b$ direct gefunden ist.

Mittels der Gleichung (6a) erhalten wir für Kupfervitriollösungen:

$$\frac{\mathfrak{A}_D}{1000} = \frac{\mathfrak{E}\,.\,b\,.\,V_0\,.\,B\,.\,\eta_1}{\log \text{brigg}\, e} = \mathfrak{E} \cdot q \cdot \frac{V_0 \cdot p_0 \cdot B \cdot \eta_1}{\log \text{brigg}\, e} \cdot \frac{p_0 - p}{p_0}. \qquad (6\text{b})$$

Es ist oben gefunden:

$$B = 0{,}644 \qquad \eta = 0{,}055\,693.$$

Die Berechnung von V_0 ist nach Mariotte's und Gay Lussac's Gesetzen unter Annahme des theoretischen specifischen Gewichtes 0,623 gegen Luft ausgeführt.

Um die Uebereinstimmung des absoluten Werthes der elektromotorischen Kraft unserer Ketten mit der durch die Formel gegebenen zu prüfen, fehlen noch ausreichende Data über die Dampfspannung der gebrauchten Salzlösungen. Benutzt man die Gleichung (6b), um aus der von Hrn. J. Moser gefundenen elektromotorischen Kraft der Zellen mit Kupfersulfatlösungen die Grösse $\frac{p_0 - p}{p_0}$ für die einprocentige Lösung bei 20° C. zu berechnen, so erhält man diese Grösse gleich 0,00091 [1]), was zwischen den von Hrn. Wüllner für Rohr- 216
zuckerlösungen (0,00070) und den für die leicht löslichen Alkalisalze gefundenen Werthen liegt. Hr. J. Moser hat in der letzten Zeit im hiesigen Laboratorium versucht die Dampfspannung über Kupfervitriollösungen durch Wasserdruckhöhen zu messen. Für Lösungen, welche 25 % ihres Gewichtes an krystallisirtem Salze enthalten, war die Verminderung des Dampfdruckes etwa nur 3 mm Wasser. Die oben angegebene

---

1) Die Abweichung von dem in den Berl. Monatsber. angegebenen Werthe 0,00082 ist hier durch die Berücksichtigung der Inconstanz des Werthes von $(1 - n)$ in der oben angegebenen Weise bedingt.

Grösse berechnet sich aus seinen bisher ausgeführten Versuchen im Mittel zu 0,00086. Aber die einzelnen Bestimmungen schwankten noch bei der Kleinheit des zu beobachtenden Werthes zwischen 0,00076 und 0,00110. Eine Verbesserung der Methode steht noch in Aussicht.

Wenn man berücksichtigt, dass sich bei dieser Berechnung Factoren gegeneinander heben, die aus den verschiedensten Gebieten der Physik entnommen sind, und von denen einer über hundert Millionen beträgt, so mag der bisher erreichte Grad von Uebereinstimmung zwischen Theorie und Versuch immerhin als beachtenswerth erscheinen, obgleich die Genauigkeit einiger Elemente der Rechnung noch zu wünschen übrig lässt.

XLV.

Studien über elektrische Grenzschichten.[1])

Aus: Wiedemann's Annalen Bd. VII. S. 337—382. (1879.)

Die bisherige Theorie der Vertheilung der Elektricität 337
in leitenden Körpern hat nur die aus den Wirkungen in die Ferne bekannten Kräfte dieses Agens in Rechnung gezogen und ist dadurch zu der Folgerung gekommen, dass Elektricität, wenn sie sich in einem oder mehreren Körpern in das Gleichgewicht setzt, das Innere der Körper gänzlich verlässt und nur auf der Oberfläche derselben eine unendlich dünne Schicht bildet. Dass in der That diese Schicht sehr dünn sei, und im Innern der Leiter nur verschwindend kleine Mengen von Elektricität zurückbleiben, zeigen alle diejenigen Versuche, bei denen man einen elektrisirten Leiter sich gegen eine ihn vollständig umschliessende und isolirte leitende Hülle entladen lässt und nach deren Entfernung seinen elektrischen Zustand untersucht.

Solange wir es nur zu thun haben mit einer einfachen elektrischen Grenzschicht eines Leiters, der ohne Sprung im Werthe der Potentialfunction die benachbarten Leiter oder Isolatoren berührt, entsteht durch die Annahme eines in unendlich dünner Schicht ausgebreiteten endlichen Quantums von Elektricität, dessen Raumdichtigkeit also unendlich gesetzt werden muss, auch keine weitere Schwierigkeit, da das Arbeitsäquivalent eines jeden Theils einer solchen elektrischen An-
häufung, welches dem halben Producte aus dem betreffenden 338

---

1) Im Auszuge veröffentlicht in den Monatsberichten der Berliner Akademie 27. Februar 1879.

Quantum und dem an Ort und Stelle geltenden Potentialwerthe gleich ist, endlich bleibt.

Anders dagegen verhält es sich in denjenigen Fällen, wo ein Sprung im Werthe der Potentialfunction an der Grenze zweier verschiedener Körper eintritt, unter welchen Fällen der bekannteste und am meisten untersuchte derjenige ist, wenn zwei Leiter unter dem Einflusse einer zwischen ihnen wirkenden galvanischen Kraft sich berühren. Um einen Unterschied im Werthe der Potentialfunction herzustellen, muss sich in diesem Falle längs der Grenzfläche eine elektrische Doppelschicht ausbilden.

Wenn eine reine Zink- und Kupferplatte, die in metallischer Verbindung sind, mit ihren Oberflächen einander genähert werden, so lagern sich immer grössere Quanta positiver Elektricität in der Zinkfläche, negativer in der Kupferfläche ab, je näher sie einander kommen. Wenn wir mit D den Abstand der Platten bezeichnen, mit e die Dichtigkeit der positiven Elektricität auf der Zinkplatte, welche der der negativen auf der Kupferplatte gleich ist, so bleibt hierbei das Product eD constant, wie sehr sich die Platten auch einander nähern. Ich habe dieses Product das Moment der elektrischen Doppelschicht genannt.[1]) Es ist dasselbe gleich dem durch 4π dividirten Unterschiede in dem Werthe der Potentialfunctionen beider Platten. Da nun dieser Unterschied des Potentials von gleicher Grösse bleibt, auch wenn die Platten in dieselbe vollständige Berührung kommen, welche an der bisher schon vorhandenen leitenden Verbindungsstelle derselben bestand, so muss das Moment der längs ihrer Grenzfläche lagernden elektrischen Doppelschicht auch in diesem Falle unverändert bleiben.

Es hat schon Sir William Thomson darauf aufmerksam gemacht, dass die Bildung dieser elektrischen Doppel-
339 schicht eine Arbeitsleistung repräsentire, nämlich für die Einheit der Fläche bei elektrostatischem Maasse des Potentialunterschiedes $(P - P_1)$ die Grösse:

$$\tfrac{1}{2}(P - P_1)\,e = 2\pi D \,.\, e^2 = \frac{(P - P_1)^2}{8\pi D}.$$

1) Pogg. Ann. Bd. LXXXIX. S. 211. 1853. (S. oben S. 489—491.)

Die entsprechende Arbeit kann geleistet werden entweder mechanisch durch die Anziehungskraft, welche die metallisch verbundenen und infolge dessen geladenen Platten bei ihrer Annäherung aufeinander ausüben, oder thermisch, wenn man die Platten in isolirtem Zustande einander nähert und sie dann durch einen leitenden Draht miteinander in Verbindung setzt, sodass sie sich jetzt erst elektrisch laden. Die hierbei stattfindende Elektricitätsbewegung würde im Schliessungsdrahte Wärme erzeugen nach den von Hrn. P. Riess für Leydener Batterien nachgewiesenen Gesetzen. Diese Arbeitsleistung würde unendlich sein, wie die obenstehenden Ausdrücke ihres Werthes erkennen lassen, wenn $D = 0$, und infolge dessen $e = \infty$ werden könnte. Sir W. Thomson machte geltend, dass diese Arbeitsleistung bei grösster Flächenverbreiterung zweier gegebener Metallstücke höchstens äquivalent der bei ihrem Zusammenschmelzen entwickelten Wärme werden könnte, wobei ihre Vereinigung jedenfalls eine innigere ist, als bei blosser Aneinanderlagerung der aus ihnen verfertigten Metallblättchen. Wenn diese Blätter schliesslich zu dünn werden, um die elektrische Doppelschicht noch aufzunehmen, wird die Grenze ihrer elektrischen Arbeitsleistung erreicht sein. Auf diese Weise lässt sich ein Minimum für den Werth der Grösse D angeben. Sir W. Thomson[1]) schätzt dieses auf ein Millimeter, dividirt durch 30 Millionen.

Einen Fall wirklicher molecularer Berührung zweier Leiter mit der Fähigkeit zu einem Potentialsprunge von wechselnder Grösse bieten uns metallische Elektroden in einem Elektrolyten, der durch die angewendete elektromotorische
Kraft nicht zersetzt werden kann. Auch in diesem Falle 340
müssen sich unter dem Einflusse des polarisirenden Stromes elektrische Doppelschichten an den Elektrodenflächen ausbilden, deren elektrisches Moment dem zur Zeit vorhandenen Potentialsprunge zwischen der betreffenden Elektrode und der Flüssigkeit entspricht, und die sich im depolarisirenden Strome wieder entladen können, soweit sie nicht durch Diffusions-

---

1) Silliman J. (2) L. S. 38—44; S. 258—261. 1870. Nature 31/3 und 19/5. 1870.

processe oder durch einen Rest metallischer Leitung im Elektrolyten zerstört sind.

Kohlrausch's Untersuchungen über die Capacität von Platinflächen bei der Elektrolyse des Wassers ergeben den mittleren Abstand solcher Schichten gleich dem 2 475 000sten Theil eines Millimeters, wenn man die Polarisation auf beide Platten gleichmässig vertheilt annimmt; das Doppelte, falls die ganze Kraft nur an der mit Wasserstoff beladenen Platte liegt. Wenn auch hierbei Sauerstoff und Wasserstoff von der Elektricität mit fortgeführt sind, beruht doch die Potentialdifferenz, als eine Wirkung, die sich auch in entfernten Theilen der Leiter äussert, nur auf der Anhäufung der mit den Atomen beider Elemente verbundenen Elektricitäten.

Die Kraft, welche die Arbeit bei der Bildung der galvanischen Ladung sich berührender Metalle leistet, kann, wie ich schon in meiner Abhandlung über die Erhaltung der Kraft auseinandergesetzt habe, nur gesucht werden in einer verschiedenen Anziehung der verschiedenen Metalle zu den beiden Elektricitäten. Nennen wir K_c das Quantum potentieller Energie, welches durch die Anziehungskräfte des Kupfers gegen die positive elektrostatische Einheit dargestellt wird, wenn diese in einer gegen die Molecularkräfte grossen Entfernung befindlich ist, und welches Quantum also verloren geht, wenn jene elektrische Einheit in das Innere des Kupfers überfliesst, bezeichnen wir mit K_z dieselbe Grösse für das Zink, so wird durch den Uebergang des Quantums dE aus Kupfer von dem Potentiale P_c in Zink vom Potentiale P_z, an potentieller Energie gewonnen die Grösse:

$$dE\{K_c - K_z - P_c + P_z\}.$$

341 Im Gleichgewichtszustande muss diese Arbeit gleich Null sein, also:

$$P_c - K_c = P_z - K_z,$$

oder die beiden Metalle in leitender Berührung werden die constante Potentialdifferenz annehmen:

$$P_z - P_c = K_z - K_c.$$

Nehmen wir noch ein anderes Metall, Platina, mit dem Index p, hinzu, so wird

$$P_p - P_c = K_p - K_c$$
$$P_p - P_z = K_p - K_z = (K_p - K_c) + (K_c - K_z).$$

In diesen Gleichungen ist das Gesetz der Spannungsreihe enthalten, welches also aus jener Annahme unmittelbar folgt. Dieses Gesetz gilt für Körper, welche ohne Elektrolyse leiten und gleiche Temperatur haben. In solchen strebt die Elektricität einem Gleichgewichtszustande zu. Dass sie einen solchen bei der Einschaltung elektrolytischer Leiter nicht erreichen kann, sondern in dauernder Strömung bleibt, würde im Sinne der erwähnten Theorie darauf zurückzuführen sein, dass die letztere Classe der Leiter unter den gesetzten Bedingungen fortschreitender chemischer Umsetzung anheim fällt, und dadurch die Erreichung ruhenden Gleichgewichts verhindert wird.

Jede der erwähnten Grössen K ist die Arbeit einer Kraft, welche erst in molecularen Entfernungen in Wirksamkeit tritt. Wir werden uns deshalb denken können, dass der Werth K_z bei Ueberschreitung der Grenzfläche beider Metalle in den Werth K_c nicht sprungweise übergeht, sondern continuirlich, aber innerhalb einer Grenzschicht, deren Breite mit dem Wirkungskreise der Molecularkräfte von gleicher Grössenordnung ist. Dann würde also die Grösse

$$P - K = P_c - K_c = P_z - K_z$$

in der elektrischen Grenzschicht, soweit keine anderen Kräfte gleichzeitig auf diese einwirken, constanten Werth behalten können, und die Dichtigkeit der Elektricität in der kleinen 342
Entfernung x von der Grenzfläche gegeben sein durch die Gleichung:

$$-4\pi\varepsilon = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = + \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}.$$

Dies ergiebt also einen endlichen Werth der elektrischen Dichtigkeit und demgemäss auch einen endlichen Werth der elektrischen Arbeitsgrösse. Andere moleculare Kräfte können möglicherweise auch noch Einfluss haben, die von der Bindung elektrischer Aequivalente an die ponderabelen Atome, wie sie in den Elektrolyten sich zeigt, herrühren. Solche sind von

B. Riemann[1]) in seiner „Theorie des Rückstandes elektrischer Bindungsapparate" berücksichtigt worden.

Es liegt kein Grund vor, die Existenz der mit K bezeichneten Kräfte auf die gut leitenden Körper zu beschränken, und in der That reihen sich die Erscheinungen der Reibungselektricität, von diesem Gesichtspunkte aus betrachtet, den galvanischen Ladungen in ganz ungezwungener Weise an.

Wenn zwei Metalle voneinander abgehoben werden, so bleibt ihre Ladung diejenige, die im Momente der letzten Berührung an einem Punkte der Flächen bestand, weil die Elektricität mit einer Geschwindigkeit, gegen welche die der mechanischen Bewegung verschwindet, sich in das Gleichgewicht setzt. Diese übrigbleibende Ladung ist deshalb auch von sehr unbeständiger Grösse, weil die Lage der Platten im Momente, wo ihre letzte Berührung aufhört, immer kleine Unterschiede zeigen wird, die sehr grossen Einfluss auf die Dichtigkeit ihrer noch bestehenden elektrischen Ladung haben können. Wenn aber einer oder beide Körper isolirend sind, so kann die Entladung nur sehr unvollständig erfolgen, und die an der früheren Grenzfläche gebundenen Elektricitäten werden dann getrennt und frei. Dass sie dabei sehr hohe Werthe der Potentialfunction erreichen können, zeigt eine einfache Berechnung.

343 Nehmen wir an, dass eine Kupfer- und Zinkplatte, kreisrund vom Radius R, deren elektromotorische Kraft wir gleich A setzen wollen, eine Doppelschicht vom Abstande D ausgebildet hätten und ohne Entladung getrennt werden könnten, so wäre bei der elektromotorischen Kraft A und dem Abstande D:

$$+4\pi\varepsilon = \frac{A}{D},$$

und das Quantum der auf jeder einzelnen Scheibe angehäuften Elektricität:

$$\pi R^2 . \varepsilon = \frac{AR^2}{4D}.$$

Diese Masse auf jeder der leitenden Scheiben, nachdem

1) Gesammelte Werke. S. 345. Leipzig 1876.

sie voneinander entfernt sind, im Gleichgewichte vertheilt, würde die Dichtigkeit

$$e = \frac{1}{2} \frac{R\varepsilon}{\sqrt{R^2 - \varrho^2}}$$

geben und das Potential

$$P = \tfrac{1}{2}\pi^2 R\varepsilon = + \tfrac{1}{8}\pi \frac{RA}{D}.$$

Setzen wir $R = 10$ cm und D gleich einem Milliontel Millimeter, so würde die Potentialdifferenz gegen eine zur Erde abgeleitete Platte des anderen Metalls dadurch auf das 39270000-fache gesteigert.

Da nach Sir W. Thomson's Messungen[1]) eine Batterie von 5510 Daniell'schen Elementen im Stande ist, einen Funken von $\frac{1}{8}$ cm Länge zwischen sehr schwach gekrümmten Platten hervorzubringen, so würde, wenn A gleich der Kraft von einem Daniell gesetzt wird, jene Platte Funken von 891 cm Länge hervorbringen können, wenn die Proportionalität der Schlagweite mit der Potentialdifferenz bis zu solchen Entfernungen reichte.

Diese Berechnung lässt erkennen, dass bei vollkommener Isolation auch elektromotorische Kräfte, die viel kleiner wären als die galvanische Spannung zwischen Kupfer und Zink, Wirkungen, wie sie in unseren Elektrisirmaschinen vorkommen, 344
erzeugen könnten, und andererseits, dass es zur Erzielung starker Wirkungen dieser Art wesentlich auf möglichst vollständige Leitungsunfähigkeit mindestens eines der geriebenen Körper ankommen wird, was mit der praktischen Erfahrung vollkommen übereinstimmt.

Die Reibung unter mässigem Drucke wäre hiernach als das Mittel zu betrachten, um eine sehr innige und ausgedehnte Berührung der beiden elektrisch differenten Körper unter Beseitigung aller ihrer Oberfläche anhaftenden fremdartigen Schichten zu bewirken. Allerdings ist eine Spannungsreihe für die Reibungselektricität nur sehr unvollständig nachzuweisen, und das Verhalten verschiedener Körper zueinander

1) Papers on Electrostatics p. 259.

wechselt unter scheinbar sehr geringfügigen oder auch wohl gar nicht erkennbaren Modificationen. Dies erklärt sich zum Theil daraus, dass nur die oberflächlichste Schicht, vielleicht von einem Milliontel Millimeter Dicke über die Wirkung entscheidet. Diese kann verändert sein, ohne dass wir es erkennen; sie kann durch das Reiben entfernt werden, und eine zwischen ihr und der inneren Substanz entwickelte elektrische Ladung kann zum Vorschein kommen. Oder es können ältere Ladungen des Isolators ihre Rückstände zurückgelassen haben und durch eine entgegengesetzte Ladung der Oberfläche nach aussen unwirksam geworden sein. Wird diese dann durch Reibung entfernt, so kann es jene frühere Elektrisirung sein, die zuerst zum Vorschein kommt. Dadurch erklären sich wohl viele der Unregelmässigkeiten, welche bei der Reibung von Körpern eintreten, die in der Spannungsreihe einander sehr nahe stehen.

So lange die geriebenen beiden Körper eng aneinander liegen, werden die entsprechenden elektrischen Doppelschichten durch die Anziehung der ponderabelen Molekeln festgehalten, und ihre Potentialfunction ist von geringem Werthe, da zwei entgegengesetzte Schichten eng aneinander liegen. Wo sie sich aber voneinander trennen, wird ihr Potential schnell steigen, und da zwischen einem stark geladenen Isolator und einem
345 Leiter auch Funken überschlagen können, welche wahrscheinlich mit dem Transport losgerissener und elektrisirter ponderabeler Theilchen verbunden sind, so wird unmittelbar hinter der Trennungslinie beider Körper die Gefahr theilweiser Vereinigung der getrennten Elektricitäten bestehen, wenn der eine von beiden hinreichendes Leitungsvermögen hat, um das zu Funkenentladungen nöthige schnelle Herbeiströmen der Elektricität zu gestatten.

Dieser Gefahr entgeht man bei der gewöhnlichen Construction der Elektrisirmaschinen dadurch, dass man an den hinteren Rand des Reibzeuges ein isolirendes Gewebe befestigt, welches in einem ähnlichen elektrischen Gegensatze zur Scheibe steht, wie die amalgamirte metallische Fläche. Unter diesen Umständen dauert die Bindung der elektrischen Doppelschicht durch Molecularkräfte bis an den Trennungsrand des gefirnissten

Seidenzeuges, und hier können zwischen den beiden Isolatoren Glas und Seide keine erheblichen Funkenentladungen mehr eintreten.

Der Anfang des Reibzeuges muss dagegen gut zur Erde abgeleitet sein, um positive Elektricität an die neu ankommenden, gegen den Conductor entladenen Theile der Scheibe abgeben, beziehlich deren negative Elektricität ableiten zu können. Die Combination eines nur am Anfange leitenden, am Ende isolirenden Systems für das Reibzeug entspricht in dieser Beziehung beiden Anforderungen.

Um die Rückentladungen jenseits der Trennungslinie der geriebenen Körper in einfachster Weise zu sehen, braucht man nur im Dunkeln eine Elektrisirmaschine zu beobachten, an der man entweder die seidenen Anhängsel des Reibzeuges abgenommen hat, oder die man rückwärts dreht. Wenn man in den Spalt zwischen den Rand des Reibzeuges und der heraustretenden Scheibe hineinblickt, sieht man den dauernden Kranz von Lichtbüscheln, welche die freiwerdenden Theile der Scheibe theilweise wieder gegen das Reibzeug entladen. Wenn man dagegen in normaler Richtung dreht, und die Seidenlappen sich
an die Scheibe anlegen, ist an deren freiem Rande nichts von 346
einer Lichterscheinung zu sehen.

Ein wie grosser Theil der Elektricität der Scheibe sich rückwärts entladet, wenn der Hinterrand des Reibzeuges ungedeckt ist, zeigt sich, wenn man die Elektricität der Maschine in eine Maassflasche treten lässt und die Zahl der Umdrehungen notirt, welche zwischen zwei Entladungen der Flasche vergehen. Die Arme des Conductors einer Maschine mit zwei Reibzeugen hatte ich bei einem solchen Versuche in die Mitte zwischen den Rand der Seide und des folgenden Reibzeuges gebracht, sodass der Weg der geriebenen Theile der Scheibe durch die Luft bis zum Conductor beim Vorwärts- und Rückwärtsdrehen gleich gross war. Dennoch gab die Scheibe im ersteren Falle, wo der Schutz durch die Seide eintrat, doppelt soviel Elektricität an den Conductor ab, als im letzteren Falle, obgleich im ersteren der Weg der geriebenen Glasfläche um fast einen Quadranten, den sie unter der Seide zurücklegte, länger war. Daraus ergiebt sich, dass, wenn die Scheibe ungedeckt den

leitenden Theil des Reibzeuges verlässt, etwa die Hälfte der angehäuften Elektricität sich in das Reibzeug rückwärts entladet.

Die Lichterscheinung, welche man im Dunkeln an einem Barometer sieht, wenn die Kuppe des Quecksilbers im Vacuum sich abwärts bewegt, ist derselben Art.

Schleift also ein Halbleiter, z. B. Leder auf einer Glasfläche, wobei sich das Glas positiv, das Leder negativ ladet, so wird die positive Elektricität des Glases an der Trennungslinie theilweise auf das Leder zurückschlagen müssen, während das halb entladene Glas, wo es den vorderen Rand einer neuen Lederfläche erreicht, wieder positive Elektricität dem Leder entzieht, negative an dasselbe abgeben wird. Daraus erklären sich höchst einfach die sogenannten Reibungsströme, welche
347 Hr. Zöllner[1]) beschrieben hat. Verstärkt werden dieselben natürlich in hohem Maasse, wenn man den Enden des Reibzeuges gute metallische Leiter anlegt, wie es die Galvanometerdrähte, beziehlich die mit diesen verbundenen und die Enden der Reibzeuge umfassenden Stanniolstreifen[2]) in den Zöllner'schen Versuchen waren. Könnte man jeden Verlust des geriebenen Glases an Elektricität vermeiden von dem Momente an, wo es den hinteren Rand des Reibzeuges verlässt, bis zu dem, wo es sich wieder anlegt, so würden auch diese angeblichen Reibungsströme aufhören. Da aber ausser der Entladung gegen den Hinterrand des Reibzeuges bei stark elektrisirten Scheiben auch noch die Luft, der in dieser schwebende Staub, mangelhafte Isolirung des Glases, Büschelentladungen gegen ziemlich entfernte Conductoren Verluste herbeiführen können, so werden sich Spuren eines elektrischen Spannungsunterschiedes zwischen dem vorderen und hinteren Rande des Reibzeuges wohl immer auffinden lassen.

Dass auch die besten Isolatoren ein gewisses Leitungsvermögen haben, zeigen die Rückstandserscheinungen der Ley-

---

1) Pogg. Ann. Bd. CLVIII. S. 479—539, 1876. Ich erwähne die Sache hier, da sich zeigt, dass nicht alle Physiker die Ursache dieser Erscheinung gemerkt haben.

2) l. c. Taf. VI Fig. 4 mit *s* bezeichnet.

dener Flaschen und Hrn. Wüllner's Versuche, wonach bei längerer Einwirkung vertheilender elektrischer Kräfte schliesslich auch in allen isolirenden Körpern die dem elektrischen Gleichgewichtszustande entsprechende Elektricitätsvertheilung eintritt. Dadurch wird es möglich, dass auch bei Isolatoren die elektrische Ladung ihrer sich berührenden Grenzschichten durch gegenseitigen Austausch entgegengesetzter Elektricitäten eintritt, wie bei Metallen. Da die Strecken, durch welche die Elektricität hierbei fortzuleiten ist, nur Milliontheile eines Millimeters betragen, und innerhalb dieser kurzen Strecke ein endliches Potentialgefälle, d. h. eine ausserordentlich grosse elektromotorische Kraft wirkt, so werden erhebliche Mengen von Elektricität schon in sehr kurzer Zeit übertreten können, wenn auch die Herstellung des vollen Gleichgewichtszustandes 348
viele Stunden in Anspruch nehmen sollte, wie es z. B. bei den Rückstandserscheinungen der Leydener Flaschen der Fall ist. Dass übrigens in den gewöhnlichen Elektrisirmaschinen die Zeit des Durchganges durch das Reibzeug zur vollen Ladung der Scheibe nicht genügt, zeigt sich darin, dass man bei langsamerem Drehen weniger Umdrehungen zur Ladung einer Maassflasche braucht als bei schnellerem, gute Isolation vorausgesetzt.

Einen eigenthümlichen mittleren Fall, der sich zwischen die Elektricitätserregung durch den galvanischen Gegensatz ruhender Körper und die durch gleitende Reibung fester Körper einschaltet, bilden die Erscheinungen, die beim Fliessen benetzender Flüssigkeiten längs einer festen Wand eintreten. Obgleich hierbei die äusserste Flüssigkeitsschicht in den meisten Fällen wahrscheinlich unverschiebbar fest an der benetzten Wand haftet, wofür wir im Folgenden noch neue Belege finden werden, und also eigentlich in der Nähe der Wand nur Flüssigkeit gegen Flüssigkeit sich verschiebt, so finden wir doch, dass ponderomotorische und elektromotorische Kräfte auftreten, die vom Einflusse der berührenden Wand herrühren. Das letztere hat Hr. G. Quincke sowohl für die Fortführung der Flüssigkeit unter Einwirkung elektrischer Ströme, wie für die elektromotorischen Kräfte, die durch Bewegung der Flüssigkeit entstehen, meines Erachtens in sehr ausreichender Weise

gezeigt. Eine willkommene Ergänzung seines Beweises giebt die kürzlich erschienene Arbeit von Hrn. J. Elster.[1]) Dieses Gebiet von Erscheinungen zeichnet sich dadurch aus, dass namentlich von den Herren G. Wiedemann und G. Quincke eine Anzahl bestimmter quantitativ definirter Gesetze der Erscheinungen nachgewiesen worden sind. Die Art der Flüssigkeitsbewegung, die dabei vor sich geht, ist wenigstens in denjenigen Fällen, wo in hinreichend engen Röhren und bei
349 mässiger Strömungsgeschwindigkeit die Wirkungen der Flüssigkeitsreibung Zeit haben, sich vollständig zu entwickeln und einen stationären Zustand herbeizuführen, wohl bekannt, theoretisch ableitbar und nach Poiseuille's Vorgange durch eine Reihe von Beobachtern mit den thatsächlichen Erscheinungen verglichen.

Ich werde im Folgenden zu zeigen versuchen, dass die durch das Experiment gefundenen Gesetze dieser Erscheinungen sich vollständig aus der an die Spitze gestellten Voraussetzung über die Natur der galvanischen Spannungsunterschiede herleiten lassen, wenigstens in denjenigen Fällen, wo die Bewegung der Flüssigkeit die den Poiseuille'schen Gesetzen zu Grunde liegenden Strömungsbedingungen einhält.

Die Voraussetzungen meiner Erklärung sind also folgende: Die Flüssigkeit steht in galvanischem Gegensatze gegen die Wand des Gefässes, und beide bilden längs ihrer Grenzfläche eine elektrische Doppelschicht aus. Der in die Flüssigkeit fallende Theil dieser Schicht ist in der Regel (abgesehen von den durch Hrn. G. Quincke nachgewiesenen Ausnahmen) positiv. Derselbe hat eine ausserordentlich geringe, aber doch nicht verschwindende Dicke. Die gegen die Grenzfläche gekehrte Seite dieser Wand haftet (wenigstens in den Fällen, auf die sich die experimentell gefundenen Gesetze beziehen) unverschiebbar an der Wand; der Rest ist verschiebbar, aber der inneren Reibung der Flüssigkeit unterworfen. Wird durch die Flüssigkeit ein elektrischer Strom geleitet, der ein Potentialgefälle, also auch ponderomotorische elektrische Kräfte hervorbringt, die auf elektrisch geladene Theile zu wirken im

1) Wied. Ann. Bd. VI. S. 553. 1879.

Stande sind, so treiben diese zunächst die positiv geladene Wandschicht der Flüssigkeit mit fort. Wegen der inneren Reibung der Flüssigkeit hat dies aber die Folge, dass der ganze Querschnitt der Röhre dieselbe Bewegung annimmt, wenn kein hydraulischer Gegendruck widersteht. Ist ein solcher vorhanden, so addirt sich die durch den Druck bedingte Flüssigkeitsbewegung zu der durch die elektrischen Anziehungskräfte bedingten. Treibt der Druck gerade so viel 350
Flüssigkeit rückwärts durch jeden Querschnitt der Röhre, als die elektrische Kraft vorwärts treibt, so tritt ein stationärer Stand der Flüssigkeit ein, wobei längs der Wand der Röhre der Strom im Sinne der elektrischen Kraft, im Centrum im Sinne des hydrostatischen Druckes vor sich geht.

Wirkt andererseits nicht eine äussere elektromotorische Kraft auf die Röhre ein, sondern ein hydrostatischer Druck, der zunächst das Wasser forttreibt, so werden mit diesem auch die inneren Theile der elektrisch geladenen Grenzschichten der Flüssigkeit fortgetrieben. Solange diese sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit parallel der Röhrenwand verschieben und daher fortdauernd gleichmässig unter dem Einflusse von deren galvanischen Kräften bleiben, wird ihr elektrisches Gleichgewicht nicht gestört. Jenseits des Ausflussendes der Röhre aber werden sie entweder durch Wirbelbewegung von der Wand losgerissen, oder wenn sie an dieser bleiben, wegen verminderter Strömungsgeschwindigkeit in dickerer Schicht zusammengedrängt. Durch beide Processe wird ihre positive Ladung ganz oder theilweise dem bindenden Einflusse der negativen Schicht in der Wand entzogen und frei werden.

Am Anfange des Rohres andererseits werden neue Schichten an die Wand treten, und da letztere schon negativ geladen ist, werden sie ihre positive Elektricität dem Reste der Flüssigkeit entnehmen, negative darin lassen müssen.

Die vor dem Anfange des Rohres angesammelte negative und die jenseits des Endes gesammelte positive Elektricität werden sich theils durch die Flüssigkeitssäule des Rohres, theils durch jede andere Leitung, die ihnen geboten wird, wieder ausgleichen. In einer solchen Leitung wird also ein galvanischer Strom sich zeigen. Wenn keine anderweitige Leitung da ist,

wird sich die elektrische Potentialdifferenz zwischen den Enden des Rohres so weit steigern müssen, bis durch Leitung im Rohre so viel Elektricität zurückfliesst, als durch Convection mit den Wassertheilchen vorwärts getrieben wird.

351 In den wesentlichen Grundzügen stimmt diese Erklärung mit derjenigen überein, welche Hr. G. Quincke[1]) gegeben hat. Derselbe hat nur die Bewegungen der reibenden Flüssigkeit damals nicht im Einzelnen soweit bestimmen können, als es mit Hülfe unserer gegenwärtigen Kenntnisse möglich ist, und deshalb quantitative Bestimmungen aus seinen theoretischen Betrachtungen nur für wenige der einfachsten Verhältnisse herleiten können.

Für eine Reihe von Fällen liegen die hinreichenden experimentellen Data vor, um auch die Grösse der galvanischen Spannung zwischen Flüssigkeit und Wand zu berechnen, die nach der eben skizzirten Theorie vorausgesetzt werden muss. Es zeigt sich, dass diese sich durchaus nicht weit von den zwischen Metallen beobachteten Werthen der galvanischen Kraft entfernt, und nur der elektromotorischen Kraft eines oder weniger Daniell'scher Elemente gleich zu setzen ist.

§ 1. Flüssigkeit durch einen elektrischen Strom fortgetrieben.

Wir denken uns leitende Flüssigkeit in einer isolirenden cylindrischen Röhre enthalten, an der Grenze beider eine elektrische Doppelschicht, deren Dicke wir als verschwindend klein gegen die linearen Dimensionen des Röhrenquerschnittes ansehen. Die Axe der Röhre sei Axe der x, die Geschwindigkeit der Flüssigkeit dieser parallel sei u, die Geschwindigkeitscomponenten senkrecht zur Axe der Röhre seien dagegen überall gleich Null, dann muss nach den hydrostatischen Gesetzen in einer incompressibelen Flüssigkeit sein:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

d. h. u kann nur noch Function von y und z sein. Ich bemerke, dass die hier vorausgesetzte Strömungsweise in hin-

1) Pogg. Ann. Bd. CXIII. S. 513—598. 1861.

reichend langen engen Röhren nicht nothwendig vom Anfange 352
der Röhre an besteht, aber in deren entfernteren Strecken unter dem Einflusse der Reibung zu Stande kommt und dann bis zum Ende der Röhre so bleibt. Es ist dies die Art der Bewegung, für welche die Gesetze von Poiseuille gelten.

Bezeichnen wir weiter den hydrostatischen Druck mit p, die Reibungsconstante der Flüssigkeit mit k^2 und die elektrische Kraft, die in Richtung der x auf die Volumeneinheit der Flüssigkeit wirkt, mit X, so ist die Strömungsgleichung für den stationären Strom:

$$X - \frac{\partial p}{\partial x} = -k^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]. \tag{1}$$

Es sei ε die elektrische Dichtigkeit der äusseren Flüssigkeitsschichten, welche ebenfalls nur Function von y und z, nicht von x ist; ferner sei J die Stromintensität, σ der specifische Widerstand der Flüssigkeit, φ die elektrische Potentialfunction, alle diese Grössen nach elektrostatischem Maasse gemessen, und Q der Querschnitt der Röhre, so ist nach Ohm's Gesetz:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{J \cdot \sigma}{Q}$$

und:

$$X = -\varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varepsilon \cdot \frac{J \cdot \sigma}{Q}. \tag{1a}$$

Die Gleichungen (1) und (1a) vereinigen sich zu:

$$-\frac{\varepsilon \cdot J \cdot \sigma}{Q} + \frac{\partial p}{\partial x} = k^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]. \tag{1b}$$

Da u und ε von x unabhängig sein sollen, wird dasselbe hiernach auch für $\partial p / \partial x$ gelten. Dies wird also constant gesetzt werden können:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{P}{L},$$

wo P den Druckunterschied an den Enden der Röhre, und L deren Länge bezeichnet.

Die Grenzbedingung für die bewegte Flüssigkeit an der Gefässwand, wenn diese im Stande ist, längs dieser Wand 353

zu gleiten, wäre, wenn l die Gleitungsconstante der reibenden Flüssigkeit bezeichnet und N die nach innen gerichtete Normale:

$$\bar{u} = l \frac{\partial u}{\partial N}. \tag{1c}$$

Um die Gleichungen (1b) und (1c) zu erfüllen, können wir die Function u in zwei Theile zerlegen:

$$u = u_0 + u_1, \tag{2}$$

sodass:

$$\frac{P}{L} = k^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \right), \tag{2a}$$

$$-\frac{\varepsilon \cdot \sigma J}{Q} = k^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right), \tag{2b}$$

$$\bar{u}_0 = l \cdot \frac{\partial u_0}{\partial N}, \tag{2b}$$

$$\bar{u}_1 = l \cdot \frac{\partial u_1}{\partial N}. \tag{2c}$$

Diese Annahme erfüllt die durch die Differentialgleichungen vorgeschriebenen Bedingungen. Die Bewegung u_0 ist die, welche in reibender Flüssigkeit unter dem Einflusse eines hydrostatischen Druckes eintritt, u_1 dagegen ist die, welche die elektrische Kraft ohne hydrostatischen Druck hervorbringen würde; beide superponiren sich einfach.

Vergleichen wir mit der Gleichung (2b) die aus den Gesetzen der elektrischen Potentialfunctionen mit Berücksichtigung von $\partial^2 \varphi / \partial x^2 = 0$ fliessende Gleichung:

$$-4\pi\varepsilon = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},$$

so ergiebt sich daraus:

$$0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left[\varphi - \frac{4\pi k^2 Q}{J\sigma} u_1 \right],$$

woraus folgt, da φ bei constantem J linear von x abhängig ist, u_1 aber gar nicht, dass:

$$\varphi - \frac{4\pi k^2 Q}{J\sigma} u_1 = C - \frac{\sigma J}{Q} + by + cz,$$

wo C, b, c Integrationsconstanten sind.[1])

1) Ein Druckfehler im Factor des x verbessert (1881).

Die Gleichung (2c) ergiebt hiernach an der Grenzfläche: 354

$$\varphi_a - l \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} = C - \frac{\sigma J x}{Q} + (\overline{by} + \overline{cz}) - l \cdot \left(b \frac{\partial y}{\partial N} + c \frac{\partial z}{\partial N} \right).$$

Da φ die Potentialfunction der rings um das Rohr gleichmässig verbreiteten Doppelschicht ist, so wird sie, falls nur die Dicke dieser Schicht überall gegen den Krümmungshalbmesser der Fläche verschwindet, an allen Theilen des Umfanges den gleichen Werth haben müssen, und die von y und z abhängigen Glieder der letzten Gleichung müssen verschwinden, d. h. $b = c = 0$. In der Mitte des Rohres, wo $\varepsilon = 0$, können wir dann setzen:

$$\varphi_i = - \frac{\sigma J}{Q} x$$

und erhalten also:

$$\varphi_a - \varphi_i - l \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} = C.$$

Demnach wird der Werth der Strömung sein:

$$\frac{4 \pi k^2 Q}{J \sigma} u_1 = \varphi - \varphi_a + l \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N}. \tag{3}$$

Wenn keine Differenz des hydrostatischen Druckes an den beiden Enden der Röhre stattfindet, so wird die andere Stromcomponente $u_0 = 0$ sein, und u_1 ist die einzige vorkommende. Die gesammte durch jeden Querschnitt der Röhre fliessende Flüssigkeitsmenge U_1 hängt also dann auch nur von dieser ab. Unter der gemachten Voraussetzung, wonach die Dicke der elektrischen Schicht, innerhalb deren kleinere Werthe von u_1 vorkommen, gegen die Dimensionen des Querschnittes Q der Röhre verschwindet, können wir den Werth von u_1, der in der Mitte der Röhre constant ist, im ganzen Querschnitte derselben als constant betrachten und erhalten also:

$$U_1 = \frac{\sigma . J}{4 \pi k^2} \left[\varphi_i - \varphi_a + l \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right], \tag{3a}$$

welcher Werth von den Dimensionen der Röhre unabhängig ist.

Bezeichnen wir ferner mit A die elektromotorische Kraft, 355
die den Strom J in der Länge L des Rohres unterhält, so ist:

$$\frac{J . \sigma . L}{Q} = A,$$

also können wir den Werth der Ausflussmenge auch in die Form bringen:

$$U_1 = \frac{QA}{4\pi L k^2}\left[\varphi_i - \varphi_a + l \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N}\right], \qquad (3b)$$

welcher Werth von dem Leitungswiderstande der Flüssigkeit unabhängig ist.

Poröse Thonplatten können wir als Wände betrachten, die von einem Systeme feiner Poren durchzogen sind. Versuche über das Gewicht Wasser, welches eine gewöhnliche für galvanische Batterien bestimmte Zelle einsaugt, und über das specifische Gewicht der nassen Zelle, zeigten, dass der feste Thon etwa doppelt soviel Raum einnimmt, als die Porencanäle, die er übrig lässt. Wenn man dann annimmt, dass Porencanäle von kreisförmigem Querschnitte gleichmässig nach allen Richtungen durch den Thon verlaufen, so ergiebt die Durchgängigkeit für Druckdiffusion, wie sie aus einer Anzahl von Versuchen der Herren G. Wiedemann und Quincke für die gebrauchten Thonwände erhellt, dass der mittlere Durchmesser dieser Canäle auf $\frac{1}{13}$ bis $\frac{1}{40}$ mm zu berechnen wäre, sodass derselbe immerhin noch sehr gross wäre verglichen mit der muthmaasslichen Dicke der elektrischen Grenzschichten. Die hierauf bezügliche Voraussetzung unserer Rechnung ist also bei den Versuchen mit Thonplatten als erfüllt anzusehen. Da es nur auf den letzteren Punkt ankommt, unterlasse ich es hier einzelne Berechnungen auszuführen. Auch liegen mir noch keine Fälle vor, wo alle zur Rechnung nöthigen Data an ein und derselben regelmässig gestalteten Thonplatte gewonnen worden wären.

Die Anzahl der Röhren wächst proportional der Oberfläche, ihre Länge proportional der Dicke des gebrauchten
356 Plattenstücks. Bei gleichbleibender Beschaffenheit der Thonplatten und der Flüssigkeit muss also nach Gleichung (3b) die Menge der ohne hydrostatischen Druck durchfliessenden Flüssigkeit proportional dem Potentialunterschiede an beiden Seiten der Platte, ihrer Oberfläche und umgekehrt proportional der Dicke derselben sein, wie es Hr. G. Wiedemann[1]) gefunden

1) Pogg. Ann. Bd. LXXXVII. S. 321—351. 1852.

hat. Die wässrigen Flüssigkeiten fliessen in den Thonplatten in der Richtung der positiven Elektricität, müssen also selbst gegen die Thonwand positive Spannung angenommen haben. Bei gleichbleibender Intensität des Stromes dagegen hat, wie Gleichung (3a) erkennen lässt, die Dicke L der Platte keinen Einfluss, und auch ihre Oberfläche nicht, da in jeder einzelnen Röhre die Intensität umgekehrt proportional der Anzahl N der Röhren sich verändert, und also das Product NJ constant bleibt, was ebenfalls in Uebereinstimmung mit Hrn. G. Wiedemann's Versuchen ist. Derselbe hat in § 5 seiner zweiten Abhandlung über die Bewegung der Flüssigkeiten im Kreise der geschlossenen galvanischen Säule [1]) eine Reihe von Messungen gegeben, aus denen sich die Potentialdifferenz $(\varphi_i - \varphi_a)$ berechnen lässt, unter der Voraussetzung, dass keine Gleitung stattfand. Wir werden übrigens nachher bei der Discussion der Versuche von Hrn. Quincke sehen, dass bestimmte Thatsachen gegen das Vorkommen der Gleitung in ähnlichen Fällen sprechen.

In den genannten Versuchen ist die Menge des durch den Strom abgeschiedenen Kupfers voltametrisch bestimmt worden. Nun zersetzt nach R. Bunsen Weber's elektromagnetische Stromeinheit in der Secunde 0,009 2705 mgr Wasser. Oder da das Aequivalent des Kupfers Cu zu dem des Wassers H_2O sich wie 63,3 : 18 verhält, und da nach Kohlrausch jun. ein Daniell eine elektromotorische Kraft D gleich 11,71 Weber-Siemens hat, so giebt ein Daniell im Kreise, dessen Widerstand gleich einer Siemens'schen Einheit S ist, 0,38176 mg 357
Kupfer in der Secunde, welche Grösse wir mit γ bezeichnen wollen. Ist also die Kupfermenge g mg durch einen Strom, der t Secunden dauerte, abgeschieden, so ist:

$$Jt = \frac{g \cdot D}{\gamma \cdot S},$$

wo D die elektromotorische Kraft eines Daniell'schen Elementes bezeichnet.

Also nach Gleichung (3a):

$$\frac{\gamma\, Ut \,.\, S}{g\, D} = \frac{\sigma}{4 \pi k^2} (\varphi_i - \varphi_a).$$

---

1) Pogg. Ann. Bd. XCIX. S. 199. 1856.

Hr. G. Wiedemann hat σ angegeben in Einheiten, die dem Widerstande des Platins entsprechen, d. h. gleich dem Widerstande von einem Platinwürfel von 1 mm Seite sind. Der Widerstand eines solchen Cubus voll Quecksilber ist 0,001 Siemens; das Leitungsvermögen des Platins verhält sich nach Matthiessen zu dem des Quecksilbers wie 10,53 : 1,63 = 6,46 : 1. Also ist der Widerstand des Platinwürfels gleich S/m, wenn wir $m = 6460/\text{mm}$ setzen. An Stelle der Grösse b ist dann, wenn b' die Wiedemann'sche Zahl bedeuten soll, zu setzen:

$$b = b' \cdot \frac{S}{m}.$$

Die Grösse $k_0{}^2$ für Wasser von 15° ist nach Poiseuille gleich 1,1441 mg/mm-sec.[1]) Hr. Wiedemann hat das Verhältniss der Ausflusszeit τ der Lösung zu der eines gleichen Volumens Wasser angegeben. Dann ist $k^2 = k_0{}^2 . \tau$. Also unsere Gleichung wird nach diesen Substitutionen:

$$\frac{\varphi i - \varphi a}{D} = \frac{4\pi k_0{}^2 . \gamma . m}{D^2} \cdot \frac{Ut}{g} \cdot \frac{\tau}{\sigma'}.$$

Die linke Seite der Gleichung giebt den Werth der gesuchten Potentialdifferenz, ausgedrückt in Theilen der in einem
358 Daniell'schen Elemente auftretenden. Rechts ist die Grösse D^2 nach elektrostatischem Maasse zu messen, wo ihr Werth ist:

$$D = 0{,}374 \frac{\sqrt{\text{mm} \cdot \text{mg}}}{\text{sec}}.$$

Die Grösse Ut ist bei uns ein Volumen, was in Cubikmillimetern zu geben ist.

Die von Hrn. G. Wiedemann angegebenen Data machen es möglich, die Werthe des elektrischen Moments, soweit es in die Flüssigkeit fällt, für folgende vier Flüssigkeiten zu berechnen.

---

1) Dieselbe würde nach der Bezeichnungsweise meiner mit Hrn. v. Piotrowski ausgeführten Arbeit (siehe oben S. 215 und 218) mit $k^2 h$ zu bezeichnen sein, wo h die Dichtigkeit der Flüssigkeit bezeichnet. (Im Original ist die Zahl falsch citirt; die letzte Columne der folgenden Tabelle ist demgemäss verbessert. 1881.)

In 1000 ccm Lösung sind enthalten von	mg	Volumen der übergeführten Flüssigkeit cmm	Menge des abgeschiedenen Kations in mg	Verhältniss der Ausflusszeit zu der eines gleichen Volumens Wasser	Widerstand der Lösung σ', der des Platins gleich 0,001 gesetzt	$\varphi i - \varphi a$ in Daniell's
			Schwefelsäure.			
			Cu			
SO_3	76,56	2800	3770	1,166	179,0	1,2265
	47,36	1510	1174	1,095	289,3	1,2338
			Kupfervitriol.			
			Cu			
$CuSO_4$	149,38	13090	1181	1,417	2247	1,7717
$+ 5 H_2O$	97,544	12210	904	1,238	3076	1,3781
	89,125	15930	923	1,213	3258	1,6290
			Kupfernitrat.			
			Cu			
$Cu (NO_3)_2$	82,258	3010	1453	1,138	1434	0,4168
	71,852	4360	1903	1,118	1559	0,4165
	64,037	6100	1977	1,103	1695	0,5089
	42,010	2540	550	1,061	2409	0,5157
			Silbernitrat.			
			Ag			
$Ag NO_3$	79,74	5730	2239	1,014	1876	1,1964
	79,46	7600	2765	1,014	1878	1,2832
	29,867	12955	1342	1,003	4656	1,8637

Die ersten drei Zahlencolumnen sind aus Hrn. Wiede- 359
mann's Versuchen in Pogg. Ann. XCIX. S. 199 bis 205 entnommen, die vierte aus den Angaben ebenda S. 222 bis 224, die fünfte aus denen ebenda S. 227 bis 228, die letzten beiden durch Interpolation gewonnen, welche in Bezug auf die Widerstände leichter auszuführen ist an deren reciproken Werthen, d. h. den Leitungsvermögen, die dem Salzgehalte nahezu proportional sind. Die letzte Columne giebt die von mir berechneten Werthe der Potentialdifferenz zwischen Innerem und Grenze der Flüssigkeit für die Poren von Thonscheidewänden. Sie liegen bei jedem einzelnen Elektrolyten einander sehr nahe, haben Werthe, die die elektromotorische Kraft von 2 Daniell nicht übertreffen, und steigen im allgemeinen für

verdünntere Lösungen. Nur beim Kupfervitriole scheint ein Steigen auch für concentrirtere Lösungen einzutreten.

§ 2. Drucksteigerung durch elektrische Diffusion.

Den zweiten Theil der Stromgeschwindigkeit, welchen wir oben mit u_0 bezeichnet haben, und der durch den hydrostatischen Druck unterhalten wird, wollen wir zunächst unter der Voraussetzung eines kreisförmigen Querschnittes der Röhre bestimmen.

Die Gleichungen:

$$\frac{P}{L} = k^2 \left(\frac{\partial u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial u_0}{\partial z^2} \right), \tag{2}$$

$$u_0 = l \, . \, \frac{\partial u_0}{\partial N} \tag{3}$$

ergeben unter diesen Umständen den leicht zu verificirenden Werth:

$$u_0 = \frac{P}{4 k^2 L} (r^2 - R^2) - \frac{l P R}{2 L k^2}, \tag{4}$$

wo R den Radius der Röhre bezeichnet, und:

$$r^2 = y^2 + z^2.$$

Das durch jeden Querschnitt fliessende Flüssigkeitsvolumen U_0 ist demnach:

$$U_0 = 2 \pi \int_0^R u_0 \, . \, r \, dr = - \frac{\pi P R^4}{8 k^2 L} - \frac{\pi P R^3 l}{2 k^2 L}. \tag{4a}$$

360 Ist durch Einfluss des Stromes der Druck so gesteigert, dass der Wasserstand constant ist, so muss sein:

$$U_0 + U_1 = 0$$

oder:

$$0 = - \frac{\pi P}{8 L k^2} \left\{ R^4 + 4 R^3 l \right\} + \frac{R^2 A}{4 k^2 L} \left\{ \varphi_i - \varphi_a + l \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right\}. \tag{4b}$$

Wenn $l = 0$, folgt daraus:

$$\frac{\pi}{2} P R^2 = A (\varphi_i - \varphi_a). \tag{4c}$$

Dass der Flüssigkeitsdruck P, bis zu welchem die Flüssigkeit durch den elektrischen Strom hinaufgetrieben werden

kann, bei gleichbleibendem Röhrensysteme, und wie wir hinzufügen müssen, bei gleichbleibender Spannung zwischen Flüssigkeit und Wand, der elektromotorischen Kraft proportional ist, die zwischen beiden Seiten der Scheidewand wirkt, hat Hr. G. Wiedemann schon in seiner ersten Arbeit für Thonscheidewände erwiesen. Hr. Quincke[1]) hat dasselbe in capillaren Glasröhren für destillirtes Wasser gezeigt, durch welches er den Strom von 40 bis 81 Grove'schen Elementen leitete. Seine Versuche mit cylindrischen Röhren von verschiedenem Durchmesser haben ihn zu dem Ergebnisse geführt, dass die Steighöhe sei:

$$\frac{\Delta h \,.\, \sin\varphi}{22{,}9} = \frac{P}{\varepsilon g} = \frac{n\, b}{R^2}, \tag{4d}$$

worin b für destillirtes Wasser gleich 0,000 061 mm ist, n die Anzahl der Grove'schen Elemente bezeichnet und R den Radius der Röhre in Millimetern. Δh ist die Verschiebung der Wassersäule in Scalentheilen, von denen 22,9 auf ein Millimeter gehen, und φ der Neigungswinkel der Röhre gegen die Horizontale. P ist die bisher von uns gebrauchte Bezeichnung für den hydrostatischen Druck in absolutem Maasse, ε die 331
Dichtigkeit der Flüssigkeit, g die Intensität der Schwere. Dieses Resultat stimmt mit unserer, unter der Voraussetzung $l = 0$ entwickelten Gleichung (4c), wobei sich ergiebt:

$$\varphi_i - \varphi_a = \frac{\pi \varepsilon g b}{2G},$$

wo G die Grösse der elektromotorischen Kraft eines Grove'schen Elementes in absolutem elektrostatischem Maasse bedeutet. Setzen wir die elektromotorische Kraft von einem Daniell'schen Elemente gleich 0,374 $\frac{1}{\text{Sec.}} \sqrt{\text{mm.}\,\text{mg}}$ und die eines Grove'schen gleich 0,6387 derselben Einheit, so ergiebt sich für destillirtes Wasser an Glas:

$$\varphi_i - \varphi_a = 3{,}9346 \text{ Daniell.}$$

---

1) Pogg. Ann. CXIII. S. 541 ff. 1861. Auf S. 543 Zeile 7 ist ein Druckfehler, der in verschiedene Lehr- und Handbücher übergegangen ist. Es muss nämlich heissen, dass „die Steighöhe nahe umgekehrt proportional dem Quadrate des Röhrenradius ist", wie Hrn. Quincke's experimentelle Beweisführung und mathematische Formel deutlich zeigen.

Der Werth ist höher als die für Salzlösungen an Thonscheidewänden gefundenen Werthe. Aber auch jene Werthe wiesen schon auf einen höheren Werth des reinen Wassers hin.

Dagegen würden die Versuche ein anderes Resultat haben ergeben müssen, wenn die Gleitungsconstante l von Null verschieden gewesen wäre. Unter übrigens gleichen Bedingungen hätte dann der hervorgebrachte Druck P der Grösse $(R^2 + 4l.R)$ umgekehrt proportional sein müssen. Uebrigens würde unter diesen Umständen auch nicht die Potentialdifferenz $\varphi_i - \varphi_a$, sondern das sehr viel grössere Quantum $\partial\varphi/\partial N$, welches der Dichtigkeit der Belegung proportional ist, den Erfolg bestimmt haben.

Hr. Quincke hat auch Versuche mit Röhren angestellt, deren Querschnitt durch eingelegte cylindrische Glasfäden ringförmig gemacht war. Der mittlere Durchmesser dieser Fäden war theils aus dem Gewichte und der Länge derselben berechnet, theils direct mit einem Schraubenmikrometer unter dem Mikroskope gemessen. „Die nach beiden Methoden gefundenen Werthe der Durchmesser stimmten genügend überein“ (l. c. p. 529). Da die Röhren dabei horizontal lagen, so
362 ist anzunehmen, dass der Glasfaden im tiefsten Theile der Röhre der Wand angelegen hat. Die Berechnung der unter einem bestimmten Drucke hindurchströmenden Wassermenge kann nach dem von G. Kirchhoff für die Bestimmung der Vertheilung der Elektricität auf zwei benachbarten Kugeln angewendeten Verfahren[1]), nämlich mit Hülfe der an den beiden Kugeln oder Kreisen hin und her geworfenen elektrischen Spiegelbilder durchgeführt werden.

Wenn r der Halbmesser der Röhre ist, deren Axe mit der z-Axe zusammenfällt, und ϱ der Halbmesser des cylindrischen Stabes, der der Wand der Röhre anliegt, also $r - \varrho$ der Abstand zwischen der Axe der Röhre und der Axe des Stabes, so ist die Aufgabe eine Lösung der Differentialgleichung:

$$4B = \frac{P}{Lk^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \tag{5}$$

1) Crelle's Journal für r. u. angew. Mathematik LIX. S. 89—110

zu finden, für welche an der Oberfläche der Röhre:

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{5a}$$

wie an der Oberfläche des Stabes:

$$(x - r + \varrho)^2 + y^2 = \varrho^2 \tag{5b}$$

der Werth eintritt:

$$u = 0.$$

Eine solche Lösung ist:

$$u = B(x^2 + y^2 - r^2) + 2 B r \varrho . V. \tag{6}$$

Die Grösse V bedeutet hierin den reellen Theil einer transscendenten Function, welche letztere man auf die von Gauss in seiner Abhandlung über die hypergeometrischen Reihen behandelte Function:

$$\Psi_\sigma = \underset{k=\infty}{Limes:} \left\{ \sigma \log k - \frac{1}{\sigma + 1} - \frac{1}{\sigma + 2} \cdots - \frac{1}{\sigma + k} \right\} \tag{6a}$$

zurückführen kann. Es ist nämlich V gleich dem reellen Theile der Differenz:

$$- \Psi_{\sigma_1} + \Psi_{\sigma_2}, \tag{6a}$$

wo:

$$\sigma_1 = \frac{\varrho (x + yi)}{(x + yi - r)(r - \varrho)}, \qquad \sigma_2 = - \frac{r \varrho}{(x + yi - r)(r - \varrho)}.$$

Bei der Bildung des Integrals: 363

$$U_0 = \int u_0 \, dx \, dy,$$

welches über den Zwischenraum beider Kreise zu erstrecken ist und die gesammte Strömungsmenge giebt, kann man die Quadraturen über die Transscendente V vermeiden, wenn man schreibt:

$$\int V . dx . dy = \frac{1}{4B} \int V . \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) dx \, dy$$

und die im Green'schen Satze für die Potentialfunctionen gebrauchten partiellen Integrationen ausführt, um das Integral über die Fläche in Integrale über die Umfangslinien zu verwandeln. Diese sind in diesem Falle leicht zu finden, wenn man ausserhalb des grossen Kreises:

$$u_0 = 0$$

setzt und im Inneren des kleinen:

$$u_0 = - 2 B (r - \varrho)(x - r).$$

Es wird dann der Werth von u_0 überall continuirlich, an den beiden Kreisen der Sprung seines Differentialquotienten gleich einer Constanten, und auszuschliessen sind von der Fläche des inneren Kreises schliesslich durch unendlich kleine umschliessende Kreise diejenigen Stellen, in denen die Grösse σ_1 gleich einer negativen ganzen Zahl wird, weil dort die entsprechende Function Ψ unendlich wird. Das Resultat ist:

$$U_0 = -\frac{\pi}{2} B (r^4 - \varrho^4) + 2\pi B r^2 \varrho^2 \Psi', \tag{7}$$

wo die Function:

$$\Psi' = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}$$

für den Werth genommen ist:

$$\sigma = \frac{\varrho}{r - \varrho}.$$

Also:

$$\Psi' = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \frac{1}{\left(\frac{\varrho}{r-\varrho} + n + 1 \right)^2} \right\}. \tag{7a}$$

364 Wenn man diese Summe berechnet hat bis zu einem Gliede, dessen Nenner grösser als 4,5 ist, kann man bei Rechnung mit fünfstelligen Logarithmen den Rest der Reihe durch die für grosse, positive Werthe von σ gültige Formel finden:

$$\Psi'_\sigma = \frac{1}{\sigma + \frac{1}{2}} - \frac{1}{12} \frac{1}{(\sigma + \frac{1}{2})^3} + \frac{7}{240} \frac{1}{(\sigma + \frac{1}{2})^5} \text{ etc.}, \tag{7b}$$

die aus der von Gauss für Ψ_σ gegebenen Formel [Gleichung (66) der Abhandlung über die hypergeometrische Reihe] herzuleiten ist.

Für sehr kleine Werthe von $r - \varrho$ geht die Gleichung über in:

$$U_0 = -\frac{5\pi}{6} B (r - \varrho)^3 (r + \varrho). \tag{7c}$$

Der Werth von U_1 wird nach Gleichung (3b) in diesem Falle:

$$U_1 = \frac{A (r^2 - \varrho^2)}{4 L k^2},$$

und die Gleichung $U_0 + U_1 = 0$ ergiebt also für sehr kleine Werthe von $r - \varrho$:

$$-\frac{5\pi}{6} B (r - \varrho)^2 = \frac{A}{4 L k^2} \tag{7d}$$

oder:

$$P = \frac{6A}{5\pi (r - \varrho)^2}.$$

Im Falle der Glasstab central läge, wäre zu setzen:

$$u_0 = B(x^2 + y^2 - r^2) - B \frac{r^2 - \varrho^2}{\log r - \log \varrho} \cdot \log \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r} \right), \tag{8}$$

und es ergiebt sich:

$$U_0 = -\frac{\pi}{2} B (r^4 - \varrho^4) + \frac{\pi}{2} B \frac{(r^2 - \varrho^2)^2}{\log r - \log \varrho}. \tag{8a}$$

Für sehr kleine Werthe von $\frac{r - \varrho}{r}$ wird dies:

$$U_0 = -\frac{2\pi B}{6} (r - \varrho)^3 (r + \varrho).$$

Dies ist also nur 0,4 von dem Werthe, den U_0 erhält, wenn der Glasfaden an der Seite der Röhre liegt. Dem entsprechend wird bei elektrischer Fortführung der Flüssigkeit 365
die Druckhöhe bei centraler Lage des Stäbchens 2,5 mal höher als bei wandständiger Lage.

Da nun kleine Biegungen des Fadens bewirken können, dass er theilweise central, theilweise wandständig liegt, ferner die kleine Differenz $r - \varrho$ bei sehr kleinen Unregelmässigkeiten in den Durchmessern der Röhre und des Fadens merklich variiren konnte, so dürfen wir uns nicht wundern, wenn die Rechnung mit Hrn. Quincke's Messungen nicht gerade genau zusammenstimmt. Ich habe die Werthe der Neigung Δh_1 bei eingelegtem Glasfaden aus denen bei leerer Röhre Δh_0, welche Hr. Quincke in Theilen der gebrauchten Scala angiebt[1]) berechnet.

---

1) Pogg. Ann. Bd. CXIII. S. 544. Tabelle 1861. In der letzten Columne dieser Tabelle sub Nr. 5 und 7 ist vor den beiden mit 2 anfangenden Zahlen je eine Null zu streichen, was übrigens die vorliegende Rechnung nicht berührt.

$2r$ mm	2ϱ mm	Δh_0	Δh_1 beobachtet	berechnet
0,799	0,341	15	23,75	30,06
0,897	0,341	5,850	9,957	10,25
0,897	0,651	5,490	57,37	44,66
0,897	0,727	5,520	70,41	92,80

Wenn auch die Uebereinstimmung der einzelnen gemessenen und beobachteten Werthe aus den angegebenen Gründen ziemlich mangelhaft ist, so zeigen beide doch im ganzen eine Uebereinstimmung im Gange der Function. Bei der am wenigsten verengerten Röhre (Zeile 2 der Tabelle) ist die Uebereinstimmung gut, bei den anderen die Abweichung bald positiv, bald negativ.

§ 3. Fortführung des Wassers durch Entladungen von Leydener Flaschen.

Bei diesen Versuchen hat Hr. Quincke enge Röhren gebraucht, an denen zwei oder mehr Stellen aufgeblasen waren, um Platindrähte aufzunehmen, die den Strom zuleiteten. Die Stromkraft war alsdann nur in einem Theile der Länge des ganzen Rohrs wirksam, aber die Flüssigkeit musste sich im
366 ganzen Rohre gegen die Reibung vorwärts bewegen. Da bei den hier vorkommenden Verhältnissen die durch Unterschiede des hydrostatischen Drucks hervorgerufene Geschwindigkeit u_0 diesen Druckunterschieden proportional ist, so können wir der Abkürzung wegen die Gleichung, aus der sich die den Querschnitt in der Zeiteinheit passirende Flüssigkeitsmenge $U_{1,2}$ bestimmt, schreiben:

$$W_{1,2}\, U_{1,2} = (P_1 - P_2), \qquad (9)$$

wo P_1 und P_2 die Drucke am Anfange und Ende der Röhre sind, und für cylindrische Röhren von kreisförmigem Querschnitte und dem Radius R:

$$W_{1,2} = \frac{8k^2 L}{\pi R^4} \qquad (9a)\ [1]$$

den hydrostatischen Reibungswiderstand der Röhre darstellt.

Nun sei mit dem Index 1 bezeichnet der Anfang des Capillarrohrs, welcher in ein grösseres Wassergefäss hinein-

1) Druckfehler des Originals verbessert.

ragt, mit 2 und 3 dagegen die Stellen der beiden Platindrähte, durch die der Strom geht, endlich mit 4 das Ende der Flüssigkeitssäule, so findet eine elektrische Fortführung nur zwischen 2 und 3 statt, und die Menge derselben ist, wie oben gezeigt, wenn wir $\varphi_i - \varphi_a = \varphi$ setzen:

$$U = \frac{J\sigma}{4\pi k^2}\varphi.$$

Die Flüssigkeitsmenge, welche durch den Querschnitt des Rohres geht, muss aber überall dieselbe sein, also:

$$U_{1,2} = U_{2,3} + \frac{J\sigma}{4\pi k^2}\varphi = U_{3,4}. \qquad (9\text{b})$$

Andererseits können wir die U durch die Druckunterschiede ausdrücken:

$$\frac{P_1 - P_2}{W_{1,2}} = \frac{P_2 - P_3}{W_{2,3}} + \frac{J\sigma}{4\pi k^2}\varphi = \frac{P_3 - P_1}{W_{3,4}}. \qquad (9\text{c})$$

Der Anfangs- und Enddruck sind einander gleich gesetzt, $P_1 = P_4$. Aus den beiden Gleichungen bestimmen sich die beiden Unbekannten P_2 und P_3:

$$\frac{P_1 - P_2}{W_{1,2}} = \frac{P_3 - P_1}{W_{3,4}} = \frac{W_{2,3}}{W_{1,2} + W_{2,3} + W_{3,4}} \cdot \frac{J\sigma\varphi}{4\pi k^2} = U_{1,2} = U_{3,4}. \qquad (9\text{d})$$ 367

Daraus folgt:

$$U_{2,3} = -\frac{W_{1,2} + W_{3,4}}{W_{1,2} + W_{2,3} + W_{3,4}} \cdot \frac{J\sigma\varphi}{4\pi k^2}.$$

Im Innern des Rohres (2,3) geht also der Strom dem der Oberflächenschicht und dem in den Endtheilen des Rohres herrschenden entgegen. Dies ist ebenfalls von Hrn. Quincke bei der Beobachtung der Bewegungen von kleinen, in der Flüssigkeit enthaltenen festen Theilchen beobachtet worden.[1])

Wenn man nach der Zeit integrirt, so ist:

$$\int J\,dt = E,$$

d. h. gleich der Elektricitätsmenge, welche hindurchgegangen ist:

$$\int U_{3,4} \cdot dt = \frac{W_{2,3}}{W_{1,2} + W_{2,3} + W_{3,4}} \cdot \frac{E\sigma\varphi}{4\pi k^2}. \qquad (10)$$

1) Pogg. Ann. Bd. CXIII. S. 558 ff. 1861.

Also die Vorschiebung der Flüssigkeit im Steigrohre, wie Quincke das Rohr 3 bis 4 nennt, ist proportional der entladenen Elektricitätsmenge, unabhängig von deren elektromotorischer Kraft, wächst (proportional) mit dem specifischen Widerstande der Flüssigkeit, ganz wie es der genannte Beobachter gefunden. Befinden sich drei Platindrähte im Rohre, und bezeichnen wir den mittelsten mit dem Index 5 und die entsprechenden Verschiebungen im Steigrohre für gleiche elektrische Entladungen mit $H_{2,5}$, $H_{5,3}$ und $H_{2,3}$, je nachdem die Drähte 2 und 5, oder 5 und 3, oder 2 und 3 Elektroden waren, so ergiebt unsere Gleichung:

$$H_{2,5} + H_{5,3} = H_{2,3},$$

was ebenfalls von Hrn. Quincke durch Beobachtungen gefunden ist.

Ist $W_{2,5}$ wegen grösserer Weite des Rohres kleiner als $W_{5,3}$, so sollten die Fortführungen den vierten Potenzen der
368 Radien umgekehrt proportional sein. Die Versuche (l. c. p. 528) ergeben ein etwas grösseres Verhältniss, als den angegebenen Radien der Röhren entspricht, für die Fortführung im engeren Rohre (nämlich 15 bis 16 statt 6,9). Der Grund liegt möglicherweise in der Ungleichartigkeit der innern Oberfläche, Ellipticität des Querschnittes oder in einem gleich zu erwähnenden Umstande.

Durch eingelegte Glasfäden nehmen die hydraulischen Widerstände W erheblich zu. Legt man einen solchen in $W_{3,4}$ ein, so nimmt die Fortführung erheblich ab, legt man ihn in $W_{2,3}$ ein, so nimmt sie erheblich zu, wie unsere Formel in Uebereinstimmung mit den Versuchen ergiebt.

Diese Betrachtungen gelten übrigens nur für diejenigen Fälle, in denen die Entladung der Leydener Batterie durch die eingeschaltete Säule von destillirtem Wasser hinreichend verzögert war, um eine der stationären Bewegung in der Röhre nahe kommende Art des Fliessens zu erzeugen. Bei sehr kräftigen Entladungen mit Funkenstrecken zeigten sich die gefundenen Gesetze nicht mehr gültig; die Verschiebung wurde dann kleiner, als sie hätte sein sollen.

Die von Hrn. G. Quincke nachgewiesene Verschiebung im Wasser suspendirter fester Theilchen durch starke elek-

trische Ströme erklärt sich, wie leicht zu sehen, aus denselben Annahmen.

Nach der Hypothese, von der wir ausgegangen sind, würde ein in der Flüssigkeit liegendes Theilchen sich gegen diese elektrisch laden, der Regel nach negativ, sodass der negative Theil der entstehenden Doppelschicht in den festen Theilchen, der positive in der Flüssigkeit läge. Uebrigens ist die algebraische Summe beider elektrischer Quanta gleich Null, und der Schwerpunkt des ganzen Systems, festes Körperchen und elektrisch geladene Flüssigkeitsschicht zusammengenommen, kann also durch elektrische Anziehungskräfte, die von dem Potentialgefälle in der durchströmten Flüssigkeit herrühren, nicht fortbewegt werden. Wohl aber würden diese Anziehungskräfte eine relative Verschiebung der positiven Wasserschicht 369
und des negativ geladenen Körperchens gegeneinander hervorzubringen streben, wobei die Wasserschicht dem Strome positiver Elektricität folgt, das Körperchen in entgegengesetzter Richtung ausweicht. Wäre die Flüssigkeit vollkommen isolirend, so würde die neue Lage als Gleichgewichtslage bestehen bleiben. Da aber durch die Verschiebung der Schichten das Gleichgewicht der galvanischen Spannung zwischen festem Körper und Flüssigkeit gestört ist, und dieses sich durch Leitung immer wieder herzustellen sucht, so wird immer wieder der erste Zustand elektrischer Vertheilung hergestellt, und werden immer neue Verschiebungen des Körperchens gegen die umgebende Wasserschicht veranlasst werden müssen. Auch ist klar, dass bei der geringen Grösse der hierbei vorkommenden Geschwindigkeiten der Wasserströmung die Geschwindigkeit des Theilchens relativ zur umgebenden Wassermasse der Grösse der wirkenden Kraft, d. h. der Dichtigkeit des elektrischen Stromes, oder bei gleichbleibendem Querschnitte des Rohres der Intensität des Stromes proportional sein wird.[1]) Dabei ist noch zu berücksichtigen, dass im Innern des Rohres, wie oben gezeigt wurde, ein Rückstrom der Flüssigkeit stattfindet, der die suspendirten Theilchen mitnimmt und ebenfalls unter sonst

1) Quincke, Pogg. Ann. CXIII. S. 580. 1861.

gleichbleibenden Verhältnissen der Intensität des galvanischen Stromes proportional ist.

§ 4. Elektricität von der strömenden Flüssigkeit fortgetrieben.

Ist ε die elektrische Dichtigkeit in der Entfernung N von der Gefässwand, der Werth von u an der letzteren selbst gleich Null, so wird der letztere in der Entfernung N gleich $N . \partial u / \partial N$ gesetzt werden können, und es ergiebt sich für die Menge Elektricität, die durch das Flächenelement $ds . dN$ des Querschnittes der Röhre in der Zeiteinheit von der Flüssigkeit mitgeführt wird, die Grösse:

370
$$\varepsilon \cdot \frac{\partial u}{\partial N} \cdot N . ds . dN.$$

Wenn wir zunächst nach N integriren, so ist:

$$\int \varepsilon . N . dN = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\partial^2 \varphi}{\partial N^2} \cdot N . dN = \frac{1}{4\pi} (\varphi_i - \varphi_a)$$

dieselbe Grösse, welche das Moment der Doppelschicht darstellen würde, wenn die entgegengesetzte Elektricität des Gefässes ganz in der Grenzfläche vereinigt wäre. Also ergiebt sich die durch den gesammten Querschnitt des Rohres von der Flüssigkeit mitgeführte Elektricität für die Zeiteinheit:

$$E_0 = \frac{1}{4\pi} (\varphi_i - \varphi_a) \int \frac{\partial u}{\partial N} ds. \tag{11}$$

Nach dem Green'schen Satze ist:

$$\int \frac{\partial u}{\partial N} ds = -\iint \Delta u \, dy \, dz = -\frac{P . Q}{k^2 L},$$

wenn wir wie oben mit P den Druckunterschied zwischen beiden Enden des Rohres, mit L dessen Länge, mit Q den Querschnitt und mit k^2 die Reibungsconstante der Flüssigkeit bezeichnen, und wenn ausserdem die in § 1 ausgesprochenen Bedingungen für u erfüllt sind. Alsdann wird:

$$E_0 = -\frac{P . Q}{4\pi k^2 L} (\varphi_i - \varphi_a). \tag{11a}$$

Wirkt ausserdem noch eine elektromotorische Kraft A zwischen den Enden der Röhre, so ist die von dem elektrischen

Strom durch jeden Querschnitt Q geführte Elektricitätsmenge für die Zeiteinheit:

$$E_1 = \frac{A\,Q}{\sigma\,.\,L}.$$

Ist keine andere Leitung als die durch das Rohr vorhanden, so wird der Zustand stationär, wenn:

$$E_0 + E_1 = 0,$$

$$\frac{A}{\sigma} = \frac{P}{4\pi k^2}(\varphi_i - \varphi_a). \tag{11b}$$

Dieser Werth von A ist ganz unabhängig von der Länge, der Grösse und Form des Querschnittes des Rohres. Bei 371
einem Systeme von Canälen, wie sie sich in den Thonscheidewänden finden, wird A also unabhängig von der Dicke, Oberfläche und Porosität der Platten sein müssen, dagegen proportional dem specifischen Leitungswiderstande der Flüssigkeit, wenn deren chemische Natur dabei keine erheblichen Veränderungen erleidet. Das stimmt mit Hrn. Quincke's Erfahrungen überein. Doch ist hierbei vorausgesetzt, dass die Gefässwand im Vergleiche zu der strömenden Flüssigkeit (meist destillirtem Wasser) als Isolator der Elektricität angesehen werden könne. Bei Platindiaphragmen oder solchen von Kohle, wasserdurchtränkten thierischen Membranen oder Seide trifft dies nicht zu. Leider kommen unter den von dem genannten Beobachter gebrauchten Flüssigkeiten keine vor, deren absoluter Widerstand mit Sicherheit zu bestimmen ist. Selbst in den mit Kochsalzlösungen angestellten Versuchen [1]) sind die benutzten Lösungen so verdünnt, dass die Proportionalität des Leitungsvermögens mit dem Salzgehalte einigermaassen zweifelhaft ist. Bei den etwas besser leitenden Lösungen verhinderte die Polarisation der Platinelektroden genaue Messungen der Stromstärke und selbst der elektromotorischen Kraft.

Nach F. Kohlrausch [2]) ist das Leitungsvermögen der Kochsalzlösung von $5^0/_0$ bei 10^0 gleich $523{,}8\,.\,10^{-8}$, wenn das des Quecksilbers $= 1$ gesetzt wird. Die Reibungsconstante lässt

---

1) Pogg. Ann. Bd. CX. S. 59. 1860.

2) Göttinger Nachrichten. 5. Aug. 1874.

sich auf die des Wassers reduciren, da Hr. Quincke die Flüssigkeitsmengen angab, welche der Druck hindurchtrieb. Der Werth der Siemens'schen Widerstandseinheit in elektrostatischem Maasse ist gleich 10^{-12}. sec/cm gesetzt. Zu der Angabe des Werthes bei der halbprocentigen Kochsalzlösung bemerkt Hr. Quincke, dass schon bei dieser die Elektroden so ungleichartig wurden, dass es nicht möglich war, Lösungen von grösserer Concentration anzuwenden. Die Rechnung ergiebt:

372

Procente Kochsalz in der Lösung	$\varphi_i - \varphi_0$ in Daniell's
$\frac{1}{2}$ %	14,56
$\frac{1}{20}$	2,743
$\frac{1}{40}$	1,977
0	1,416 bis 0,1416

Im letzteren Falle habe ich das Leitungsvermögen des destillirten Wassers, da es nicht mit besonderer Vorsicht neu destillirt war, zwischen $30 . 10^{-10}$ und $3 . 10^{-10}$ (Quecksilber = 1) gesetzt, den Angaben von F. Kohlrausch[1]) entsprechend.

Wenn wir den ersten, wahrscheinlich durch Polarisation der Elektroden veränderten Werth ausser Betracht lassen, kommen wir auch hier wieder auf so kleine elektromotorische Kräfte zwischen Wand und Füssigkeit, wie wir sie bei früheren Versuchen gefunden haben.

§ 5. Abweichungen in weiteren Röhren.

Für die Versuche, bei denen man Wasser nicht durch Thonplatten, sondern durch Glasröhren strömen liess und die dadurch entstandene Potentialdifferenz mass, ist zu wiederholen, dass die oben gegebene Theorie voraussetzt, durch die ganze Röhre sei die Wirkung der Reibung vollständig entwickelt, und jeder einzelne, der Axe der Röhre parallele

1) Sitzungsber. der Münchner Akad. 5. Nov. 1875.

Wasserfaden bewege sich so, wie er in einer unendlich langen Röhre sich zu bewegen fortfahren würde. Diese Voraussetzung trifft aber im Anfange einer Röhre, wo das Wasser aus einem weiteren Gefässe in dieselbe eintritt, nicht zu. Es kommt heran, ohne merkliche Rotationsbewegung zu haben. Im Innern der Röhre aber nimmt es solche unter dem Einflusse der Reibung an. Die Rotationen der Volumenelemente, deren Wirbellinien concentrische, die Röhrenaxe umgebende Kreise sind, und deren Werthe, da $v = w = 0$ ist, sich auf $\partial u / \partial y$ und $-\partial u / \partial z$ reduciren, sind in der Tiefe der Röhre nicht mehr Null. Es wird also auch eine gewisse Zeit vergehen, 373
ehe das eingetretene Wasser in den stationär bleibenden Zustand der Rotation seiner Wirbelfäden gekommen ist, und während dieser Zeit wird es mehr oder weniger tief in die Röhre eingedrungen sein. Wie lange es dauert, können wir an einem etwas veränderten einfachen Beispiele berechnen.

Wir wollen annehmen, das Wasser sei in einer unendlich langen Röhre in solcher Bewegung, dass u nur Function von y und z, p unabhängig von t, dagegen:

$$v = w = 0,$$

woraus auch folgt:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Die Bewegungsgleichung mit Berücksichtigung der Reibung wird alsdann:

$$-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \varDelta u. \tag{12}$$

Da die linke Seite nicht von t, y und z, die rechte nicht von x abhängt, so müssen beide constant sein, und es lässt sich u in zwei Theile zerlegen:

$$u = u_1 + u_2, \tag{12a}$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial x} = -k^2 \varDelta u_2, \qquad 0 = \frac{\partial u_1}{\partial t} - k^2 \varDelta u_1. \tag{12b}$$

Längs der Wand gilt für beide die Grenzbedingung:

$$\overline{u_1} = \overline{u_2} = 0. \tag{12c}$$

Dann ist u_2 die schliesslich als stationär stehen bleibende Bewegung, welche dem Gesetze Poiseuille's entspricht.

Für u_1 haben wir dieselben Bestimmungsgleichungen, als wäre u_1 die Temperatur im Querschnitte eines Stabes, welche durch Wärmeleitung auf den Werth $u_1 = 0$, der dauernd am Umfange der Röhre herrscht, zurückgeführt wird. Es ergiebt sich daraus leicht, dass u_1 bei wachsender Zeit gänzlich verschwinden wird, um so schneller, je enger die Röhre, und je grösser die Reibungsconstante k^2.

374 Hat die Röhre kreisförmigen Querschnitt, so können wir u_1 nach Bessel'schen Functionen entwickeln. Setzt man:

$$u_1 = s \, . \, e^{-nt}, \tag{13}$$

so wird:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -n u_1 = k^2 \Delta u_1, \tag{13a}$$

oder wenn s nur Function des Radius ϱ ist:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial \varrho} + \frac{n}{k^2} s = 0. \tag{13b}$$

Das für $\varrho = 0$ continuirlich bleibende Integral dieser Gleichung ist bekanntlich, wenn wir setzen:

$$\frac{n \varrho^2}{k^2} = \sigma^2,$$

$$s = A \left\{ 1 - \frac{\sigma^2}{2 \, . \, 2} + \frac{\sigma^4}{2 \, . \, 2 \, . \, 4 \, . \, 4} - \frac{\sigma^6}{2 \, . \, 2 \, . \, 4 \, . \, 4 \, . \, 6 \, . \, 6} \text{ etc.} \right\}. \tag{13c}$$

Die Werthe von σ, für welche $s = 0$ wird, bestimmen dann die Werthe von n, wenn in der vorletzten Gleichung für ϱ der Radius der Röhre gesetzt wird. Der erste Werth, wo $s = 0$, ist für:

$$\sigma = \frac{\varrho}{k} \sqrt{n} = 2{,}4048.$$

Dieser giebt den kleinsten Werth von n, nämlich für $k^2 = 1{,}1445$ (bei 15° C.):

$$n = \frac{1}{\varrho^2} \cdot 6{,}6163 \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{sec}} \, . \, ^{1)}$$

Wenn also $2\varrho = 1$ mm, so ist:

$$e^{-nt} = 0{,}1,$$

wenn $t = 0{,}08701$ sec.

1) Rechnung corrigirt wegen des auf S. 874 angemerkten Fehlers.

Während also in einer Röhre von 1 mm Durchmesser dieser am langsamsten verschwindende Theil der Bewegung in etwa $\frac{1}{11}$ Secunde auf $\frac{1}{10}$ seiner Grösse reducirt ist, würden in einer Röhre von 2 mm Durchmesser $\frac{4}{11}$ Secunden nöthig sein, wobei die Flüssigkeit bei gleicher Geschwindigkeit auch viermal so weit in der Röhre vorwärts bewegt wäre. Gleicher Druckunterschied dagegen giebt in einer zweimal so weiten Röhre viermal so grosse stationäre Geschwindigkeit, also 16mal so grosse Vorwärtsbewegung, ehe das gleiche Erlöschen des 375
besprochenen Gliedes eintritt.

Der zweite Nullwerth der Bessel'schen Function ist:

$$\frac{\varrho}{k}\sqrt{n} = 5{,}520.$$

Der daraus fliessende Werth von n ist 5,777mal grösser als der erste, sodass das zweite Glied der Bessel'schen Reihe auch in diesem Verhältnisse schneller schwinden würde.

Der Vorgang in Röhren, durch welche Wasser dauernd fliesst, ist natürlich von dem eben berechneten Vorgange dadurch verschieden, dass die schnell fliessenden mittleren Schichten allmählich neben solche äussere Schichten zu liegen kommen, die dem Einflusse der Reibung in der Röhre seit längerer Zeit unterworfen sind. Wenn auch die Aufgabe, eine solche Strömung zu bestimmen, nicht direct zu lösen ist, so hilft die Methode der mechanischen Aehnlichkeit doch zu bestimmten Schlüssen. In den hydrostatischen Gleichungen für reibende Flüssigkeiten, deren erste ist:

$$-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - k^2 \Delta u,$$

setze man: statt	x, y, z	beziehlich	$mx, my, mz,$
„	t	„	$nt,$
„	u, v, w	„	qu, qv, qw
„	p	„	$rp,$

wo m, n, q, r Constanten sind. Sind u, v, w, p Lösungen der Gleichungen, so werden es auch die substituirten Grössen sein, wenn:

$$\frac{r}{m} = \frac{q}{n} = \frac{q^2}{m} = \frac{q}{m^2} \quad \text{i. e.} \quad n = m^2, \quad q = \frac{1}{m}, \quad r = \frac{1}{m^2}.$$

Wenn wir also alle linearen Dimensionen der Röhre um das $m$fache vergrössern, können wir dieselbe Art der Strömung nur erhalten, wenn wir die Geschwindigkeiten auf das $1/m$fache
373 verkleinern und die Druckunterschiede auf das $1/m^2$fache. Nur mit Beachtung dieser Regeln können wir hoffen, die Geltung des Poiseuille'schen Gesetzes auch auf weitere Röhren übertragen zu sehen. Dass bei grösseren Geschwindigkeiten in weiteren Röhren thatsächlich Abweichungen eintreten, habe ich bei Gelegenheit der von Hrn. G. v. Piotrowski ausgeführten Versuche schon nachgewiesen[1]; das Gleiche lässt sich an einigen der hierher gehörigen Versuche ebenfalls zeigen.

Uebrigens kann der Erfolg bei schneller Strömung in weiten Röhren, je nach der Form des Einganges der Röhre sehr verschieden sein. Endet das Rohr scharfkantig, ohne trompetenförmige Erweiterung, so wird das Wasser, wie meine[2] und Hrn. G. Kirchhoff's[3] Untersuchungen gezeigt haben, als engerer bewegter Strahl eindringen können, der von relativ ruhender Flüssigkeit umgeben ist. Die anfänglich scharfe Trennungsfläche zwischen beiden wird erst allmählich durch Reibung in eine rotirende Schicht von endlicher Dicke verwischt werden. Unter diesen Umständen wird im Anfange des Rohres, beziehlich, wenn es kurz ist, im ganzen Rohre die Bewegung an der Wand und der für die elektrischen Verhältnisse entscheidende Differentialquotient $\partial u/\partial N$ viel kleiner sein als im stationären Zustande der Wirbelung. Andererseits ist es auch möglich, namentlich bei trichterförmigem Eingange des Rohres, dass sich die Grenzfläche des bewegten Strahles der Röhrenwand anlegt. Dann wird im Anfange des Rohres die Grösse $\partial u/\partial N$ viel grösser sein müssen, als in der Fortsetzung eines sehr langen Rohres. Wir dürfen also vollständige Bestätigung der obigen Formeln nur in so engen Röhren oder bei so mässigen Drucken erwarten, dass dabei

1) Wien. Sitzungsber. Bd. XL. S. 654—655. 1860. (Oben S. 218.)

2) Monatsber. d. Berl. Akad. S. 215. 1868. (Oben Nr. IX.)

3) Crelle's Journal. Bd. LXX. S. 289. 1869. Vorlesungen über math. Physik (1). 22. Vorlesung.

noch das von J. L. M. Poiseuille aufgestellte Gesetz für den 377
Fluss des Wassers durch Capillarröhren genau zutrifft.

Messende Versuche über die Abhängigkeit der durch Wasserströmung in engen Glasröhren erzeugten Potentialdifferenz von den übrigen Bedingungen liegen vor von den Herren Haga[1]) und J. W. Clark[2]). Beide haben den elektrischen Theil der Messung mit dem Quadrantelektrometer ausgeführt. Der erstere arbeitete mit destillirtem Wasser und bestätigte die Proportionalität der Potentialdifferenz mit dem hydrostatischen Drucke; der zweite brauchte das Wasser der Heidelberger Wasserleitung und deren constanten Druck. Beide Arbeiten bestätigen die Unabhängigkeit der Potentialdifferenz von der Länge der Röhre. In Hrn. Haga's Versuchen versteckte sich die etwaige Abhängigkeit dieser Differenz von der Weite der Röhre unter den zufälligen Ungleichartigkeiten der inneren Oberfläche des Rohres. Bei den Versuchen von Hrn. Clark, der die sorgfältigen Reinigungsmethoden des Rohres, welche Hr. Quincke angegeben hat, unter dessen Leitung anwendete, sind die Potentialdifferenzen, welche nach unserer Gleichung (11b) constant sein sollten, für ganz enge Röhren (VI, II, III, VII) von kreisförmigem und elliptischem Querschnitte von 0,2 bis 0,7 mm mittlerem inneren Durchmesser, ja selbst noch bei einer Röhre (Ia) von 1,045 mm in der That nicht sehr erheblich verschieden, trotzdem die durchfliessenden Flüssigkeitsmengen von 1,31 bis 198,6 und 489,96 ccm für die Minute variiren. Bei einer Röhre (XX) von 0,8 mm Durchmesser und bei denjenigen Röhren, die weiter als 1,4 mm sind, nehmen die Potentialdifferenzen sehr ab.

Berechnet man für die kreisförmigen Röhren das Product:

$$p = \frac{Q \cdot l}{d^4},$$

wo Q die in der Minute durchgeflossene Wassermenge, l die
Länge, d der Durchmesser der Röhre ist, so sollte dies nach 378
Poiseuille's Gesetze constant sein. Die Werthe sind aber:

1) Wied. Ann. Bd. II. S. 326—335. 1877.

2) Ebendaselbst S. 335—346. 1877.

Nummer der Röhre	Durchmesser mm	Länge mm	Q cm³	$p\,10^{-4}$
II	0,2952	226,5	5,0	14913
VII	0,6918	112,3	198,6	9737
XX	0,7952	142,1	155,5	5526
Ia	1,045	203,9	489,96	8370
I	1,413	224,6	994,75	5605
X	7,67	335,0	24174,5	2337

Die Werthe von p lassen erkennen, dass Poiseuille's Gesetz höchstens bei der engsten Röhre noch zugetroffen sein kann. Für die elliptischen Röhren, in denen nach Poiseuille's Theorie zu setzen wäre:

$$p = \frac{Q \,.\, l \,.\, (a^2 + b^2)}{2 \,.\, a^3 \,.\, b^3},$$

stimmen die Werthe gar nicht, wohl weil der Querschnitt der engen Thermometerröhren nicht regelmässig elliptisch ist.

Die engsten vier Röhren hat Hr. Clark halbirt und fand in ihnen dann nahehin, doch nicht ganz dieselbe Grösse der Potentialdifferenz, welche nach Gleichung (11b) unverändert bleiben sollte. Aber es war auch nur bei den beiden engsten die ausfliessende Wassermenge genau verdoppelt, wie es Poiseuille's Gesetz fordert.

Bei den Versuchen von Hrn. Haga sind die Bedingungen einigermaassen günstiger für die Einhaltung des genannten Gesetzes. Die Durchmesser der Röhren liegen zwischen 0,3 und 0,7 mm. Die Röhren sind länger und bei geringerem Drucke gebraucht worden (86 bis 250 mm bei Haga statt 1285 mm bei Clark), sodass auch die weiteren Röhren wohl weniger Abweichung gezeigt haben werden, als in den Versuchen des letztgenannten Beobachters. Die Einflusslosigkeit der Länge und die Proportionalität der elektromotorischen
379 Kraft traten sehr gut heraus, aber eine weitere Controle durch die Ausflussmengen liegt nicht vor.

Die Grösse der elektromotorischen Kraft fand Hr. Haga bei 100 mm Quecksilberdruck für käufliches destillirtes Wasser zwischen 0,5 und 0,9 Daniell, für sorgfältiges frisch destillirtes bis zu 4,5 Daniell. Wenn wir hierauf die obige Formel an-

anwenden, bekommen wir als niedrigsten Werth der Potentialdifferenz der in das Wasser fallenden Doppelschicht 3,5798 Daniell's, etwas grösser als die früher gefundenen Werthe. Diese entspräche nämlich dem niedrigsten Leitungsvermögen des destillirten Wassers, wie es von Kohlrausch erhalten worden ist, $0{,}72 . 10^{-10}$ verglichen mit Quecksilber. Magnus' Werth 1,3 würde fast das Doppelte geben, Quincke's Werth nahe das Dreifache.

Wird nicht die Potentialdifferenz beobachtet, sondern die Intensität des in einem gut leitenden Drahte fliessenden Stromes mit Eliminirung der Polarisation der Platten, wie es Hr. Edlund[1]) gemacht hat, so ergiebt die von uns entwickelte Hypothese unter Annahme einer Strömung nach Poiseuille's Gesetze Folgerungen, die immerhin mit den Ergebnissen der genannten Versuche noch in vielen Beziehungen übereinstimmen, obgleich Poiseuille's Gesetz dabei jedenfalls nicht mehr eingehalten wurde. Letzteres zeigt sich namentlich darin, dass die mittleren Geschwindigkeiten bei den weiteren Röhren nahehin den Quadratwurzeln des Druckes proportional waren und kaum abhängig von der Weite der Röhren, sodass die Reibung offenbar nicht mehr den überwiegenden Einfluss auf die Strömung hatte.

Der Leitungswiderstand von Hrn. Edlund's Galvanometer war verschwindend klein gegen den Widerstand der Säulen von destillirtem Wasser auch in der weitesten Röhre, wo er 1824000 Ohmads, und selbst für Wasserleitungswasser noch 111600 Ohmads betrug. In diesem Falle können wir annehmen, dass alle den Elektroden zugeführte Elektricität auch durch diese abfliesst, und so gut wie keine rückwärts 380
durch das Rohr.

Ich entwickele zunächst die Wirkungen, welche bei einer Strömung nach Poiseuille's Gesetze hätten eintreten müssen.

Setzen wir in einem cylindrischen Rohre:

$$u = -A(x^2 + y^2 - r^2) = -A(\varrho^2 - r^2), \tag{14}$$

so ist die Ausflussmenge in der Zeiteinheit, wie oben gezeigt:

$$U = + \frac{A\pi r^4}{2}, \tag{14a}$$

1) Wied. Ann. Bd. I. S. 161. 1877.

also die mittlere Geschwindigkeit u der strömenden Flüssigkeit gegeben durch die Gleichung:

$$\mathfrak{u} \,.\, \pi r^2 = U = \frac{A\pi}{2} r^4,$$

also:

$$\mathfrak{u} = \frac{1}{2} A \,.\, r^2. \tag{14b}$$

Dagegen ist:

$$\frac{\partial u}{\partial N} = 2Ar = \frac{4\,\mathfrak{u}}{r}, \tag{14c}$$

also die durch jeden Querschnitt in der Zeiteinheit geführte Elektricitätsmenge:

$$J = 2\,\mathfrak{u}\,(\varphi_i - \varphi_a), \tag{14d}$$

d. h. der elektrische Strom ist unabhängig von den Dimensionen des Rohres, und der mittleren Geschwindigkeit der strömenden Flüssigkeit proportional. Die Unabhängigkeit von Länge und Weite des Rohres bei gleichbleibender mittlerer Geschwindigkeit findet Hr. Edlund bestätigt. Aber andererseits findet er die elektrische Strömung eher den Quadraten der Geschwindigkeit (oder den Drucken) proportional, als den Geschwindigkeiten in erster Potenz.

Ich will hier noch darauf aufmerksam machen, dass für die Versuche dieser Art die Unabhängigkeit der Wirkung vom Durchmesser des Rohres aus der Annahme einer Elektrisirung
381 der Flüssigkeit an der Gefässwand folgt und also nicht als Gegengrund gegen diese Annahme benutzt werden kann, wie es Hr. Edlund (l. c. p. 188) thut.

Wenn grosse Widerstände in den Galvanometerkreislauf eingeschaltet wurden, so musste ein Rückstrom beginnen. Ist w der Widerstand des Galvanometers und w_1 der der Wassersäule, i und i_1 die entsprechenden Stromstärken, so ist:

$$iw = i_1 w_1, \qquad i + i_1 = J,$$

wo J, wie vorher, die den Elektroden durch die Wasserbewegung zugeführte Elektricitätsmenge bezeichnet. Es ergiebt sich daraus:

$$i = \frac{J w_1}{w + w_1},$$

sodass die Intensität im Galvanometer, wie Hr. Edlund wiederum bestätigt, bei gleichbleibendem Zustande in der

Wasserröhre, also bei gleichbleibendem J und w_1, dem gesammten Widerstande des ganzen Kreises sich umgekehrt proportional verhält.

Bei Hrn. Edlund's Versuchen war die mittlere Geschwindigkeit 8,3 bis 11,5 m in der Secunde. Die 140 bis 280 mm langen Röhrenstücke zwischen den Zuleitungsdrähten durchschoss das Wasser also in $\frac{1}{80}$ bis $\frac{1}{30}$ Secunde. Die weiteren Röhren hatten 5 bis 6,4 mm Durchmesser. Unter diesen Umständen ist anzunehmen, dass nur die äussersten Schichten des Wassers von der Reibung erheblich verzögert werden konnten. Die gefundenen mittleren Geschwindigkeiten waren in der That noch etwas mehr als halb so gross, als die den Drucken ohne Reibung entsprechenden Ausflussgeschwindigkeiten (14,23 und 20,13 m) hätten sein sollen. Unter diesen Umständen musste der Differentialquotient $\partial u / \partial N$ einen viel höheren Werth behalten, als wenn durch längere Wirkung der Reibung auch die Mitte des Stromes verminderte Geschwindigkeit gehabt hätte, und bei den grösseren Geschwindigkeiten musste er verhältnissmässig noch grösser werden. So erklärt sich sowohl, dass die letzteren in den weiten Röhren eine elektrische Wirkung zeigen, die nahehin dem Quadrate der Geschwindigkeit 382
proportional ist, während sich in den engeren Proportionalität mit der ersten Potenz, welche theoretisch zu erwarten ist, wirklich findet.

Auch ergeben die beiden weiteren Röhren, wenn man nach der Formel (14d) rechnet, elektrische Momente im destillirten Wasser von 31 Daniell für den Druck von 1 Atmosphäre, 40,4 für 2; für Brunnenwasser 13,94 und 15,24 Daniell; Werthe, die viel höher sind als die vorher berechneten. Unter den angegebenen Umständen erklärt sich diese Abweichung der Zahlenwerthe daraus, dass die Wasserbewegung nicht, wie in der Ableitung der Gleichung (14d) vorausgesetzt wurde, dem Poiseuille'schen Gesetze entsprach.

Dass Gleitung an den Wänden nicht stattfinde, haben wir bei den Versuchen von Hrn. Quincke über Fortführung des Wassers durch den elektrischen Strom in engen Glasröhren nachweisen können. Dabei war die Strömungsgeschwindigkeit sehr gering, und die Substanz der Wand gut benetzbar. Ob

die Grenzschicht der Flüssigkeit aber auch bei grösseren Stromgeschwindigkeiten oder an schlecht benetzbaren Substanzen, wie Schwefel, Schellack u. s. w. fest liegen würde, scheint mir noch nicht verbürgt zu sein. Dass Wasser an Gold einen gewissen Grad von Gleitung zeigt, haben die oben citirten Versuche von Hrn. Piotrowski erkennen lassen. Sobald Gleitung eintritt, wird aber die Fortführung der elektrischen Grenzschicht viel schneller geschehen, als wenn die Flüssigkeit festhaftet. Dem entsprechend würden alle die besprochenen Wirkungen bei gleichbleibender Spannungsdifferenz an der Wandfläche viel stärker auftreten, als bei der von uns gemachten Voraussetzung, dass $l = 0$ sei. Auch könnte der Umstand, dass viele von den schwer benetzbaren Substanzen, wie namentlich Schwefel, mit der Zeit abnehmende Wirkungen zeigen, damit zusammenhängen, dass die Flüssigkeit anfangs schwächer, später fester haftet.

XLVI.

Ueber Bewegungsströme am polarisirten Platina.

Aus: Wiedemann's Annalen Bd. XI. S. 737—759. — Monatsberichte der Berliner Akademie vom 11. März 1880.

Meine unter dem 7. Februar 1879 der Akademie mitge- 737
theilten Betrachtungen über die capillar-elektrischen Phänomene veranlassten mich zu untersuchen, inwieweit ähnliche Vorgänge bei den Bewegungen einer elektrolytischen Flüssigkeit längs polarisirter Platinplatten stattfänden. Dass bei solchen Bewegungen starke Veränderungen der Stromstärke vorkommen, war seit alter Zeit bekannt. Ich habe der Akademie schon am 26. Nov. v. J. über diese Versuche berichtet.

Dabei mischten sich aber verschiedene, bisher noch nicht eingehend untersuchte Einflüsse ein, die, wie mir scheint, hauptsächlich durch Eintritt und Ausscheiden occludirten Wasserstoffs in das Platina bedingt sind, zum Theil auch durch die Widerstandsänderungen, welche die Fortführung der Jonen in der Flüssigkeit hervorbringt. Diese Vorgänge erforderten noch eine besondere Untersuchung, ehe die ziemlich verwickelten Wirkungen der Flüssigkeitsströmung unter einheitliche Gesichtspunkte gebracht werden konnten. Im Folgenden gebe ich eine Zusammenfassung der von mir gefundenen Ergebnisse.

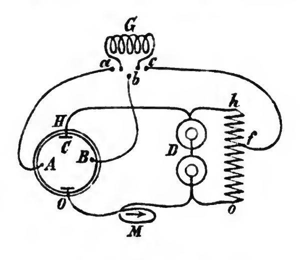
Methoden der Beobachtung.

Es handelte sich darum, die Wirkungen, welche die Polarisation jeder einzelnen Elektrode hervorbringt, unabhängig von der gleichzeitigen Polarisation der anderen Elektrode zu

untersuchen. Dabei mussten Verunreinigungen der elektro-
lytischen Flüssigkeit auch mit den minimalsten Mengen solcher
738 Metalle, die durch Wasserstoff reducirt oder durch Sauerstoff
als Superoxyde niedergeschlagen werden können, vermieden
werden.

Die folgenden Versuche sind angestellt an Elektroden von Platindraht (0,5 mm dick, 60 mm lang, in Glas eingeschmolzen, wo sie die Flüssigkeitsoberfläche schnitten), welche in Wasser, das mit Schwefelsäure ein wenig säuerlich gemacht war, tauchten. Die einem solchen Drahte entgegengestellte zweite Elektrode bestand in einzelnen Versuchsreihen, wo der Platindraht hauptsächlich als Kathode gebraucht wurde, aus Zinkamalgam, welches unter diesen Umständen keine Polarisation annimmt und bei den schwachen Strömen, die gebraucht wurden, nur sehr langsam Zink an die Flüssigkeit abgiebt. In vielen anderen Versuchsreihen wurde dagegen statt einer einfachen zweiten Elektrode ein Paar von Platinplatten gebraucht, zwischen denen dauernd durch zwei Daniell's ein schwacher, Wasser zersetzender Strom unterhalten wurde. Diese beiden letzteren waren ohne Thonzelle und so eingerichtet, dass man durch tägliches Zugiessen von etwas mit Schwefelsäure angesäuertem Wasser die Schicht entfernen konnte, in der die unten stehende schwere Kupfervitriollösung in das darüber stehende saure Wasser diffundirte. So war es möglich, die beiden Elemente viele Monate lang fortdauernd wirken zu lassen und in unverändertem Zustande zu erhalten. Die Batterie war ausser durch die beiden Platinplatten in der Flüssigkeit auch noch durch einen Widerstand von 2000 Quecksilbereinheiten (Siemens'sche Widerstandsscalen) geschlossen, und von einer beliebig veränderlichen Stelle dieser Nebenleitung eine metallische Leitung durch ein kleines, schnell bewegliches und schnell gedämpftes Thomson'sches Galvanometer zu der drahtförmigen Platinelektrode geführt. Da durch die fortdauernd, wenn auch unsichtbar vorgehende Wasserzersetzung jede Spur einer hinzukommenden anderen Polarisation der grossen Platinplatten bald ausgeglichen wird, und die Drahtelektrode ausserdem wegen ihrer kleinen Oberfläche eine erhebliche Polarisation annehmen kann, ehe diese auf der etwa 50mal grösseren Oberfläche der

wasserzersetzenden Platten merklich wird: so verhielt sich in der That diese Combination so, als wäre das Paar der Platinplatten eine unpolarisirbare Elektrode, welche frei von dem Nachtheile war, die Zusammensetzung der Flüssigkeit durch 739 Auflösung oder Niederschlag zu verändern. Nur muss vermieden werden, in der Umgebung der Wasserstoffplatte Wasserströme zu erregen. Die vergleichbaren Versuche, welche mit dieser Combination ausgeführt wurden, gaben ganz die gleichen Resultate, wie die mit dem als Anode unpolarisirbaren Zinkamalgam. Mittels der genannten Nebenschliessung konnte man jeden beliebigen Werth elektromotorischer Kraft zwischen jenen beiden Platinplatten und dem Elektrodendrahte wirken lassen. Gewöhnlich wurde noch ein zweiter gleicher Elektrodendraht *B* angewendet und fortdauernd ähnlichen elektromotorischen Kräften wie *A* ausgesetzt, theils um beide Elektroden auch gegeneinander gesetzt durch das Galvanometer zu verbinden und die Ströme bei Erschütterung der einen oder andern im stromlosen Zustande zu beobachten, theils um die eine von ihnen etwas geänderten Bedingungen auszusetzen, während die andere in unverändertem Zustande blieb, und dadurch den Einfluss solcher Veränderungen unabhängig von sonstigen Störungen festzustellen.



Das Schema der Leitungen war also das beistehende: *C* ist ein grosses, rundes Glasgefäss mit dem sauren Wasser gefüllt, *H* und *O* sind die beiden Wasser zersetzenden Platinplatten, *A* und *B* die beiden Drähte, *D* die beiden Daniell's, *oh* die Scala von 2000 Widerstandseinheiten, *Aa, Bb, fc* die zum Galvanometer *G* führenden Drähte. Je nach der gewählten Verbindung konnte gleichzeitig *A* und *B* über *c* und *f* mit der Batterie verbunden werden, wobei das Galvanometer entweder in *Aac* oder in *Bbc* lag, oder die Leitung war *AaGbB*, wobei die etwa bestehenden Differenzen des Zustandes von *A* und *B* sich geltend machen. Zur Controle der Stromstärke des Wasser zersetzen-

den Stromes war noch ein Multiplicator *M* in den Zweig *OD*
eingeschaltet. Der Widerstand der beiden Daniell's mit den
Verbindungsdrähten zur Scala *oh* betrug im Mittel 72 *S*. Der
740 Strom durch die Flüssigkeit war theils wegen der Polarisation
der Platten *H* und *O*, theils wegen des grossen Widerstandes
der Flüssigkeit so geschwächt, dass die Unterbrechung des-
selben die Stromstärke im Zweige *oh* kaum beeinflusste.
Nimmt man den Mittelpunkt der Scala als Nullpunkt für die
in den Zweigen *Af* und *Bf* wirkenden elektromotorischen
Kräfte $\mathfrak{E}$ und charakterisirt diese durch die Angabe der Wider-
standseinheiten *S*, die entweder nach der positiven Seite (Zink-
pol) oder nach der negativen (Kupferpol) zwischen *f* und der
Mitte liegen, so ist die Grösse von $\mathfrak{E}$ auf Daniell's zurück-
zuführen, wenn man mit 1036 dividirt. Die hier gebrauchten
Daniell's enthalten Kupfer in concentrirter Kupfervitriollösung
und amalgamirtes Zink in schwach angesäuertem Wasser.

In den mit amalgamirtem Zink als zweiter Elektrode construirten Ketten wurde die Platte *O* weggenommen und statt *H* das flüssige Zinkamalgam in einem Porcellanschälchen eingesetzt. Ein in das Amalgam eintauchender, von Glas umgebener Platindraht leitete hinaus nach *D* hin. Der dem früheren Nullpunkt sich ähnlich verhaltende Punkt der Scala lag dann aber um 450 *S* mehr nach der negativen Seite der Scala hin.

Die Phänomene der eintretenden und verschwindenden Wasserstoff-Occlusion.

Wenn man *f* mit *o* verbindet, also $\mathfrak{E} = -1000$ macht dann diese Verbindung 4 bis 8 Tage wirken lässt, um allen occludirten Wasserstoff aus den Drähten *A* und *B* durch Sauerstoffentwickelung an ihrer Oberfläche zu entfernen, und abwartet, bis der anfangs stärkere Strom durch die Drähte nicht weiter sinkt: so entspricht der Draht beim Uebergange zu Werthen von $\mathfrak{E}$, die zwischen -900 und 0 liegen, ziemlich gut der von Sir W. Thomson ausgegangenen Auffassung, wonach bei einer zur Wasserzersetzung unzureichenden elektromotorischen Kraft die Oberfläche einer Elektrode sich wie ein

Condensator von äusserst geringer Dicke des isolirenden Mediums verhält. Das heisst: bei jeder Verringerung der elektromotorischen Kraft zwischen diesen Grenzen erfolgt eine kurz dauernde negative Schwankung der Stromstärke, bei jeder Verstärkung eine ebenso kurz dauernde positive Schwankung, 741
die schon nach 2 bis 3 Minuten fast vollständig wieder verschwunden ist. Allerdings bleibt ein sehr geringer negativer (anodischer) Strom dauernd bestehen, der wohl als ein von den im Wasser aufgelösten Gasen (unter denen auch Wasserstoff von der Platte *H* ist) herrührender Convectionsstrom zu deuten ist.

Der Vorgang ändert sich, wenn man die Grenze $\mathfrak{E} = 0$ überschreitet und zu positiven Werthen übergeht. Es treten positive Ströme auf, die schon bei $\mathfrak{E} = 200$ eine viel bedeutendere Intensität erlangen als alle bisher erwähnten Ströme und nicht mehr schnell verschwinden, sondern Stunden lang anhalten unter langsamer Abnahme ihrer Stärke. Während also vorher von $\mathfrak{E} = -800$ bis $\mathfrak{E} = +100$ die Grenzen -10 und $+10$ an der Scala des Galvanometers bei den 100 *S* betragenden Verschiebungen in der Lage des Abzweigungspunktes *f* an der Scala *oh* rückwärts und vorwärts kaum für einige Minuten überschritten waren, tritt nun eine Ablenkung von $+120$ ein, die nach 4 Stunden erst auf $+30$ gesunken ist. Nach 24 Stunden ist aber auch dieser Strom wieder auf etwa $+10$ zurückgegangen und sinkt langsam noch weiter. Da anderthalb Daniell's zur schwächsten dauernden Wasserzersetzung nöthig sind, so kann eine Ausscheidung freien Wasserstoffes an dem Platindraht bei den hier angewendeten elektromotorischen Kräften noch nicht stattfinden, und ich schliesse deshalb, dass die starke Steigerung des Stromes von der Aufnahme und Occlusion des Wasserstoffes in das Platina herrührt. Wenn H von O sich scheidend in enge Verbindung mit dem stark negativen *Pt* tritt, wird für diese Scheidung keine so grosse Arbeit nöthig sein, als um unverbundenes H von O zu scheiden. In der That ist das Quantum Wasserstoff, welches hierbei dem Platina zugeführt wird, nicht unbeträchtlich. Ein Strom, der an dem von mir gebrauchten Galvanometer 100^0 Ablenkung giebt, liefert in der Stunde 16,4 cmm Wasserstoff. Graham's

Angaben über die Menge H, welche vom Platina aufgenommen werden können, sind wohl zu niedrig ausgefallen, da man, wie ich gefunden, Tage lang warten muss, ehe die Sättigung vollständig ist. Die von ihm angegebene Grösse der Occlusion
742 würde in der That ein Strom von 72° meines Galvanometers in einer Stunde liefern können.

Nachdem der erste starke Strom der beginnenden Wasserstoffbeladung des Platina nachgelassen hat, tritt eine eigenthümliche, von dem bisher beobachteten Verhalten galvanisch polarisirter Metalle abweichende Erscheinung ein, wenn man vorübergehend grössere elektromotorische Kräfte einwirken lässt. Bei der Rückkehr auf die früher gebrauchte Kraft, $\mathfrak{E} = +200$, tritt nämlich nun nicht eine Schwächung des früheren Stromes, sondern nach einem schnell vorübergehenden negativen Ausschlage im Gegentheil eine sehr erhebliche Steigerung bis zu 70 oder 90 Scalentheilen ein, die aber schneller verschwindet als der frühere Strom von 120°. Neue Verstärkung lässt sich als Nachwirkung neuer vorübergehender Einführung grösserer elektromotorischer Kräfte erzielen, doch werden die Nachwirkungen immer kleiner und weniger dauernd, je öfter man den Versuch wiederholt. Es genügt schon eine Steigerung des Werthes $\mathfrak{E}$ um 200 unserer Widerstandsscala auf 2 Minuten, um die Erscheinung sichtbar zu machen; stärkere und längere Steigerungen machen sie stärker. Sie zeigt sich in ähnlicher Weise, nur weniger ausgesprochen, wenn man, ohne sich zu lange bei $\mathfrak{E} = +200$ aufzuhalten, zu stärkeren Kräften bis $\mathfrak{E} = 500$ übergeht, wo die dauernde Wasserzersetzung beginnt; in schwachem Maasse und zögernd tritt sie auch noch bis $\mathfrak{E} = 800$ ein, nachdem man auf kurze Zeit $\mathfrak{E} = 900$ oder $\mathfrak{E} = 1000$ geschlossen hatte. Sie fällt aber fort, wenn man starke kathodische Kräfte so lange hat wirken lassen, bis der Strom sich nicht weiter verändert, was erst eintreten kann, wenn das Platina mit Wasserstoff gesättigt ist. Ich habe in einem Falle die Kraft $\mathfrak{E} = 1000$ vierzehn Tage dauernd auf den Draht wirken lassen, um dieses Ziel möglichst vollständig zu erreichen. Der Strom fiel allmählig auf weniger als die Hälfte der Stärke, die er in den ersten Stunden hatte. Als ich dann in kleinen Stufen von je 100 S

in den elektromotorischen Kräften abwärts oder dazwischen gelegentlich auch wieder aufwärts ging, traten bei jedem Schritt abwärts vorübergehende negative, bei jedem Schritt aufwärts vorübergehende positive Ausschläge von mässiger Stärke und etwa 2 Minuten Dauer auf, nach denen der Strom bald in 743
eine für jeden Werth von $\mathfrak{E}$ constante Intensität überging. Nur als ich die Grenze der Wasserzersetzung abwärts schreitend erreichte, bei $\mathfrak{E} = 500$, trat ein starker negativer Ausschlag bis über -100^0 auf, der 5 Minuten negativ blieb und erst nach etwa 10 Minuten die Gleichgewichtslage von $+25$ erreichte, auf der er blieb. Von da ab abwärts bis $\mathfrak{E} = -100$ stellte sich der Magnet dauernd ganz in die Nähe des Nullpunktes, schwachen Convectionsströmen durch aufgelösten Sauerstoff entsprechend.

Beim weiteren Rückschreiten zu negativen elektromotorischen Kräften treten nun ziemlich anhaltende Ströme auf, welche viel höhere Intensität haben, als die im Anfang erwähnten, die bei denselben Kräften entstehen, wenn das Platin lange mit Sauerstoff beladen gewesen ist. Die Ursache dieser Ströme ist zweifellos in dem Umstande zu suchen, dass occludirtes H allmählig zur Oberfläche des Platins dringt und sich mit dem von der elektromotorischen Kraft herangedrängten O des Elektrolyten vereinigt. Damit scheint mir auch die charakteristische Weise zusammenzuhängen, wie unter diesen Umständen sich der Strom bei Einschaltung eines grossen Widerstandes verhält. Wenn nämlich die Menge der möglichen elektrolytischen Zersetzung wesentlich abhängt von einem langsam vor sich gehenden Diffusionsprocess, dessen Schnelligkeit von der Stromstärke unabhängig ist, so wird auch die Stromstärke, ganz unabhängig von dem eingeschalteten Widerstande, nur so weit steigen können, als die Menge der elektrolytisch fortzuschaffenden Producte erlaubt. Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Stromstärke verschwindend klein ist, verglichen mit der, welche die Kraft $\mathfrak{E}$ im gleichen Widerstande ohne Polarisation erregen würde.

In der That zeigte sich bei den zuletzt beschriebenen Strömen (z. B. $\mathfrak{E} = -500$, $J = -10$), dass bei plötzlicher Einschaltung eines Widerstandes von 10000 S in AGf der

Magnet nur einen momentanen Ruck nach abwärts macht und dann wieder auf derselben Stelle steht wie vorher; als wenn der Widerstand der Stromleitung unendlich gross gegen den eingeschalteten Widerstand wäre. Der kurze Ruck zeigt nur die Aenderung der condensatorischen Ladung der Oberfläche
744 an, da die der Stromstärke entsprechende Potentialdifferenz in dem Zweige Af durch die Erhöhung seines Widerstandes bei gleichbleibender Stromstärke wachsen muss.

Es ist bekannt, dass Widerstandsbestimmungen an Ketten, welche polarisirte Platten enthalten, gewöhnlich daran scheitern, dass auch die kürzeste Verstärkung oder Schwächung des Stromes den Zustand der Platten verändert, sodass man bei Rückkehr zu den früheren Bedingungen nicht mehr dieselbe Stromstärke wie vorher findet.

Dagegen kann man ziemlich gute Widerstandsbestimmungen an dem mit O beladenen Draht, wie an einem constanten Batterieelement machen, wenn man Wasser zersetzende Stromkräfte ($\mathfrak{E} = -1000$) braucht und abwartet, bis alle Wasserstoffreste im Drahte verschwunden sind. Ich erhielt für den Widerstand des durch $AaGcf$ gehenden Stromes dann Zahlen, die bis zu 1400 S sanken.

Andererseits wird auch bei möglichst vollständiger Wasserstoffbeladung und Wasser zersetzenden Stromkräften der Zustand des Drahtes constant genug, dass man Zeit hat, mit dem sehr beweglichen Thomson'schen Galvanometer die Ablesung bei Einschaltung eines Widerstandes zu machen, ohne nachher bei Ausschaltung desselben den früheren Zustand verändert zu finden. Dabei ergaben sich aber für denselben mit H beladenen Platindraht Widerstände, die bis zu 10000 S stiegen. Dieser Unterschied wird darauf zurückzuführen sein, dass bei anodischen Strömen sich Säure um den Draht sammelt und das Leitungsvermögen der Flüssigkeit verbessert, bei kathodischen Strömen dagegen die Flüssigkeit um den Draht säurefrei und schlecht leitend werden muss. Da der Hauptwiderstand der Flüssigkeit in der nächsten Nachbarschaft des dünnen Drahtes liegt, so muss die Beschaffenheit dieser Flüssigkeitsschichten einen sehr erheblichen Einfluss auf den gesammten Widerstand haben.

Einfluss der Strömung des Wassers längs polarisirter Platinflächen.

Die hierher gehörigen Versuche sind meist an den dünnen Platindrähten angestellt worden, die oben als Elektroden beschrieben wurden, indem ich sie durch leichtes Klopfen mit 745 einem Glasröhrchen erschütterte. Die Erfolge sind regelmässiger, als man vielleicht nach der dabei nicht zu vermeidenden Unregelmässigkeit der mechanischen Bewegung erwarten sollte. Die elektrische Wirkung nähert sich nämlich schnell einer Grenze, über die sie durch stärkere Bewegung nicht mehr hinausgetrieben wird. Um länger dauernde Wirkungen zu erzielen, habe ich die Elektroden auch in einzelnen Versuchsreihen an einem elektromagnetisch bewegten Neef'schen Hammer befestigt, dessen Bewegungen sie mitmachten. In anderen Versuchen habe ich die Flüssigkeit aus engen Röhren in das weitere Gefäss strömen lassen und die Elektrode in die Mündung des Rohres eingelegt. Die Ergebnisse wurden dadurch nicht wesentlich geändert.

Wir haben zu unterscheiden den primären Strom, welcher vorhanden ist, ehe die Elektroden erschüttert werden, und den Erschütterungsstrom, welcher hinzukommt, wenn die Elektroden in Bewegung gesetzt werden.

Die Richtung dieser Ströme bezeichne ich immer in Beziehung auf den erschütterten Draht. Je nachdem dieser Kathode oder Anode des Erschütterungsstromes ist, nenne ich letzteren kathodisch oder anodisch.

Die von mir über die Erschütterungsströme gewonnenen Ergebnisse lassen sich nunmehr in folgende Regeln zusammenfassen:

1) Beim Bestehen eines starken kathodischen primären Stromes sind die Erschütterungsströme immer von derselben Richtung und verstärken den schon bestehenden Strom.

2) Bei bestehenden anodischen oder schwach kathodischen Strömen sind die Erschütterungsströme anodisch mit einer sub 4) erwähnten Ausnahme.

3) Wasserstoffbeladung der oberflächlichen Schichten des Platina begünstigt in der Regel das Auf-

treten anodischer Erschütterungsströme. Diese sind am stärksten, wenn man stark mit Wasserstoff beladenes Platina unter Einwirkung anodischer elektromotorischer Kräfte bringt. Die Grenze zwischen Stromstärken, welche anodische und kathodische Erschütterungsströme geben, liegt für wasserstoffarmes
746 Platina bei schwächeren kathodischen Strömen, als für wasserstoffreiches.

4) Wenn man den primären Strom aufhören macht, was am zweckmässigsten dadurch erreicht wird, dass man zwei gleiche und gleichartig behandelte Elektroden durch den Multiplicator verbindet, so erhält man der Regel nach anodische Erschütterungsströme, die um so stärker ausfallen, je stärker die Elektroden mit Wasserstoff beladen sind. Wasserstoffarme Elektroden geben nur bei starker Sauerstoffpolarisation deutliche anodische Erschütterungsströme, wasserstoffreiche dagegen sehr starke, selbst wenn sie unmittelbar vorher, während der Strom noch dauerte, starke kathodische gaben. Doch beobachtet man bei den stärksten Graden der Wasserstoffbeladung auch das Gegentheil: dass nämlich zuerst unmittelbar nach dem Aufhören des primären Stromes die ersten Erschütterungen noch kathodische Ströme geben, denen dann bei folgenden Erschütterungen anodische folgen; und dass endlich nach sehr lange fortgesetzter starker Wasserstoffbeladung dauernd nur kathodische Erschütterungsströme zu Stande kommen. Die erst erwähnten vorübergehenden kathodischen Ströme werden als herrührend von starker Wasserstoffbeladung der oberflächlichen Schichten des Platina aufgefasst werden können, welche, wenn die tieferen Lagen noch nicht mit Wasserstoff gesättigt sind, schnell abnimmt durch Wanderung des Wasserstoffes in grössere Tiefe.

Ein durch Erschütterung hervorgerufener Strom giebt selbst nach längerer Dauer keinen Rückschlag in die entgegengesetzte Ablenkung, wie es die durch die Aenderung des Widerstandes oder der elektromotorischen Kraft bei polarisirten Platten hervorgerufenen Aenderungen der Stromintensität in der Regel thun. Für die Erklärung der Ursachen dieser Ströme ergiebt sich daraus die wichtige Folgerung, dass sie nicht zu Stande kommen durch beschleunigtes Eintreten irgend einer der Ver-

änderungen, die der polarisirende Strom auch in der Ruhe hervorgebracht hätte. Nur eine Ausnahme von der genannten Regel habe ich gefunden. Nämlich an der oben besprochenen Grenze zwischen anodischen und kathodischen Erschütterungsströmen bei mässigen kathodischen Stromstärken sieht man, dass während des Schüttelns selbst eine kleine anodische Ab- 747
weichung, nachher eine kleine kathodische eintritt.

Die mässig stark mit Wasserstoff beladenen Platten zeigen also ein verschiedenes Verhalten, je nachdem ein primärer Strom in sie eintritt oder nicht. Dieser Unterschied lässt sich dadurch erklären, dass ein starker kathodischer Strom die Säure aus der Nähe der Elektrode wegführt und schlecht leitende Schichten bildet. Werden diese weggespült, so muss erhöhte Stromintensität eintreten. Diese bildet den kathodischen Erschütterungsstrom.

Bei den anodischen Strömen finden wir nichts Entsprechendes; in der That wird die Vertauschung eines kleinen Theils des Widerstandes (nämlich der stärker sauren Flüssigkeit um die Elektrode) mit einem etwas grösseren Widerstande nicht so viel wirken als der entgegengesetzte Fall.

Sehen wir von dieser Complication ab, so finden wir, dass wenn die Erschütterung den Widerstand nicht verändert, wasserstoffreichste Drähte kathodische Erschütterungsströme geben, mässig mit Wasserstoff beladene stark anodische, wasserstoffarme schwach anodische.

Bei einer gewissen Stärke der kathodischen Ströme kämpft gleichsam derjenige Einfluss, welcher in der Ruhe anodischen Strom erregt, gegen die Verminderung des Widerstandes, welche kathodischen Strom giebt. Die letztere Aenderung wird langsamer ausgeglichen, die erstere schneller, was sich durch den Verlauf dieser Ströme in der beschriebenen Weise zu erkennen giebt.

Theoretische Betrachtungen.

Um die hier beschriebene verwickelte Reihe von Erscheinungen unter zusammenfassende Gesichtspunkte zu ordnen, erlaube ich mir eine Hypothese über die Vorgänge bei der Elektrolyse vorzutragen, die sich an meine früher schon auf-

gestellte Hypothese[1]) über die Natur der galvanischen Kraft anschliesst. Ich habe dieselbe seit 1871 in meinen Vorlesungen über Physik wenigstens nach ihren wesentlichen Grundzügen
743 vorgetragen, bisher aber keine Veranlassung gehabt, in meinen wissenschaftlichen Abhandlungen weiter darauf einzugehen, da ich es für ein wesentliches Erforderniss der wissenschaftlichen Methodik halte, dass man die theoretischen Voraussetzungen nicht weiter specialisirt, als es der vorliegende Gegenstand fordert. In meinen bisherigen Arbeiten über galvanische Polarisation genügte aber das Gesetz von der Constanz der Energie. Dieses Verfahren hat Missverständnisse hervorgerufen, und theils deshalb, theils des vorliegenden Gegenstandes wegen, der eine weitere Specialisirung der theoretischen Hypothesen verlangt, gehe ich auf diese letztere ein.

Ich gehe aus von der l. c. gemachten Voraussetzung über die Ursache der Elektricitätsvertheilung in metallischen Leitern, wonach jeder Substanz, welche metallisch leiten kann, ein verschiedener Grad von Anziehung gegen die beiden Elektricitäten zukommt. Ich halte dabei die Voraussetzung fest, dass wo $+E$ austritt, ein gleich grosses Quantum $-E$ eintritt, und umgekehrt. Dann ist nur nöthig von der auf $+E$ wirkenden Kraft zu sprechen. Ist die Arbeit, welche durch diese Anziehungskräfte geleistet wird, beim Uebergange der elektrostatischen Einheit positiver Elektricität aus irgend einem als Norm dienenden Metall vom Potential Null in das Innere des Metalls M gleich G_m zu setzen und die Potentialfunktion im letzteren gleich φ_m, so ist zwischen zwei Metallen, die wir durch die Indices z und c unterscheiden wollen, elektrisches Gleichgewicht, wenn

$$\varphi_z - G_z = \varphi_c - G_c.$$

Die Constanten G bestimmen also die Ordnung und Entfernung der Metalle in der Volta'schen Spannungsreihe. Sie wachsen, wenn man von den edlen zu den leicht oxydirbaren Metallen fortgeht, und da wir für dieselben einen Namen brauchen, schlage ich vor, sie als die **Galvanischen Werthe** der Metalle zu bezeichnen. Den Nullpunkt ihrer Scala können wir

1) Helmholtz, Die Erhaltung der Kraft. S. 43 ff. Berlin 1847.

beliebig wählen. Wir wollen vorläufig diesen dem Metall im Elektrometer beilegen, welches die Elektricität der zu untersuchenden Körper aufzunehmen hat und anziehend oder abstossend auf die Theile von unveränderlicher Ladung wirkt (Metall der Quadranten im Quadrantenelektrometer). Dann sind die Grössen $\varphi_z - G_z$ und $\varphi_c - G_c$ gleichzeitig die Potential- 749
werthe, welche die beiden Metalle durch metallische Leitung den betreffenden Theilen des Elektrometers mittheilen.

Um Faraday's elektrolytisches Gesetz zu erklären, nehme ich an, dass in jeder elektrolytisch zerlegbaren Verbindung jeder Valenzwerth des Kation mit einem Aequivalent positiver Elektricität, und jeder Valenzwerth des Anion mit einem Aequivalent negativer Elektricität verbunden sei. Jede Bewegung von Elektricität in der Flüssigkeit geschieht nur in der Weise, dass die Elektricitäten haftend an ihren Jonen sich fortbewegen. Da die schwächsten vertheilenden elektrischen Anziehungskräfte ebenso vollständiges Gleichgewicht der Elektricität im Innern von elektrolytischen Flüssigkeiten erzeugen, wie in metallischen Leitern: so ist anzunehmen, dass der freien Bewegung der positiv und negativ geladenen Jonen keine anderen (chemischen) Kräfte entgegenstehen, als allein ihre elektrischen Anziehungs- und Abstossungskräfte. Mit $+E$ beladene H-Atome, die sich an einer Seite der Flüssigkeit gesammelt haben, der ein negativ geladener elektrischer Leiter genähert ist, sind also nicht als „freier Wasserstoff" aufzufassen, sondern noch als chemisch gebundener. In der That werden sie, sowie der negative Leiter entfernt wird, sich ohne in Betracht kommende Arbeitsleistung wieder mit den Sauerstoffatomen, die die Träger der entsprechenden Aequivalente negativer Elektricität sind, vereinigen.

Damit eine Anzahl positiver Jonen elektrisch neutral und chemisch unverbunden ausscheide, muss die Hälfte davon ihre Aequivalente $+E$ abgeben und dafür die entsprechenden $-E$ aufnehmen. Dieser Vorgang ist mit grossem Arbeitsaufwand verbunden und constituirt die definitive Trennung der vorher bestandenen chemischen Verbindung.

In der That ist bekanntlich der durch die Verbindungswärme gemessene Betrag dieser Arbeit wenigstens bei stark

verdünnten Lösungen, in denen keine Nebenprocesse in Betracht kommen, für jedes basische Atom charakteristisch und unabhängig von der Art der gleichzeitig in der Flüssigkeit vorhandenen sauren Molekeln. Das Gleiche gilt für die letzteren unabhängig von den ersteren. Säurehydrate sind dabei als
750 Wasserstoffsalze zu behandeln. In reinem Wasser und in Lösungen von Alkalihydraten scheint $(+ H) (- O -)$ das Anion zu sein, welches neutralisirt, etwa in der Form $(+ H) (- O -) (+ O -) (+ H)$, als Wasserstoffsuperoxyd ausscheidet oder basische Superoxyde bildet.

Ist die elektrolytische Flüssigkeit in Berührung mit zwei Elektroden von ungleichem elektrischen Potential, so tritt zunächst Ansammlung von Atomen des positiven Jon an der negativen Platte, des negativen an der positiven ein, bis im Innern der Flüssigkeit die Potentialfunction einen constanten Werth erreicht hat. Wenn sich positiv beladene Atome längs der äusseren Seite der Elektrodenfläche sammeln, werden an deren innere Seite die entsprechenden Quanta negativer Elektricität herangezogen, und es wird sich eine elektrische Doppelschicht ausbilden müssen, deren Moment so lange zunimmt, bis die an den beiden Elektroden gebildeten Doppelschichten ausreichen, den zwischen ihnen durch die elektromotorische Kraft der Kette gesetzten Sprung des Potentialwerthes hervorzubringen. Ich habe schon in meiner Mittheilung vom 27. Februar 1879[1]) im Anschluss an die von Sir W. Thomson dafür gegebenen Beweise hervorgehoben, dass hierbei Molecularkräfte von sehr kleinem, aber endlichem Wirkungsbereich eingreifen müssen, weil sonst die Entfernung der beiden Schichten voneinander unendlich klein und die der Ansammlung entsprechende Arbeit der elektrischen Fernkräfte unendlich gross werden würde. Im vorliegenden Falle ist mindestens die eine Schicht an ponderable Atome gekettet, und die Doppelschicht wird deshalb endliches Moment behalten und einen Condensator von ausserordentlich grosser Capacität darstellen. So lange keinerlei chemische Processe die Menge der angesammelten Elektricitäten verändern, ist in einem solchen Falle das

1) Helmholtz, Wied. Ann. Bd. 7. S. 338. 1879. (Voriger Aufsatz.)

Potential der Flüssigkeit zwischen den beiden Elektroden dadurch bestimmt, dass die gleichen Mengen von $+E$ und $-E$, gebunden an ihre Jonen, sich an den beiden Elektroden angesammelt haben und dadurch die relative Dicke der beiden entsprechenden Hälften der Doppelschichten bestimmt ist. Bezeichnen wir mit E die Menge der angesammelten Elektri- 751
cität, mit F_1 und F_2 die Oberflächen der beiden Elektroden, mit C_1 und C_2 die Capacitäten der Flächeneinheiten (welche möglichereise Functionen der Dicke der Schicht sind), mit φ_1, φ_2 und φ_0 die Potentialwerthe der beiden Metallplatten und der Flüssigkeit, so wird Gleichgewicht sein, wenn:

$$E = F_1 . C_1 . (\varphi_1 - \varphi_0), \qquad E = F_2 . C_2 . (\varphi_0 - \varphi_2) \qquad (1)$$

$$\varphi_1 - G_1 - \varphi_2 + G_2 = A, \qquad (1a)$$

wo mit A die elektromotorische Kraft der Kette bezeichnet ist. Daraus ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} E\left\{\frac{1}{F_1 C_1} + \frac{1}{F_2 C_2}\right\} &= A + G_1 - G_2 \\ \varphi_1 - \varphi_0 &= (A + G_1 - G_2)\frac{F_2 C_2}{F_2 C_2 + F_1 C_1} \\ \varphi_0 - \varphi_2 &= (A + G_1 - G_2)\frac{F_1 C_1}{F_1 C_1 + F_2 C_2} \end{aligned}\right\} \qquad (1b)$$

Durch diese Bedingungen ist der Gleichgewichtszustand vollständig bestimmt. Um denselben herzustellen, müssen die Quanta $+E$ der Kathode und $-E$ der Anode zufliessen. Da die elektrischen Doppelschichten einander sehr nahe und infolge dessen die Capacitäten C sehr gross sind, so erscheint diese Elektrisitätsbewegung als ein nicht ganz unbedeutender, aber schnell vergänglicher Strom. Die beschriebene Ladung der Platten können wir als die condensatorische bezeichnen. Können die beiden Platten mit Beseitigung der zwischen ihnen herrschenden elektromotorischen Kraft leitend verbunden werden, so tritt ein ebenso grosser Rückstrom ein. Uebrigens sind sie stromlos, wenn ihre Ladungen ausgebildet sind und an ihnen keine Processe stattfinden, welche einen Theil der Elektricität der Grenzschichten beseitigen können. Zu solchen Processen gehören:

1) Elektrolytische Abscheidung der Jonen aus der Flüssigkeit, wobei jene elektrisch neutral werden, indem die Hälfte derselben ihr Aequivalent E abgiebt und dafür das entgegengesetzte aufnimmt. Dabei kommt theils elektrische, theils moleculare Arbeit in Betracht. Die erstere besteht an der Kathode darin, dass eine Menge $-E$ aus dem Potential der Kathode in das der Flüssigkeit übertragen wird, die moleculare haupt-
752 sächlich darin, dass die an das Kation gebundenen Aequivalente $+E$ losgelöst und dafür Aequivalente $-E$ eingeführt werden, woneben ausserdem die schwächeren durch die Auflösung und die Aenderung des Aggregatzustandes gesetzten Arbeitsleistungen in Betracht kommen. Bezeichnen wir diese gesammte moleculare Arbeit für die Einheit $+E$ mit K_1, so ist die zu leistende Arbeit für die Einheit an die Kathode übergehender $+E$:

$$\varphi_1 - G_1 + K_1 - \varphi_{0,1}.$$

Mit $\varphi_{0,1}$ ist der Werth des Potentials in der Flüssigkeit bezeichnet dicht an der Aussenseite der elektrischen Doppelschicht.

So lange diese Grösse positiv ist, wird der Uebergang nicht erfolgen, wohl aber, wenn sie negativ zu werden anfängt.

Der grösste Werth der Potentialdifferenz, der an einer Kathodenfläche eintreten kann, ist also:

$$\varphi_1 - \varphi_{0,1} = G_1 - K_1 . \tag{2}$$

Sobald diese Grenze überschritten wird, fängt die elektrolytische Action an.

Aehnliche Betrachtungen gelten für die Anode.

Die Art des Vorganges, dessen Arbeit durch die Grösse K gemessen wird, kann übrigens verschieden sein, je nachdem das betreffende Kation sich einfach ausscheidet, entweder wie ein galvanoplastisch niedergeschlagenes Metall, oder in der Flüssigkeit gelöst bleibt, aber nicht mehr als positiver Bestandtheil eines Salzes, sondern als elektrisch neutrale freie Verbindung. So namentlich der Wasserstoff aus den gewässerten Säuren, der bei langsamer Entwickelung sich in der Flüssigkeit löst und durch Diffusion verbreitet, bei beginnender Uebersättigung der Flüssigkeit dagegen sich als Gas entwickelt. In anderen Fällen ist es nicht das Kation direct, welches neutralisirt und ausgeschieden wird, sondern dieses kann auch ein

anderes, seine $+E$ leichter abgebendes Atom aus einer dort bestehenden Verbindung drängen, z. B. Kalium den Wasserstoff des Wassers.

Von den hierbei stattfindenden Umsetzungen kommen jedenfalls diejenigen, welche die den Strom hemmende Kraft der Zelle vergrössern oder die treibende verkleinern, wie die Bildung des Wasserstoffsuperoxyds als nothwendige Glieder des elektrolytischen Processes in Betracht. Unter den die 753
Wärmeentwickelung vermehrenden Umsetzungen dagegen könnten auch eigentlich secundäre Zersetzungen vorkommen, die ohne Zuthun der elektrischen Kräfte und ohne Rückwirkung auf diese ablaufen, wie z. B. Zerfall des ausgeschiedenen Wasserstoffsuperoxyds in Sauerstoff und Wasser, oder des Stickstoffperoxyds N_2O_4 aus der Salpetersäure in salpetrige und Salpetersäure, und der ersteren wieder in Salpetersäure und Stickoxyd. Welche unter diesen neugebildeten Verbindungen noch einen erleichternden Einfluss auf die Elektrolyse haben, wird durch Specialuntersuchungen über die einzelnen Fälle zu entscheiden sein.

In denjenigen Fällen, wo schon vor der Schliessung des Stromes die für beide Stromrichtungen in Betracht kommenden Jonen in reichlicher Menge und in gut leitendem Zustande vorhanden sind, wird die Gleichung:

$$\varphi - G - \varphi_{0,1} = -K$$

schon vor der Schliessung des Kreises erfüllt sein, und der Eintritt des Stromes hieran nichts ändern; es wird also nach dessen Schliessung keine neue condensatorische Ladung erst gebildet zu werden brauchen. Dies ist der Fall bei den sogenannten constanten Ketten, also wenn ein Metall mit einer dasselbe Metall enthaltenden Lösung in Berührung ist, aus der es als Kation ausscheidet oder in die es als Anion eintritt. Auch, wenn Platin oder Kohle in salpetriger Salpetersäure stehen. Wenn eins von beiden in reiner Salpetersäure steht, wird es wenigstens nicht negativer bei ungeschlossener Kette sein können. als bei geschlossener. Wohl aber würde es möglicherweise positiver sein d. h. eine Sauerstoffpolarisation haben können. Ebenso wird Kupfer in verdünnter Schwefelsäure vor der

Stromschliessung negativ geladen worden sein und Wasserstoffpolarisation haben können, aber positivere Ladung als dem Gleichgewichtszustande entspricht, würde sich nicht halten. Hier ist das Kation Wasserstoff, als Anion aber tritt Kupfer ein. Beide sind verschieden, und es kann deshalb die Differenz des elektrischen Potentials und der condensatorischen Ladung eintreten, die dem Unterschiede dieser beiden Jonen entspricht. Somit wird Kupfer in verdünnter Schwefelsäure
754 als Kathode auch zuerst einen condensatorischen Ladungsstrom zeigen, dessen Stärke schnell schwindet, während derselbe wegfällt, wenn es in einer Lösung von Kupfervitriol steht.

Von dem Zeitpunkte ab, wo an einer der Elektroden die Dicke der elektrischen Schicht so weit gewachsen ist, dass das dortige Jon sich neutralelektrisch auszuscheiden beginnt, wird an dieser das Moment der elektrischen Doppelschicht und daher auch die Potentialdifferenz nicht mehr wachsen können, sondern nur noch an der anderen Elektrode, bis auch an dieser die Grenze der Zersetzung erreicht ist. Damit dies geschehe, wird nach Gleichungen 2 und 1a:

$$\varphi_1 - G_1 - \varphi_2 + G_2 = A > K_2 - K_1$$

werden müssen.

Dieselben Betrachtungen bestimmen dann auch unmittelbar das Gesetz der Stromstärke in den sogenannten constanten Ketten. Zu den letzteren gehören alle solche, in denen sich schon vor der Schliessung des Stromes das während der Elektrolyse bestehende elektrische Gleichgewicht zwischen Metallplatte und Flüssigkeit hat herstellen können.

Dann wird, wenn J die Intensität des Stromes, W den Widerstand in der metallischen, w den in der flüssigen Leitung bezeichnet, nach Ohm's Gesetz sein:

$$\varphi_1 - \varphi_2 - G_1 + G_2 - A = - JW$$
$$\varphi_{0,1} - \varphi_{0,2} = + Jw.$$

Da nach Gleichung (2):

$$\varphi_1 - \varphi_{0,1} - G_1 = - K_1,$$
$$\varphi_2 - \varphi_{0,2} - G_2 = - K_2,$$

ergiebt sich:

$$K_2 - K_1 - A = - J(W + w),$$

d. h. die sonst etwa noch vorhandene elektromotorische Kraft A wird um $K_2 - K_1$ verringert. Wenn $A = 0$, ist $K_1 - K_2$ die elektromotorische Kraft im Kreise. Diese hängt also nur von der molecularen Arbeit der elektrolytischen Zersetzung, die durch die Constanten K gemessen wird, nicht von den galvanischen Werthen G der Elektroden ab.

Auf die Erörterung der etwa in der Flüssigkeit vorhandenen elektromotorischen Kräfte will ich hier nicht näher eingehen, sondern verweise auf meine frühere Abhandlung vom 755
26. November 1877.[1])

Ist neutraler Sauerstoff in der Flüssigkeit aufgelöst, so wird die Kathode ihre negative Elektricität mit den Aequivalenten $(+E)$ dieses Elementes austauschen können, während der negativ gemachte O sich mit dem herangeführten + H verbindet. Da O jedenfalls geringere Anziehungskraft zum $+E$ hat als H, so wird dadurch die Potentialdifferenz an der Kathode erheblich herabgesetzt, und es wird in diesem Falle eine viel schwächere elektromotorische Kraft genügen einen dauernden, aber in seiner Intensität durchaus von der Diffusionsgeschwindigkeit des Sauerstoffes abhängigen Strom zu unterhalten. In der That geschieht dann an der Kathode die Vereinigung von freiem $\pm$ O mit $+ H_2$, während an der Anode $\pm$ O aus der Verbindung H_2SO_4 ausscheidet. Dies ergiebt die von mir als Convectionsströme bezeichneten Ströme, über welche ich der Akademie am 31. Juli 1873[2]) berichtet habe.

In dieselbe Kategorie gehören eine Menge anderer Fälle, in denen ein das Freiwerden einer der Elektricitäten erleichternder Bestandtheil in sehr geringer Menge in der Lösung vorkommt und erst allmählig durch Diffusion herangeschafft wird.

2) Ein zweiter Process, der eine positiv elektrische Grenzschicht beseitigt, ist die Occlusion des Wasserstoffs

1) Helmholtz, Wied. Ann. Bd. 3. S. 201. 1878. (Oben Nr. XLIV.)
2) Helmholtz, Pogg. Ann. Bd. 150. S. 483. 1873. (Oben Nr. XLII.)

in das Metall der Kathode. Am reichlichsten und schnellsten geschieht dies nach Graham's Entdeckung am Palladium, deutlich nachweisbar aber auch am Platin. Dass der Wasserstoff auch in dieses Metall tief eindringe, ist von Hrn. E. Root[1]) nachgewiesen worden.

Die von mir oben beschriebenen Versuche lehren, dass Wasserstoff bei Kräften, welche noch nicht zur Wasserzersetzung ausreichen, zur Occlusion kommen kann. Es war dazu eine Potentialdifferenz von etwa ein Daniell gegen die Sauerstoff entwickelnde Anode nöthig.

756 Nehmen wir an, dass (+ H) eintreten kann in das Pt, welches um jedes occludirte Wasserstoffatom $-E$ ansammelt, so würde bei der Elektrolyse Pt in die Verbindung mit dem H_2 einrücken, aus welcher das SO_4 verdrängt wird, und dadurch die chemische Arbeit der Elektrolyse vermindert werden. Die Verbindung, in welche hierbei das Platin mit dem Wasserstoff tritt, würde nicht nothwendig als eine chemische nach festen Massenverhältnissen geschlossene zu betrachten sein. Die S. 903 ff. beschriebenen Versuche zeigen aber, dass erst nach Ueberschreitung einer gewissen Grösse der elektromotorichen Kraft Wasserstoff in das Platin einzutreten beginnt, dann aber auch gleich in relativ grosser Menge in lang dauerndem und anfangs auch starkem Strome. Hat man diese Beladung, wie sie unter Wirkung der oben mit $\mathfrak{E} = 200$ bezeichneten elektromotorischen Kraft eintritt, abgewartet, so tritt bei Steigerung der elektromotorischen Kraft bis $\mathfrak{E} = 500$ kein Strom mehr ein, der den Eintritt erheblicher Mengen von Wasserstoff in das Platin anzeigte. Erst wenn man diese Grenze, wo Wasserzersetzung beginnt, überschritten hat, scheinen neue Mengen Wasserstoff einzutreten. Darauf lässt der Umstand schliessen, dass nach langer Einwirkung solcher stärkeren Ströme die geänderte Richtung der Erschütterungsströme bei aufgehobenem primären Strome eine Aenderung im Zustande des Metalles anzeigt, und dass beim Abwärtsgehen über die genannte Grenze ($\mathfrak{E} = 500$) sich ein sehr starker und anhalten-

1) E. Root, Berl. Monatsber. 16. März 1876; Pogg. Ann. Bd. 159. S. 416. 1876; vgl. auch Crova Mondes Bd. 5. S. 210. (Oben Nr. XLIII.)

der anodischer Strom entwickelt, der eine ziemlich erhebliche Menge locker gebundenen Wasserstoffs beseitigen muss. Beim Palladium sieht man unter entsprechenden Umständen eine Wasserstoffentwickelung in Bläschen vor sich gehen.[1]) Der bei $\mathfrak{E} = 200$ aufgenommene Wasserstoff entweicht dagegen erst bei schwach negativen elektromotorischen Kräften $\mathfrak{E} = -200$, wie man an den dann eintretenden stärkeren und dauernden anodischen Strömen erkennt.

Das Eindringen des Wasserstoffs in das Innere des Metalls müssen wir uns als einen sehr langsam vorschreitenden Process, der im ganzen wohl der Leitung der Wärme in sehr schlechten Wärmeleitern ähnlich ist, vorstellen. Selbst bei 757
den Drähten von 0,5 mm Durchmesser, die ich angewendet habe, sind mindestens 8 Tage nöthig, um annähernd vollständige Sättigung mit Wasserstoff oder annähernd vollständige Reinigung davon zu bewerkstelligen.

Solches mit H beladenes Palladium oder Platina verhält sich dem unveränderten Metall gegenüber im galvanischen Kreise wie ein positives Metall. In Gleichung (2) haben wir gefunden, dass:

$$\varphi_1 - \varphi_{0,1} = G - K = -4\pi\mu,$$

wo μ das Moment der elektrischen Doppelschicht an der Grenzfläche bezeichnet, in seinem Vorzeichen entsprechend der in der Flüssigkeit liegenden elektrischen Grenzschicht.

Die die chemische Arbeit messende Constante K des Platina, bezogen auf Wasserstoffeintritt, wird jedenfalls wachsen müssen, je mehr Wasserstoff eintritt; im Anfang scheint diese Steigerung aber sehr langsam zu geschehen, da eine grosse Menge eintritt, wenn überhaupt die Grenze der dazu nothwendigen elektromotorischen Kraft überschritten ist. Wenn wir dagegen annehmen, dass der galvanische Werth G des Metalls mit steigender Wasserstoffocclusion anfangs schnell wächst, so wird auch die Doppelschicht längs der Oberfläche geändert werden, sodass unter gleichen Umständen ihr in der Flüssigkeit liegender Theil schwächer positiv oder stärker

1) Beobachtung von Hrn. J. Moser.

negativ wird. Aus dieser Annahme würde sich zunächst die eigenthümliche Nachwirkung vorausgegangener starker Ströme während des Processes der Beladung mit Wasserstoff erklären. Eine zeitweilig einwirkende stärkere elektromotorische Kraft wird H kräftig herandrängen und zunächst eine dünne oberflächliche Schicht des Platina stark damit beladen. Dem entsprechend wird sich an der Aussenseite der Elektrodenfläche eine stärker negative Grenzschicht ausbilden. Hört nun bei einer Rückkehr zu einer schwächeren elektromotorischen Kraft die starke Zufuhr von H auf, so wird dasselbe aus der äusseren Schicht des Metalls in die tiefer gelegenen wasserstoffärmeren hinüber wandern. In dem Maasse, als die äussere Schicht sich des Wasserstoffs entledigt, wird ihre äussere Belegungsschicht auch wieder neue positive Bestandtheile auf-
758 nehmen müssen, und deren Heranfliessen kann sich in der Verstärkung des Stromes ausdrücken. Wesentliche Bedingung für diesen Erfolg wird also sein, dass schneller Abfall der Wasserstoffbeladung gegen das Innere des Metalls stattfinde, sodass das Abfliessen nach der Tiefe schnell genug vor sich gehe. Die Wasserstoffsättigung des Metalls wird also noch neu und unvollständig sein müssen. Ausserdem wird die elektromotorische Kraft zureichen müssen, den Rücktritt der höheren Beladung aus der Oberfläche des Metalls an das Wasser zu verhindern.

Was die Wirkungen des Flüssigkeitsstromes längs der Oberfläche der Elektrode betrifft, so können hier zunächst, wie ich schon oben bemerkt habe, Widerstandsänderungen in Betracht kommen, die durch Wegspülung schlecht leitender Schichten verursacht sind. Als solche betrachte ich die kathodischen Erschütterungsströme, die bei hinreichend intensivem primären kathodischen Strome auftreten und unmittelbar nach dem Aufhören des letzteren in die gegentheilige Richtung umschlagen.

Auf die übrigen Erschütterungsströme, welche bei anodischem, schwach kathodischem oder ganz fehlendem primären Strome eintreten, kann man dieselbe Erklärung anwenden, die ich auf die elektrocapillaren und capillarelektrischen Erscheinungen bei der Berührung von Glas und Wasser angewendet habe. Der Wasserstrom verschiebt die der Elektrode an-

liegenden Wasserschichten, in denen das entsprechende Jon mit seinen elektrischen Aequivalenten aufgehäuft ist. Dieser bewegliche Theil der elektrischen Grenzschicht wird stromabwärts zusammengedrängt, und wo er eine hinreichende Dicke gewinnt, wird das Jon unter elektrischer Neutralisation frei werden. Ist das Jon das Anion der Flüssigkeit (O), so wird die Entwickelung desselben $+E$ aus der Elektrode austreten machen, unmittelbar nachher wird neues ($-$ O $-$) von der Flüssigkeit her zuströmen und die Doppelschicht wieder herstellen. Beides giebt einen anodischen Strom. Dagegen würde eine Schicht des Kation bei Wasserströmung einen kathodischen Strom geben müssen. Die Erschütterungsströme werden um so stärker werden, je mehr von dem betreffenden Jon angesammelt, und je näher es der Grenze des Freiwerdens ist; 759
also 1) bei elektromotorischen Kräften, die zur dauernden Zersetzung genügen oder beinahe genügen, 2) bei grösserem positiven Werth der galvanischen Constante ($G-K$) für die anodischen Ströme, bei grösserem negativen für die kathodischen Ströme.

Die am Platina beobachteten Erscheinungen entsprechen diesen Voraussetzungen, wenn wir annehmen, dass wasserstofffreies Platina sehr schwach positiv gegen die von mir als Elektrolyt gebrauchte sehr verdünnte Schwefelsäure ist, dass das im mässigen Grade mit Wasserstoff beladene Platina einen grösseren positiven Werth von ($G-K$) hat, und eine stärkere negative Beladungsschicht in der Flüssigkeit bildet, dass dagegen bei starker Beladung der galvanische Werth G des Wasserstoffplatins ein Maximum erreicht, K dagegen, welches die moleculare Arbeit der eintretenden Occlusion misst, und nach vollendeter Sättigung in den der Entwickelung freien Wasserstoffs entsprechenden Werth übergegangen sein muss, schnell steigt, und das Metall daher eine positive äussere Grenzschicht von (+H) ausbildet.

Nach den hier gemachten Voraussetzungen würden wir durch die Erschütterungsströme, wenigstens bei mangelndem primären Strome, immer den Sinn der Potentialdifferenz zwischen Flüssigkeit und Metallplatte angezeigt erhalten, indem kathodische Ströme negative Ladung des Metalls, anodische positive Ladung anzeigen.

XLVII.

Eine elektrodynamische Waage.[1])

Aus: Wiedemann's Annalen Bd. XIV. S. 52—54.

52 Um die durch die Veränderungen der Richtung und Intensität des Erdmagnetismus verursachten Störungen bei der Messung galvanischer Ströme durch ihre elektromagnetische Wirkung zu vermeiden, habe ich mich bemüht eine elektrodynamische Waage zu construiren. An den Enden des Balkens einer kleinen chemischen Waage habe ich statt der Schalen zwei Spiralen von Kupferdraht aufgehängt, deren Höhe ihrem inneren Durchmesser gleich ist. Ihre Axe ist vertical, sie können sich um dieselbe nicht drehen. Zwei grössere, ebenso hohe Spiralen von grösserem Radius werden in einer festen Stellung von einem horizontalen Metallstabe gehalten, der in seiner Mitte an der die Waage tragenden Säule befestigt ist. Die Verbindungen der Drähte sind derart angeordnet, dass die eine der beweglichen Spiralen von der festen angezogen, die andere abgestossen wird. Beide feste Spiralen liegen etwas oberhalb der beweglichen. Die angezogene Spirale hebt sich, die abgestossene sinkt beim Durchleiten des Stromes durch den Schliessungskreis.

Bei der Construction einer solchen Waage sind zwei Schwierigkeiten zu überwinden. Erstens muss der Strom in die beweglichen Spiralen ohne Verminderung ihrer Beweglichkeit und ohne Einführung schwach aneinander gepresster Con-

---

1) Aus Proceedings of the London Roy. Soc. 1881. 7. April.

tactstellen, wodurch der Widerstand verändert würde, eingeführt werden. Diese Schwierigkeit liess sich in sehr befriedigender Weise durch Anwendung von Rauschgold beseitigen. Etwa 30 cm lange und 6—7 mm breite Streifen hiervon sind sehr 53
biegsam, zeigen keine innere Reibung, haben einen sehr mässigen Leitungswiderstand und werden infolge ihrer relativ grossen Berührungsfläche mit der Luft nicht leicht erhitzt. Jede der beweglichen Spiralen wurde mit den anderen den Strom leitenden Drähten durch zwei solche Streifen verbunden, welche von den am oberen Theil des Glaskastens der Waage befestigten Messingstücken herunterhängen.[1])

Die zweite Schwierigkeit ist, die Spiralen in eine solche Lage zueinander zu bringen, dass weder die Stabilität noch die Empfindlichkeit der Waage beeinträchtigt wird. Hierzu darf die Intensität der elektrodynamischen Kraft während der gewöhnlichen kleinen Schwingungen der Waage sich nicht zu sehr ändern. Diese Kraft ist bekanntlich Null, wenn die Mitte der beweglichen Spirale in einer Höhe mit der der festen liegt, sodann bei unendlicher Entfernung beider Spiralen voneinander. Zwischen beiden Lagen existirt ein Maximum der Kraft, welches nahezu der Coincidenz der oberen Fläche der einen mit der unteren Fläche der anderen Spirale entspricht. Zwischen der centralen Lage und den Lagen der Maximalwirkung ist der Differentialquotient der Kraft bei wachsendem Abstand der Mittelpunkte der Spiralen positiv und wird bei Ueberschreitung der Lage der Maximalwirkung negativ. Bei unendlicher Entfernung wird er wieder Null. Zwischen der Lage der Maximalwirkung und der unendlichen Entfernung muss es also eine Lage geben, wo der negative Differentialquotient der Kraft ein Maximum hat, und der zweite Differentialquotient Null ist. Diese Lage muss man den Spiralen geben. Da stets der Abstand des einen Spiralenpaares um ebensoviel vermindert wird, wie der des anderen vermehrt wird, so hängt die Veränderung

1) Solche Streifen von Rauschgold, durch welche ein Strom geleitet wird, und die zwischen die Magnetpole gehängt werden, können sehr gut zur Demonstration der Wirkung des Magneten auf bewegliche Leiter dienen. Sie werden angezogen, abgestossen, gegen die Schwere gehoben, oder in Spiralen um den Magnet gewickelt, je nach der Lage des letzteren.

der Kraft nur vom zweiten Differentialquotienten ab. Ist derselbe positiv, so erzeugt der Strom ein labiles Gleichgewicht;
54 ist er negativ, so wird die Stabilität der Waage vermehrt; d. h. sie ist mit Strom weniger empfindlich als ohne Strom. Werden die Spiralen auf die richtige Entfernung gebracht, so wird weder die Empfindlichkeit noch die Stabilät der Waage geändert, und auf diese Weise kann man die richtige Stellung finden.

Ist der Apparat gut eingestellt, so ist der Fehler, welcher bei der Einstellung der Waage gemacht werden kann, nicht grösser als ein Milligramm. Da die durch den Strom ausgeübte Kraft dem Quadrat der Intensität proportional ist, so bestimmt man die Intensität eines Stromes, welcher durch ein Gramm äquilibrirt wird, bis auf $^1/_{2000}$. Die Kraft, welche der elektrodynamischen Kraft entgegenwirkt und sie misst, ist allein die Schwere und keinen Schwankungen unterworfen, wie der Erdmagnetismus oder die Elasticität eines gedrillten einfachen oder bifilaren Drahtes, an welchem solche Spiralen aufgehängt sind.

Die Bestimmungen der elektrodynamischen Aequivalente des einem Gegengewicht von 1 g entsprechenden Stromes, welche durch verschiedene Beobachter während des letzten Jahres angestellt wurden, haben eine sehr befriedigende Uebereinstimmung ergeben.

XLVIII.

Ueber galvanische Polarisation des Quecksilbers und darauf bezügliche neue Versuche des Hrn. Arthur König.

Aus: Monatsberichte der Berliner Akademie vom 3. November 1881.

Die Oberfläche des Quecksilbers bietet eigenthümliche Vor- 945
theile beim Studium der galvanischen Polarisation, die den festen Metallen abgehen. Dies veranlasste mich Hrn. A. König aufzufordern, im hiesigen Universitätslaboratorium eine Reihe von Messungen über die Capillarspannung der galvanisch polarisirten Quecksilberflächen nach einer neuen Methode vorzunehmen, bei welcher der störende Einfluss der so veränderlichen Adhäsion der beiden Flüssigkeiten an den Glaswänden wegfällt, und gleichzeitig die optischen Schwierigkeiten bei der Messung der Niveaudifferenz zwischen der oberen Fläche und dem grössten Umfange eines ruhenden Quecksilbertropfens vermieden werden. Hr. König hat zu dem Ende die Oberflächenspannung in einem Quecksilbertropfen bestimmt, der durch einen festen kreisförmigen Glasrand von 9 mm Durchmesser begrenzt war. Die scharfe Kante dieses Randes war die Schnittlinie zweier unter 45^0 gegen die Verticale geneigter Schliffflächen. Der Tropfen wurde so weit hervorgedrängt, bis die Krümmung in der Mitte seiner oberen Fläche ein Maximum
erreichte. Diese Krümmung selbst konnte durch das Ophthal- 946
mometer mit grosser Schärfe gemessen werden. Die Integration einer von Poisson aufgestellten Differentialgleichung ergiebt dann eine Beziehung zwischen Krümmungsradius und Ober-

flächenspannung, welche sich zur numerischen Ausrechnung der letzteren mit beliebiger Genauigkeit benutzen lässt.

Die Polarisation der Quecksilberfläche wurde nach der von mir bei der Untersuchung der Bewegungsströme an polarisirten Flächen angewendeten Methode[1]) in folgender Weise bewirkt.

In die Flüssigkeit, unter welcher sich das Quecksilber befand, tauchten zwei Platinbleche ein, die mit den Poldrähten einer aus zwei Daniell'schen Elementen (ohne Diaphragma) bestehenden Batterie verbunden waren. Dasjenige dieser Elemente, dessen Zinkpol direct zu der einen Platinplatte führte, hatte eine Nebenschliessung von 1000 SE. Widerstand. Durch Messung der Intensitäten in den verschiedenen Zweigen dieses Stromnetzes ergab sich, dass zwischen den Enden dieser Nebenschliessung eine Potentialdifferenz von 0,86 D bestand. Indem nun der Zuleitungsdraht zu der Quecksilberkuppe an verschiedenen Stellen dieser Nebenschliessung abgezweigt wurde, und man ferner noch, wenn es nöthig wurde eine stärkere Wasserstoffpolarisation zu erzeugen, als sie durch directe Verbindung der Quecksilberkuppe mit der Platinkathode gegeben war, ein Daniell'sches Element in den genannten zur Quecksilberkuppe führenden Draht einschaltete, liessen sich alle Polarisationszustände innerhalb derjenigen Grenzen herstellen, welche einerseits in einer zu starken Wasserstoffentwickelung an der Quecksilberkuppe und andererseits in einer Trübung der letzteren durch Bildung von Quecksilberoxyd gegeben waren. In beiden Fällen konnte nämlich die Quecksilberkuppe nicht mehr zur Spiegelung benutzt werden, und damit wurde eine Bestimmung der Oberflächenspannung unmöglich. Die Art und Grösse der Polarisation soll in dem Folgenden angegeben werden durch die (positive oder negative) Differenz, um welche das Potential der Quecksilberkuppe das der Platinkathode übertraf.

Die vollständigere Beschreibung der angewendeten Methoden und der erlangten Resultate wird einem anderen Orte
947 vorbehalten. Hier möge es genügen, von den letzteren nur die die Grenzen der Aenderung bezeichnenden Zahlen anzugeben.

---

1) Monatsberichte vom 11. März 1880. — Wiedemann's Annalen Bd. 11. S. 738—740. (Vorhergehender Aufsatz.)

Die mittlere der nachfolgend gemachten Angaben bezieht sich auf das an dieser Stelle eintretende Maximum der Oberflächenspannung; die ersten und letzte Angabe hingegen auf die möglichen Grenzen der Polarisation.

$\frac{1}{10}$ procentige Schwefeläure.

Pot.-Diff.	Oberflächenspannung
0,00 D	45,17 mg/mm
+ 0,09 „	45,76 „
+ 0,86 „	30,50 „

1 procentige Schwefelsäure.

Pot.-Diff.	Oberflächenspannung
0,00 D	47,14 „
+ 0,26 „	47,59 „
+ 0,86 „	32,21 „

5 procentige Schwefelsäure.

Pot.-Diff.	Oberflächenspannung
0,00 D bis + 0,09 „	47,58 „
+ 0,17 „	47,81 „
+ 0,67 „	31,97 „

1 procentige Salpetersäure.

Pot.-Diff.	Oberflächenspannung
+ 0,09 D	42,35 „
+ 0,26 „	42,52 „
+ 0,86 „	32,93 „

5 procentige Salpetersäure.

Pot.-Diff.	Oberflächenspannung
0,00 D	33,03 „
+ 0,60 „	34,83 „
+ 0,77 „	34,68 „

Chlorwasserstoffsäure (5 % Gehalt an käuflicher Salzsäure).

Pot.-Diff.	Oberflächenspannung
— 1,00 D	44,39 „
— 0,14 „	48,27 „
+ 0,52 „	42,78 „

948 Concentrirte Lösung von Magnesiumsulfat.

Pot.-Diff.	Oberflächenspannung
— 1,00 D	29,57 mg/mm
— 0,66 „	37,54 „
+ 0,09 „	55,41 „
+ 0,85 „	38,83 „

Concentrirte Lösung von Natriumsulfat.

Pot.-Diff.	Oberflächenspannung
— 1,00 D	32,97 „
+ 0,17 „	47,62 „
+ 0,86 „	30,34 „

Concentrirte Lösung von Chlornatrium.

Pot.-Diff.	Oberflächenspannung
— 0,57 D	34,69 „
+ 0,17 „ bis + 0,26 „	52,10 „
+ 0,86 „	43,27 „

Concentrirte Lösung von Zinksulfat.

Pot.-Diff.	Oberflächenspannung
— 1,00 D bis + 0,14 „	constant 48,36 „
+ 0,34 „	50,32 „
+ 0,86 „	45,28 „

Bei einer Lösung von Merkuronitrat ergab sich bei allen Polarisationszuständen die Oberflächenspannung gleich
29,36 „

In einer frisch bereiteten Lösung von Aetznatron ergab sich:

Pot.-Diff.	Oberflächenspannung
— 1,00 D	24,86 „
0,00 „	51,49 „
+ 0,77 „	41,94 „

Bei derjenigen Polarisation, welche durch die Potentialdifferenz — 0,77 D bezeichnet ist, wird wahrscheinlich etwas

Quecksilber in die Lösung übergegangen sein, denn eine zweite Versuchsreihe ergab:

Pot.-Diff.	Oberflächenspannung	949
— 1,00 D	28,15 mg/mm	
+ 0,26 „	47,73 „	
+ 0,86 „	44,99 „	

Liess man das Quecksilber längere Zeit in einem Polarisationszustande, der der Potentialdifferenz + 0,86 entsprach, so bildete sich eine braune in losen Blättern auf der Kuppe liegende Masse (HgO?), die wohl ohne Zweifel die Zusammensetzung der Flüssigkeit ziemlich beeinflusst haben muss; denn nach Entfernung dieser braunen Masse ergaben die Bestimmungen der Oberflächenspannungen bei verschiedenen Polarisationszuständen Werthe, welche kein deutlich ausgesprochenes Maximum mehr zeigten und zwischen 35,03 und 52,52 mg lagen.

Ausser dieser letzten Versuchsreihe und derjenigen, welche in der Lösung von Merkuronitrat gemacht wurde, zeigte sich beständig, dass von dem Zustande der stärksten noch verwendbaren Wasserstoffpolarisation bis zu einer mittleren Polarisation die Oberflächenspannung continuirlich zunahm und von diesem Maximum dann bis zu dem am weitesten nach der Sauerstoffseite hin liegenden Polarisationszustand wieder abnahm.

Dass eine solche Abnnahme der Capillarspannung durch starke negative Ladung des Quecksilbers hervorgebracht werden kann, zeigen schon einige Versuche von Hrn. Quincke, in denen aber die von ihm aufgestellte Hypothese, dass elektrolytische Ausscheidung der in der Lösung enthaltenen Metalle von Einfluss gewesen sei, wahrscheinlich zutrifft, da dabei elektromotorische Kräfte von 4 bis 10 Grove's angewendet waren. Auch in Hrn. König's Versuchen zeigt sich beim Zinksulfat die Capillarconstante vom Potentialwerthe — 0,14 bis zu dem — 1 unveränderlich. Der erstere Werth entspricht einer Differenz von zwei Daniell's zwischen der Platinanode und dem Quecksilber. Da die elektromotorische Gegenkraft von Zinksulfatlösung, die zwischen Platinelektroden zersetzt wird, nach den Beobachtungen von Hrn. Fr. Exner[1]) 2,14

1) Wied. Ann. Bd. 6. S. 364.

Daniell's beträgt, so zeigt auch hier das Constantwerden der Capillarconstante wohl elektrolytische Ausscheidung des Zinkes an. Nach Beobachtungen von Hrn. König verhalten sich die elektromotorischen Kräfte eines Daniell zu denen,
950 welche man erhält, wenn man das Zink darin durch amalgamirtes Magnesium oder Natrium ersetzt, wie:

$$62:95:234 = 1:1{,}53:3{,}77.$$

Daraus folgt, dass in den Versuchen über die Capillarspannung Reduction des Magnesium- und Natriumsulfats erst bei den mit —0,67 und 2,91 bezeichneten Potentialwerthen hätte eintreten können. Bis zu letzterem Werthe sind die Versuche in den Lösungen der Natronverbindungen nicht fortgesetzt. Mit Ausnahme der genannten Fälle, nämlich der Quecksilber enthaltenden Lösungen, der Zinklösungen mit negativen Potentialwerthen, und vielleicht auch der Magnesialösung bei den höchsten Potentialwerthen, kann es zu einem dauernden elektrolytischen Zersetzungsstrom von solcher Stärke nicht gekommen sein, dass dadurch das im polarisirten Zustande der Kuppe bestehende Gleichgewicht zwischen elektrischen und molecularen Kräften erheblich gestört worden wäre.

Dass wir bei wirklich ausgeführten Versuchen über galvanische Polarisation uns diesem Gleichgewicht bis auf eine fast verschwindend kleine Differenz genähert haben, erkennen wir daraus, dass die elektrische Bewegung, der vorher bestehende galvanische Strom, aufhört, oder nur in verschwindend kleinen Bruchtheilen seiner ursprünglichen Stärke bestehen bleibt. Dem Potentialunterschiede, der dann noch zwischen mindestens einer der Elektroden und der Flüssigkeit, meistens aber wohl zwischen beiden Elektroden und der letzteren bestehen muss, wird an den Grenzflächen selbst eine elektrische Doppelschicht entsprechen, wie eine solche sich nach den allgemeinen Gesetzen der Elektricitätsvertheilung an jeder Fläche ausbilden muss, an der ein Sprung im Werthe des Potentials stattfindet. Ich habe schon früher[1]) nachgewiesen, dass die Grösse der Potentialdifferenz P durch das Moment der Doppelschicht m gegeben ist, indem:

$$P = 4\pi m.$$

1) Pogg. Ann. Bd. 89. S. 225—228. (Oben S. 489.)

Unter Moment der Doppelschicht verstehe ich die Dichtigkeit der positiven Flächenbelegung multiplicirt mit dem Abstande von der negativen Flächenbelegung. Jede elementare Elektricitätsmenge in einer solchen Doppelschicht wird abgestossen von den benachbarten gleichnamigen Mengen derselben Schicht, angezogen durch die entgegengesetzten der anderen Schicht. Da aber die Theile der eigenen Schicht näher sind, als die 931
gleich grossen der entgegengesetzten, und näher den tangentialen Richtungen in der Fläche liegen, so wird die Abstossung in Richtung der Fläche die Anziehung überwiegen und in jeder mit einer Doppelschicht belegten Fläche muss die elektrostatische Kraft eine Dehnung der Fläche hervorzubringen streben. Wenn also die elektrisirte Fläche eine capillare Contractionskraft von gewisser Grösse hat, so wird die mit einer Doppelschicht beladene Fläche eine Verminderung der capillaren Spannung zeigen müssen. Es wäre also unter diesen Umständen zu erwarten, dass die capillare Spannung der Fläche im unbeladenen Zustande ein Maximum sein müsste.

Nun haben wir es bei den polarisirten Elektrodenflächen allerdings mit einer viel complicirteren Anordnung zu thun; da die Elektricität, welche im Elektrolyten sich anhäuft, nach Faraday's Gesetz jedenfalls ponderable Jonen des Elektrolyten mit herangeführt hat. Aber die eben angestellte Betrachtung lässt sich auch noch erheblich verallgemeinern auf einem Wege, der schon von Hrn. Lippmann eingeschlagen ist, wobei nur die Voraussetzung festgehalten zu werden braucht, dass die Kräfte, unter deren Einfluss die Grenzschichten sich bilden, conservative Kräfte seien und die dabei eintretenden Aenderungen daher vollkommen reversibel. Das thatsächliche Vorhandensein der Reversibilität dieser Processe ist durch die Versuche von Hrn. Lippmann gleichzeitig grossentheils bestätigt worden.

Für unseren Zweck lässt sich die bezeichnete Verallgemeinerung am einfachsten in folgender Form ausführen. Es sei ω die Flächenausdehnung der Berührungsfläche und ε das Quantum Elektricität, was im Metall längs der Flächeneinheit angehäuft ist. Im Elektrolyten wird der Menge $+\varepsilon$ die Menge $-\varepsilon$ gegenüberliegen müssen, und durch deren Heranfliessen

werden äquivalente Quanta des Anion herangeführt und angehäuft sein. Unsere Annahme besteht also wesentlich darin, dass die Menge und Anordnung dieser ponderablen Molekule, sowie die der entsprechenden elektrischen Schichten im Metall nur abhänge von der auf jeder Flächeneinheit angesammelten Elektricitätsmenge ε. Ist diese Annahme zulässig, so ist der physikalische Zustand der Fläche vollständig definirt, wenn die Grössen ω und ε für sie gegeben sind.

Um diesen Zustand der Fläche herzustellen oder zu verändern, wird eine gewisse Arbeit W aufgewendet werden
952 müssen. Erstens wird die Fläche gegen den Einfluss ihrer capillaren Spannung gedehnt werden müssen. Nennen wir T die Kraft, mit welcher die Spannung der Fläche auf jede Längeneinheit ihrer Begrenzung wirkt, so ist bekanntlich $T . d\omega$ die Arbeit, welche bei der Dehnung der Fläche ω auf $(\omega + d\omega)$ gegen die Capillarspannung zu leisten ist.

Zweitens ist Arbeit nöthig, um neue Quanta Elektricität der Doppelschicht zuzuführen. Soll in einen Leiter, dessen Potential (elektrostatisch gemessen) p und dessen galvanische Constante k ist, ein neues Quantum Elektricität dE eingeführt werden, so ist dazu die Arbeit $(p - k) dE$ nöthig. In unserem Falle ist im Metall $\varepsilon . \omega = E$ und $- \varepsilon . \omega$ im Elektrolyten. Die gesammte Arbeit dW für gleichzeitige Zunahme von ω um $d\omega$ und von E um dE ergiebt sich also:

$$dW = T . d\omega + (p_m - p_f - k_m + k_f) d . (\omega \varepsilon)$$

oder:

$$dW = [T + \varepsilon (p_m - p_f - k_m + k_f)] d\omega + \omega . [p_m - p_f - k_m + k_f] d\varepsilon.$$

Da unter der Voraussetzung conservativer Kräfte W eine Function nur von ω und ε sein muss, so folgt, dass:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} [T + \varepsilon (p_m - p_f - k_m + k_f)] = \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega (p_m - p_f - k_m + k_f)],$$

oder, wenn wir:

$$p_m - p_f = P$$

setzen und berücksichtigen, dass P nicht von ω und k_m und k_f weder von ε noch von ω abhängig sind:

$$\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} + \varepsilon . \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} = 0.$$

Da T und P nur Functionen von ε sind, nicht von ω, können wir auch schreiben:

$$\frac{\partial T}{\partial P} = - \varepsilon.$$

Letztere Gleichung sagt aus, dass für einen Grenzwerth von T die Dichtigkeit $\varepsilon = 0$ sein müsse. Ausserdem zeigt diese Gleichung, dass der absolute Werth der angesammelten Elektricität ε durch Messungen von T und P in absolutem Maasse gefunden werden kann.

Die Voraussetzung, dass es conservative Kräfte sind, die das Gleichgewicht an einer polarisirten Fläche bestimmen, führt also nothwendig zu der Voraussetzung, dass in diesem 953
Zustande der maximalen Spannung der Oberfläche die letztere frei von jeder elektrischen Doppelschicht sei und dass eben dann auch kein Potentialunterschied zwischen dem Quecksilber und der Flüssigkeit bestehe. Diese Folgerung kann durch weitere Versuche geprüft werden, da man jede Ladung einer Quecksilberfläche durch schnelle Vergrösserung derselben, wie sie beim Abtropfen vorkommt, muss beseitigen können.

Faraday's elektrolytisches Gesetz, dessen strenge Giltigkeit alle späteren Versuche nur bestätigt haben, zeigt, dass wo keine Elektrolyse möglich ist, auch keine Elektricität vom Metall zum Elektrolyten oder umgekehrt übergehen kann. Einen scheinbaren Widerspruch dagegen könnte man in den bekannten älteren Versuchen über galvanische Ströme, die durch ungleichzeitiges Eintauchen zweier gleichartiger Elektroden in die gleiche Flüssigkeit erregt werden, zu finden glauben. Diese zeigen allerdings, dass sogar ohne vorausgegangene Stromwirkung an den zuerst eingetauchten Platten in den ersten Secunden oder Minuten nach dem Eintauchen Veränderungen vor sich zu gehen pflegen, welche den Potentialunterschied zwischen dem Metall und der Flüssigkeit verändern.

Das Quecksilber, als Elektrode angewendet, hat bei den hierhergehörigen Versuchen einen wichtigen Vortheil vor den festen Metallen. Seine Berührungsfläche mit der Flüssigkeit ist dehnbar und kann beliebig verkleinert oder vergrössert werden, und wenn man die oberflächlichen Theile des Quecksilbers sich in einer Reihe von Tropfen sammeln und abfallen

lässt, so können sich fortdauernd aus dem Inneren des reinen Metalles neue Theile der Oberfläche entwickeln, die vorher weder mit der Luft noch mit der Flüssigkeit in Berührung waren. In der That hat auch schon Hr. Quincke[1]), wie mir scheint mit Recht, auf die Analogie der durch schnell tropfendes Quecksilber erregten Ströme mit denen aufmerksam gemacht, welche bei festen Metallen durch ungleichzeitiges Eintauchen erregt werden.

Der Sinn dieser von selbst eintretenden Veränderung an der neugebildeten Quecksilberoberfläche ergiebt sich aus Hrn.
954 Lippmann's[2]) und Hrn. Quincke's Beobachtungen. Nach des Letzteren sehr mannigfachen Versuchen geht der positive Strom, der durch abtropfendes und sich im unteren Theile des Elektrolyten wieder sammelndes Quecksilber erzeugt wird, in den bisher untersuchten Elektrolyten immer in Richtung des tropfenden Quecksilbers, d. h. die sich unten sammelnde Quecksilbermasse, an deren Oberfläche die Schichten, die die Aenderung hervorgebracht haben, sich concentriren, hat positiveres Potential als die obere durch Abtropfen immer wieder erneute Fläche.

Eine solche Potentialdifferenz fordert eine elektrische Doppelschicht, deren positive Hälfte im Innern des unteren Quecksilbers, die negative dagegen, am Anion der Flüssigkeit haftende, in der Flüssigkeit liegt. Dadurch ist der Sinn der elektrischen Ladung gegeben, welche sich mit mässiger Geschwindigkeit an der Oberfläche des Quecksilbers bildet. Dass diese Geschwindigkeit eine mässige ist, folgt aus dem Umstande, dass langsamer Tropfenstrom schwache Potentialunterschiede hervorbringt, dass diese aber, wie Hr. Quincke gezeigt hat, bei wachsender Geschwindigkeit des Tropfenstromes sich bald einem Maximum nähern, welches durch weitere Steigerung der Geschwindigkeit nicht mehr überschritten wird. Dies Letztere wird eintreten, sobald die neuen Theile der oberen Quecksilberfläche so schnell in die Tropfen übergehen, dass sie sich nicht mehr merklich laden können, ehe sie abreissen, und

1) Pogg. Ann. Bd. 153. S. 161.
2) Ebendaselbst Bd. 149. S. 556—558.

daher die obere Fläche in vollständig unverändertem Zustande bleibt.

Nach Faraday's Gesetz würde der hierbei vor sich gehende Eintritt positiver Elektricität in das Metall nur mittels einer Elektrolyse stattfinden können, die einen Stoff beträfe, welcher noch geringere Anziehung zur positiven Elektricität hat als das Quecksilber. Zunächst wäre hier an den atmosphärischen Sauerstoff zu denken, dem man, wenn er elektrisch neutral in der Flüssigkeit aufgelöst ist, ausreichende Verwandtschaft zur negativen Elektricität zuschreiben könnte, um diese dem Quecksilber zu entziehen, und dafür positive an das Metall abzugeben. Die Langsamkeit der Ladung würde sich dadurch erklären, dass dieser gelöste Sauerstoff in geringen Mengen vorhanden ist und nur langsam durch Diffusion erneuert werden kann. Zur Prüfung dieser Hypothese würden noch Versuche anzu- 955
stellen sein, um festzustellen, ob verminderter Sauerstoffgehalt der Flüssigkeit die Strömungen bei gleicher Tropfenzahl für die Secunde schwächer macht. Hrn. Quincke's Versuche [1]) zeigen, dass die Wirkung nicht aufhört, auch wenn man den Sauerstoffgehalt der Flüssigkeit so weit beseitigt, als dies durch Auskochen geschehen kann. Bei den enorm grossen Mengen galvanischer Elektricität, welche jedes Milligramm Sauerstoff liefern kann, und der Kleinheit der unteren Quecksilberfläche, welche zu polarisiren ist, wird man kaum darauf rechnen können, durch irgend eine chemische Methode die Flüssigkeit genügend von Sauerstoff zu reinigen, um jede elektrolytische Wirkung des letzteren definitiv aufzuheben, wenn auch Verlangsamung ähnlicher Vorgänge z. B. an Platinflächen durch möglichste Beseitigung des gelösten Sauerstoffes sich sehr wohl erreichen lässt.

Wäre einer der in grösserer Menge vorhandenen Bestandtheile der Flüssigkeit an der Elektrolyse Schuld, so würde wohl dieser ganze Process der Ladung zweier sich berührender Flächen in unwahrnehmbaren kurzen Zeitperioden zu Stande kommen können.

Ich möchte aber die hier hingestellte Hypothese ausdrücklich

---

1) Pogg. Annalen Bd. 153. S. 170.

als solche anerkannt wissen. Für das Folgende genügt uns zunächst die Thatsache, dass unter den bisher eingehaltenen Bedingungen der Versuche, Quecksilber in Berührung mit elektrolytischer Flüssigkeit sich nur langsam positiv gegen die Flüssigkeit ladet.

Die Langsamkeit dieser Ladung bei beschränkter Diffusion hat sich übrigens viel auffallender in Hrn. Lippmann's Versuchen mit dem Capillarelektrometer gezeigt, insofern der feine Quecksilberfaden desselben aus jedem Grade der Ablenkung, wenn er so gut isolirt, als der Apparat es gestattet, sich selbst überlassen bleibt, allmählig sich immer wieder einer bestimmten Gleichgewichtslage nähert, die verschieden ist von der, welche frisch abgetropftes Quecksilber annimmt. In der feinen Capillarröhre des Lippmann'schen Instrumentes geschieht die Diffusion nur ausserordentlich viel langsamer als in den eben besprochenen Tropfapparaten, und braucht Stunden[1]), während die unmittelbare elektrolytische Ausgleichung mit der Säure,
956 falls eine solche möglich wäre, im Querschnitt der Röhre ohne Verzögerung von Statten gehen könnte.

Daraus schliesse ich, dass wenn eine schnell abtropfende und übrigens isolirte Quecksilbermasse durch die tropfende Spitze mit einem Elektrolyten in Berührung ist, das Quecksilber und der Elektrolyt kein verschiedenes Potential haben können. Denn hätten sie es — wäre z. B. das Quecksilber positiv — so würde jeder fallende Tropfen eine Doppelschicht an seiner Oberfläche bilden, welche $+E$ aus dem Quecksilber wegnähme, und dessen positives Potential kleiner und kleiner machte, bis es dem der Flüssigkeit gleich wäre.

Die Entladung der Berührungsflächen wurde in Hrn. König's Versuchen dadurch erreicht, dass die Quecksilberkuppe leitend verbunden wurde mit einer Elektrode, die aus einem staubförmig herabtröpfelnden Quecksilberstrahle bestand. Eine Bestimmung der Oberflächenspannung unter diesen Verhältnissen ergab nun Werthe, welche thatsächlich mit den früher erhaltenen Maximalwerthen ziemlich genau zusammenfielen. Es ist zu bemerken, dass Versuche dieser Art nur angestellt wurden in

---

1) Pogg. Annalen Bd. 149. S. 551.

$\frac{1}{10}$, 1 und 5 procentiger Schwefelsäure, in Lösungen von Magnesiumsulfat, Natriumsulfat, Chlornatrium und verdünnter Natronlauge. Die geringen Abweichungen, welche sich zeigten, lassen sich wohl dadurch erklären, dass zu beiden Messungen sowohl verschiedene Quecksilber- als Flüssigkeitsmengen benutzt wurden, wodurch eine die Oberflächenspannung beeinflussende Verschiedenheit hinsichtlich der niemals ganz zu vermeidenden Spuren fremdartiger Beimischungen entstand. Dass die erhaltenen Werthe dem gesuchten Maximum wirklich entsprachen, ging daraus hervor, dass bei Einschaltung einer elektromotorischen Kraft, gleichviel welcher Richtung, in den die beiden Elektroden (Quecksilberkuppe und Quecksilberstrahl) verbindenden Draht immer eine Verminderung in der Oberflächenspannung eintrat. Aus diesen Versuchen geht also hervor, dass die durch die Annahme strenger Gültigkeit des Faraday'schen Gesetzes einerseits, und der Wirkung rein conservativer Kräfte andererseits geforderte Uebereinstimmung in der That besteht.

Um endlich noch zu sehen, wie schnell eine solche von Elektricität freie Oberfläche sich wieder elektrisch lade, wurden in $\frac{1}{10}$ procentiger Schwefelsäure noch folgende Versuche angestellt. Die Entladung bewirkte man entweder dadurch, dass man
die Quecksilberkuppe mit der tröpfelnden Elektrode verband 937
oder die durch die Potentialdifferenz $+0{,}09$ D bezeichnete Stromverzweigung herstellte, den Zustand einige Zeit bestehen liess und dann die Zuleitung zur Quecksilberkuppe unterbrach. Es trat innerhalb weniger Minuten eine Verminderung der Oberflächenspannung ein, welche dann noch mehrere Stunden, allerdings in viel langsamerer Weise, fortwährte und schliesslich bei einem Werthe von 35 bis 36 mg/mm stehen blieb.

Die Construction des bei diesen Versuchen benutzten Apparates war derart, dass nach einem Fortstossen des oberen Theiles des Tropfens sofort neues Quecksilber von unten her empordrang und den Tropfen zur früheren Gestalt ergänzte. Man konnte, nachdem der durch das Fortschleudern in heftige Bewegung gekommene Tropfen wieder seine Gleichgewichtslage angenommen, noch eine geringe Abnahme seiner Oberflächenspannung beobachten. Ob die letztere im ersten Augenblicke nach der Bildung des neuen Tropfens dem früher erhaltenen

Maximalwerthe gleich war, wie theoretisch zu vermuthen, liess sich leider wegen der erwähnten unvermeidlichen Schwankungen der ganzen Quecksilbermasse nicht feststellen.

Ueber die hypothetische Ursache der Veränderung, welche an einer neugebildeten Quecksilberoberfläche vor sich geht, zeigen diese Versuche wenigstens so viel, dass sie in einer durch den elektrolytischen Strom zu beseitigenden, also auch durch den entgegengesetzten Strom hervorzurufenden Veränderung besteht, da sie durch fortdauernde galvanische Ausgleichung der Fläche gegen eine sich fortdauernd erneuernde Tropffläche ferngehalten werden kann. Wäre nach der oben vorgebrachten Hypothese Sauerstoff das in der negativen Grenzschicht des Elektrolyten gesammelte Anion, so wäre dieser Bedingung offenbar Genüge geleistet. Quecksilber, dessen Oberfläche seit längerer Zeit mit einem lufthaltigen Elektrolyten in Berührung ist, wird also im allgemeinen positiv geladen sein und bedarf der Wasserstoffzuführung durch einen kathodischen Strom, um in seiner Capillarspannung zuzunehmen. Das ist der von Hrn. Lippmann vorzugsweise beobachtete gewöhnliche Fall. Dehnung der Fläche verdünnt die vorhandene elektrische Doppelschicht derselben und vermindert damit den Potentialunterschied zwischen Quecksilber und Elektrolyten. Dadurch wird die vorhandene elektromotorische Kraft der
300 Zelle in dem Sinne geändert, dass ein anodischer Strom begünstigt wird. Jenseits des Maximums aber muss sich alles dies umgekehrt verhalten.

Verlag von **Joh. Ambr. Barth** in Leipzig.

Gleichzeitig erscheint:

GESAMMELTE
ABHANDLUNGEN

von

G. Kirchhoff.

gr. 8⁰. 641 Seiten mit Portrait und 2 lith. Tafeln. Preis 15 Mark.

Inhaltsübersicht.

Ueber den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige. — Nachtrag zu dem vorigen Aufsatze. — Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird. — Ueber die Anwendbarkeit der Formeln für die Intensitäten der galvanischen Ströme in einem Systeme linearer Leiter auf Systeme, die zum Theil aus nicht linearen Leitern bestehen. — Ueber eine Ableitung der Ohm'schen Gesetze, welche sich an die Theorie der Elektrostatik anschliesst. — Ueber die stationären elektrischen Strömungen in einer gekrümmten leitenden Fläche. — Ueber die Messung elektrischer Leitungsfähigkeiten. — Ueber die Vertheilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln. — Zur Theorie des Condensators. — Bestimmung der Constanten, von welcher die Intensität inducirter elektrischer Ströme abhängt. — Ueber die Bewegung der Elektricität in Drähten. — Ueber die Bewegung der Elektricität in Leitern. — Zur Theorie der Entladung einer Leydener Flasche. — Zur Theorie der Bewegung der Elektricität in unterseeischen oder unterirdischen Telegraphendrähten. — Ueber den inducirten Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen. — Zur Theorie des in einem Eisenkörper inducirten Magnetismus. — Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. — Ueber die Schwingungen einer kreisförmigen elastischen Scheibe. — Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes. — Ueber das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation bei Stäben von federhartem Stahl. — Ueber die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt. — Ueber die Reflexion und Brechung des Lichts an der Grenze krystallinischer Mittel. — Ueber die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit. — Ueber die Kräfte, welche zwei unendlich dünne, starre Ringe in einer Flüssigkeit scheinbar auf einander ausüben können. — Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen.

— Ueber stehende Schwingungen einer schweren Flüssigkeit. — Versuche über stehende Schwingungen des Wassers. — Ueber einen Satz der mechanischen Wärmetheorie und einige Anwendungen desselben. — Bemerkung über die Spannung des Wasserdampfes bei Temperaturen, die dem Eispunkte nahe sind. — Ueber die Spannung des Dampfes von Mischungen aus Wasser und Schwefelsäure. — Ueber die Leitungsfähigkeit des Eisens für die Wärme. — Ueber den Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung. — Ueber den Winkel der optischen Axen des Aragonits für die verschiedenen Fraunhofer'schen Linien. — Ueber die Fraunhofer'schen Linien. — Ueber den Zusammenhang zwischen Emission und Absorption von Licht und Wärme. — Ueber das Verhältniss zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht. — Chemische Analyse durch Spectralbeobachtungen. — Zur Geschichte der Spectral-Analyse und der Analyse der Sonnenatmosphäre.

W. Rowan Hamilton

Elemente der Quaternionen.

Deutsch von

Paul Glan,

Docent für Physik an der Universität Berlin.

Ersten Bandes I. Theil.

Seite 1—132. gr. 8°. Mit Figuren. 1881. ℳ 4.—

Ersten Bandes II. Theil.

Seite 133—411. 1882. ℳ 8.—

H.'s „Elements of Quaternions" ist bekanntlich das grundlegende Werk über die Rechnung mit Quaternionen und wird als solches mit zunehmender Ausbreitung dieser Rechnungsart immer mehr geschätzt werden. — Exemplare des engl. Originals sind nicht mehr zugänglich und die günstige Aufnahme, welche diese deutsche Ausgabe sofort gefunden, beweist, dass eine gute Uebersetzung ein wirkliches Bedürfniss war. Die deutsche Ausgabe wird in 2 Bände eingetheilt sein, von welchen der erste in 3 Theilen ausgegeben wird.

Alfr. Donadt

Das mathematische Raumproblem
und
die geometrischen Axiome.

8°. 68 Seiten. 1881. ℳ 1.60.

Verlag von Joh. Ambr. Barth in Leipzig.

H. Noth

Oberlehrer am Gymnasium zu Freiberg in Sachsen

Die Arithmetik der Lage

Ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Raumlehre.

Mit Berücksichtigung
ebener geometrischer Gebilde erster und zweiter Ordnung.

gr. 8⁰. 90 Seiten. Mit Figuren. 1881. ℳ 2.40.

Durch die „Arithmetik der Lage" wird eine Idee vollständig realisirt, die zuerst von Leibniz (im Jahre 1679) ausgesprochen und in neuester Zeit von dem genialen Mathematiker H. Grassmann weiter verfolgt wurde, die Idee einer Arithmetik, durch welche die Lage der Raumelemente direkt ausgedrückt wird, ohne dass hierzu Grössenverhältnisse benutzt werden. Mit Hilfe von Berechnungen, deren Gesetze mit denen der gewöhnlichen Arithmetik (der Addition, Subtraction, Multiplication und Division) übereinstimmen, wird hier z. B. die Lage von Punkten und unbegrenzten geraden Linien berechnet. Hierbei stellen sich (unter anderen) besonders merkwürdige und einfache Beziehungen zwischen den Punkten von Curven und ihren Tangenten heraus. So ist z. B. der Durchschnittspunkt von je zwei Tangenten eines Kegelschnittes die mittlere Proportionale zwischen den beiden Berührungspunkten etc. Besonders beachtenswerth erscheint ferner der Umstand, dass durch die „Arithmetik der Lage" die Zahlentheorie mit der Raumlehre von einer völlig neuen Seite aus in Fühlung gebracht wird.

Van der Waals

Die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes.

Uebersetzt und mit Zusätzen versehen
von
F. Roth.

176 Seiten. 8⁰. Mit 2 Tafeln. 1881. Preis ℳ 4.—

Die unter Mitwirkung des Verfassers bearbeitete Uebersetzung enthält auch die seit dem Erscheinen der Originalausgabe (Leiden 1873) vom Autor durch die königl. niederl. Akad. d. W. veröffentlichten weiteren Arbeiten (1880), durch welche seine Theorie zu einem gewissen Abschluss geführt wird, ausserdem sind die einschlägigen Arbeiten anderer Autoren berücksichtigt.

Unter der Presse:

Thermochemische Untersuchungen

von Prof. **Julius Thomsen**, an der Univ. Kopenhagen.

Clausius, R., **Die Potentialfunction und das Potential.** Ein Beitrag zur mathematischen Physik. 3. Auflage. 178 Seiten gr. 8⁰. ℳ 4.—

du Bois-Reymond, P., **Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variabeln.** I. Heft Theorie der Charakteristiken. 255 Seiten. gr. 8⁰. 1864. ℳ 5.20.

Hüfner, G., **Quantitat. Spectralanalyse und ein neues Spectrophotometer.** 26 Seiten. 8⁰. Mit 1 Tafel. 1878. ℳ 1.—
Sep.-Abdr. a. d. Journal f. prakt. Chemie.

Lohrmann's Mondkarte. 25 Blatt in Kupferstich, nebst 2 Erläuterungstafeln u. Portrait Lohrmann's. Mit selenograph. Ortsbestimmungen (49,4 Seiten) nach F. W. u. M. Opelt, herausg. v. Jul. Schmidt (Athen). gr. 4⁰. 1878. In Mappe. ℳ 50.—

Magnus, G., **Hydraulische Untersuchungen** (I.) 59 Seiten. 8⁰. Mit 2 Tafeln. 1855. ℳ 1.20.

—— —— (II.) 32 Seiten. 8⁰. Mit 2 Tafeln. 1859. ℳ —90.
Aus den Annalen d. Physik separat abgedruckt.

Melde, Fr., **Die Lehre von den Schwingungscurven** nach fremden und eigenen Untersuchungen. 228 Seiten gr. 8⁰ mit Atlas von 11 lith. Tafeln in gr. 4⁰. 1864. ℳ 8.—

Opelt, F. W., **Allgemeine Theorie der Musik,** auf den Rhythmus der Klangwellenpulse gegründet. gr. 4⁰. 80 Seiten. Mit 3 Tafeln. 1852. ℳ 4.—

Opelt, M., **Der Mond.** Populäre Darstellung der Verhältnisse u. Erscheinungen, welche von diesem Körper bekannt sind. 46 Seiten Text in 8⁰. Nebst einer Vollansicht des Mondes in optischer Lichtwirkung und in fortschreitender Phase dargestellt nebst Erläuterungsblatt. 2 Blatt gr. Fol. 1879. ℳ 6.—

Poggendorff, J. C., **Geschichte der Physik.** Vorlesungen gehalten an der Universität zu Berlin. 8⁰. 937 Seiten mit Fig. 1879. ℳ 16.80.

Rühlmann, R., **Die barometrischen Höhenmessungen** u. ihre Bedeutung für die Physik der Atmosphäre. 133 Seiten. 8⁰. Mit 6 Tafeln. 1870. ℳ 4.—

Verlag von **Joh. Ambr. Barth** in Leipzig.

Annalen
der
PHYSIK UND CHEMIE.

Neue Folge,

unter Mitwirkung der physikal. Gesellschaft zu Berlin, insbesondere des Herrn Prof. Helmholtz, herausgegeben von

Prof. **G. Wiedemann.**

Jährlich 3 Bände in 12 Heften 8⁰. Mit Tafeln.
Preis ℳ 31.—

Bis Ende 1881 sind erschienen
unter Redaction von *Gilbert,* (1799—1824) Band 1—76.
,, ,, ,, *Poggendorff* (1825—76) Band 77—236 (oder der Poggendorff'schen Folge Band 1—160). Ferner 8 Ergänzungsbände und der zur Feier des 50jähr. Redactions-Jubiläums Poggendorff's erschienene Jubelband.
,, ,, ,, *Wiedemann* (seit 1877) Band 237—250 oder Neue Folge Band 1—14.

Im Ganzen 83 Jahrgänge in 250 Bänden, 9 Extrabänden und 5 Reg.

Obschon eine grosse Anzahl Bände vergriffen ist, stehen fast immer complete Exemplare aller 3 oder der einzelnen Reihen bei der Verlagshandlung zum Verkauf.

Zur Completirung ihrer Vorräthe sucht dieselbe stets einzelne Bände sowie Reihen anzukaufen und bittet im gegebenen Fall um Offerten.

Beiblätter
zu den
Annalen der Physik und Chemie

begründet von J. C. Poggendorff

herausgegeben unter Mitwirkung befreundeter Physiker
von

G. und E. Wiedemann.

Jährlich ein Band in 8⁰ von 12 Heften. Preis ℳ 16.—

Die Beiblätter erscheinen seit 1877 und haben den Zweck eine möglichst vollständige und rasche Uebersicht der Arbeiten auf dem gesammten Gebiet der Physik zu geben.

Sie enthalten dementsprechend sorgfältig ausgearbeitete Referate über die laufende periodische Literatur (wozu von der Redaction mehr als

100 wissenschaftliche Zeitschriften des In- und Auslandes benutzt werden), über die Publikationen gelehrter Gesellschaften, Dissertationen, Programme u. s. w. soweit sie in das physikal. Gebiet einschlagen und von wissenschaftlichem Interesse sind; ferner eine Uebersicht über die gesammte Literatur inclusive der erschienenen Bücher. Soweit irgend thunlich, versendet die Redaction die Correcturabzüge der Referate an die betreffenden Herren Autoren zur Durchsicht, welche dieselben mit nicht dankbar genug anzuerkennender Bereitwilligkeit zu prüfen und event. zu ergänzen pflegen, so dass auf diese Weise den in den Beiblättern erscheinenden Berichten eine weit grössere Correctheit gesichert ist, als auf anderem Wege zu erreichen wäre.

Mittheilungen der Herren Autoren physikalischer Werke, in denen neue Untersuchungen enthalten oder neue Apparate beschrieben sind, werden von der Redaction mit Dank entgegengenommen und zur raschen Berichterstattung benutzt, zu gleichem Zweck wird um Zusendung von Separatabzügen, Programmen, Dissertationen u. s. w. ergebenst gebeten.

Der Inhalt der „Annalen der Physik und Chemie" wird in den „Beiblättern" nicht berücksichtigt, da letztere eine Ergänzung der „Annalen" bilden aber in selbständigem Abonnement erscheinen.

Journal
für
Praktische Chemie.
Neue Folge,

herausgegeben von

H. Kolbe und (seit 1879) **E. v. Meyer.**

Jährlich 2 Bände in 22 Heften. 8⁰. ℳ 22. —

Bis Ende 1881 ist erschienen:

Journal f. techn. u. öconom. Chemie, herausgegeben von *Erdmann,* 1828—33. 18 Bde. 8⁰.

——— f. **prakt. Chemie,** herausgegeben von *Erdmann, Schweigger-Seidel, Marchand* und *Werther,* 1834—69. Bd. 1—108.

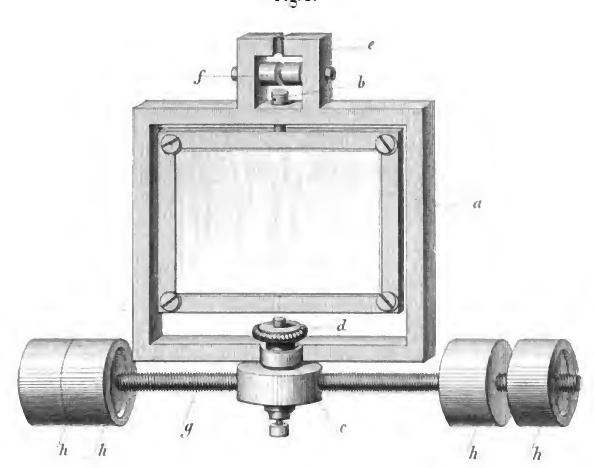
——— ——— Neue Folge, herausgegeben von *H. Kolbe* (und *E. v. Meyer*), 1870—81. Band 1—24.

Im Ganzen 150 Bände nebst 5 Registern.

Complete Reihen sind fast immer bei der Verlagshandlung zu haben; dieselbe sucht zur Ergänzung ihrer Vorräthe einzelne Jahrgänge oder auch längere Reihen zurückzukaufen und bittet im gegebenen Fall um Offerten.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Fig. 2.



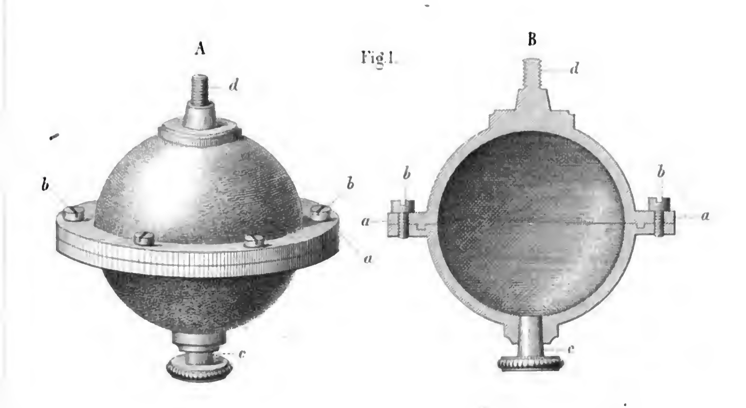
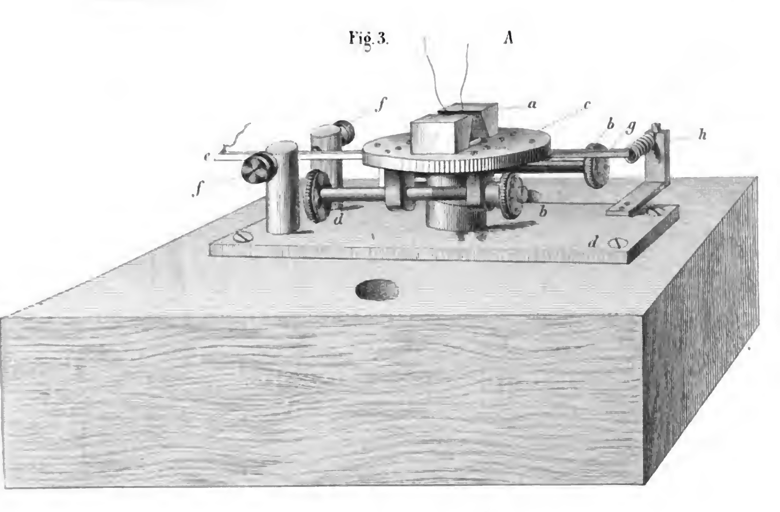
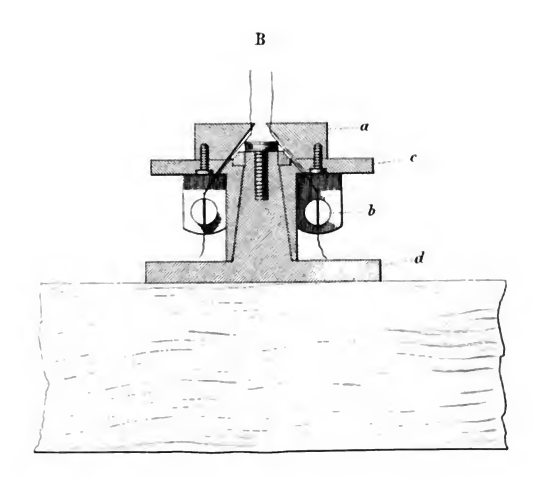


Fig. 1.

Digitized by Google

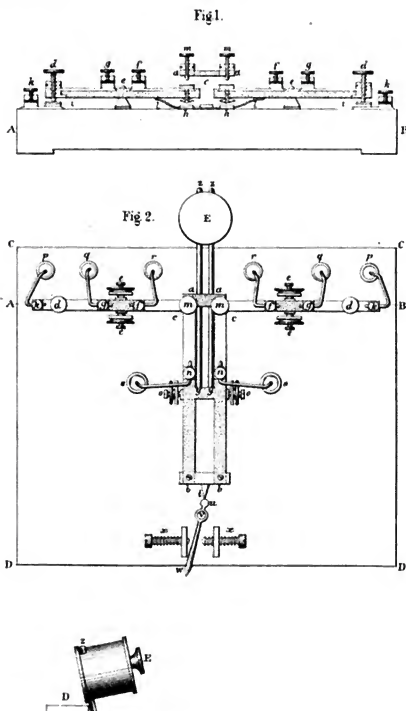
Fig. 3.

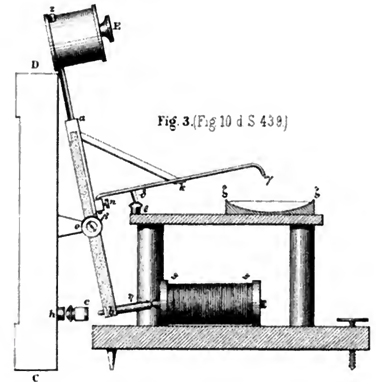




Digitized by Google

(Taf. I der Seite 438–441.)





Lith. Anst. v. F. Kirst, Leipzig

Digitized by Google

89048365837

b89048365837a

Due

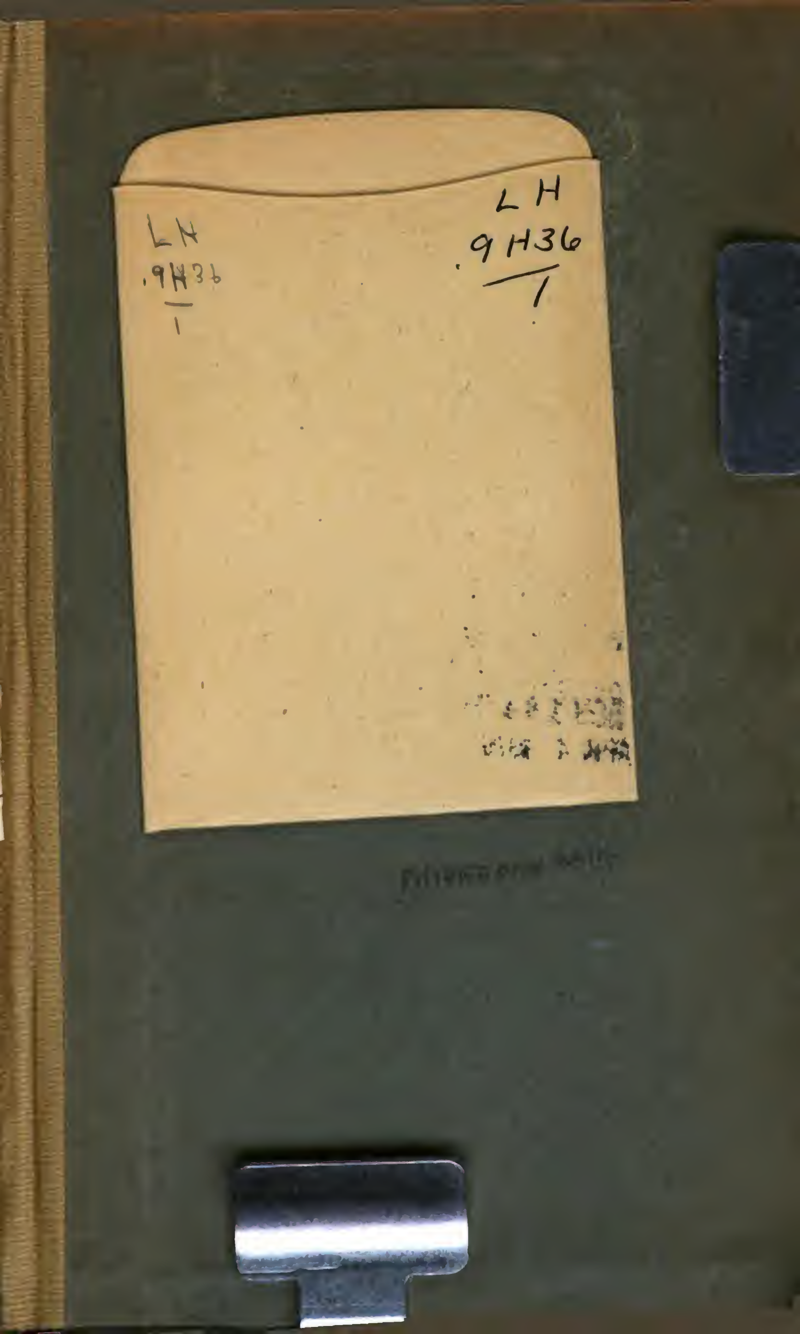
...y be kept

...OURTEEN DAYS

...TWO CENTS will be charged for each day ...pt over time.

	APR 1981		
13 Ag'52	OCT 22 1987		
9 Je'55			
6 Mr'58			
21 Oc'59			
22 Mr'60			
23 Fe'61			
OC 24 '66			
MY 15 '67			
FE 20 '68			
DE 26 '69			
MR 23 '72			
OC 1 2 '73			
NOV 1 0 1975			
APR 4 1979			

TO RENEW THIS BOOK CALL 262-5500


LH
.9H36
1

89048365837
b89048365837a